ANÁLISIS DE PROCESOS DE INSTRUCCIÓN BASADO EN EL ENFOQUE ONTOLÓGICO- SEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

Juan D. Godino[1], Ángel Contreras[**], Vicenç Font[***]

ABSTRACT

In this article we introduce new theoretical notions based on the onto-semiotic approach to mathematics cognition that serve to analyse the mathematical instruction processes. We describe a model for teaching and learning mathematical processes as a multidimensional stochastic process composed by six sub-processes (epistemic, teacher, student, material resources, cognitive and emotional), their potential states and trajectories. As a primary unit of analysis we propose the didactical configuration, which is composed by the interactions between the teacher and the students, when solving a mathematical task and using specific material resources. We apply these theoretical tools to analyse a teaching session concerning the derivative rules. This analysis serves to describe the implemented meanings, didactical interaction patterns, and semiotic conflicts involved in the didactical interactions.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, de nouvelles notions théoriques sont introduites pour analyser les processus d'instruction mathématique fondés sur l'approache ontologique et sémiotique de la cognition mathématique. Nous modélisons l'enseignement et l'apprentissage d'un contenu mathématique comme un processus stochastique multidimensionnel composé de six sous-processus (épistemique, enseignant, élève, médiationnel, cognitif et émotionnel) avec ses trajectoires et états potentiels respectifs. Nous proposons la configuration didactique comme unité primaire de l'analyse didactique, constituée par les interactions professeur-élève à propos d'une tâche mathématique et utilisant certaines ressources matérielles spécifiques. Ces nouveaux outils théoriques s'appliquent à l'analyse d'une séance concernant les règles de dérivation. Ils permettent de décrire les significations implémentées, les patrons d'interaction didactique et d'identifier des conflits sémiotiques manifestés dans les interactions didactiques.

RESUMEN

En este trabajo se introducen nuevas nociones teóricas para analizar procesos de instrucción matemática basadas en el enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Modelizamos la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Las nuevas herramientas teóricas se aplican al análisis de una sesión de clase de bachillerato en la que se estudian las reglas de derivación, permitiendo describir los significados implementados, los patrones de interacción didáctica, e identificar conflictos semióticos manifestados en las interacciones didácticas.

Mots-clés: Instrucción matemática; configuración didáctica; trayectoria didáctica; patrones de interacción; criterios de idoneidad.

---

[1] Juan D. Godino, Universidad de Granada, jgodino@ugr.es

[**] Ángel Contreras, Universidad de Jaén (España), afuente@ujaen.es

[***] Vicenç Font, Universidad de Barcelona (España), vfont@d5.ub.es

I. PROBLEMA Y ANTECEDENTES

En trabajos previos, Godino y Batanero han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran *un enfoque ontológico-semiótico* de la cognición matemática, en el que asignan un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos que se ponen en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002). La motivación inicial para la elaboración de las nociones introducidas (significados institucionales y personales entendidos como sistemas de prácticas, objetos emergentes, dualidades cognitivas, función semiótica) fue progresar en la articulación de diversos modelos teóricos existentes en Didáctica de las Matemáticas, tales como la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986, 1997), Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990), Teoría Antropológica (Chevallard, 1992, 1999). Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas utilizaremos en lo que sigue la expresión "Teoría de las Funciones Semióticas" (TFS) debido a que esta es la manera como se cita en otros trabajos de investigación a este enfoque.

Aunque en diversos trabajos se ha mostrado la utilidad de este modelo teórico para analizar los conocimientos matemáticos, tanto institucionales como personales, aún no se ha abordado el análisis de sus implicaciones sobre el problema verdaderamente didáctico, esto es, el estudio de los procesos organizados de generación y comunicación de los conocimientos matemáticos en el seno de una institución escolar. Nos referimos con la expresión *instrucción matemática* (o proceso de estudio dirigido) a dichos procesos de enseñanza y aprendizaje organizados, en los cuales intervienen unos determinados sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), unos sujetos (estudiantes) cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, el profesor o director del proceso de instrucción y unos recursos instruccionales.

En el enfoque epistemológico de la Didáctica de la Matemática (Gascón, 1998) disponemos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1997) que proporciona herramientas para analizar los procesos de instrucción matemática y valorar la idoneidad de tales procesos en términos de los aprendizajes matemáticos logrados. La asunción, por dicha teoría, de la hipótesis del aprendizaje matemático en términos de adaptación a un medio adidáctico puede orientar de manera consistente la construcción de situaciones didácticas mediante las cuales los alumnos construyan los conocimientos matemáticos de manera significativa.

Ahora bien, en la práctica no todos los objetivos de aprendizaje matemático se pueden lograr mediante procesos de adaptación en situaciones a-didácticas. Esto es así, no sólo porque la re-invención de todos los conocimientos matemáticos por parte de los alumnos requeriría un tiempo didáctico ilimitado, o porque exigiría unas capacidades intelectuales excepcionales por parte de los alumnos, sino porque el componente discursivo, normativo y cultural de los conocimientos matemáticos requiere la implementación de momentos de institucionalización, en los que la enseñanza directa del profesor juega un papel esencial.

La articulación entre las situaciones adidácticas y didácticas, entre los conocimientos y saberes que pueden ser estudiados mediante una "enseñanza directa" y los que podrían ser abordados mediante una construcción adidáctica está lejos de ser obvia. Schneider ha planteado este problema de manera clara y directa:

> "¿Qué peso conceder al constructivismo?". (Schneider 2001, p. 53).

Esta autora analiza las tensiones entre la teoría de situaciones y la teoría antropológica con relación al concepto de adidacticidad, el axioma de existencia de las situaciones fundamentales, así como el diseño de organizaciones matemáticas y didácticas idóneas desde el punto de vista matemático. En este trabajo, Schneider sugiere también el interés de examinar:

> "[...] otros proyectos del mismo tipo que analicen las relaciones entre praxeologías didácticas y praxeologías matemáticas [...]". (Schneider 2001, p. 54).

El foco de atención preferente de la Teoría de Situaciones ha sido la caracterización de la dimensión adidáctica de las situaciones de aprendizaje matemático, pero esto no ha implicado que se olvide, dentro de este marco, el estudio del papel del profesor como constructor y gestor del medio en el que el alumno interactúa para construir el conocimiento matemático. Por ejemplo, Bloch se plantea como problema las modalidades de intervención del profesor:

> "¿Cuándo y cómo inducir conocimientos o saberes en el medio.". (Bloch 1999, p. 138).

Esta autora, sin salirse del marco de la teoría de situaciones, trata de desarrollarla en una dirección que considera productiva para el estudio de la contingencia:

> "[...] trataremos de identificar un poco mejor el papel del profesor, los conocimientos que necesita para gestionar una situación de enseñanza/ aprendizaje, incluso en los niveles a-didácticos [...]". (Bloch 1999, p. 139).

Margolinas se ha interesado por delimitar el campo de validez de la Teoría de Situaciones Didácticas:

> "Se trata de una teorización de las posibilidades del alumno comprometido en el juego matemático, y no de una descripción de las acciones efectivas del alumno en la resolución del problema, ni de una descripción de lo que pasa efectivamente en la clase, y esto en ningún momento del funcionamiento de la clase.". (Margolinas 1992 p. 120).

Esta reflexión le lleva a formular la tesis:

> "El estudio del papel del profesor requiere la creación de conceptos y métodos específicos ". (Margolinas, 1992, p. 120).

Nosotros consideramos que la TFS proporciona un marco en el que es posible estudiar la articulación de las teorías mencionadas y analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico. Para ello, ha sido necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos relacionados que permitan describir de una manera detallada las interacciones que ocurren en el aula de matemáticas. Las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, normas sociomatemáticas, aportadas por el *interaccionismo simbólico* (Cobb y Bauersfeld, 1995; Voigt, 1984; Godino y Llinares, 2000) son sin duda herramientas útiles para abordar esta problemática.

Por otro lado, nos parece necesario tener en cuenta nociones aportadas por teorías psicológicas del aprendizaje, como la *zona de desarrollo próximo* (Vygotsky, 1979) y los supuestos del *aprendizaje verbal significativo basado en la recepción* (Ausubel, 2000). Todos estos modelos teóricos pueden parecer incompatibles entre sí, pero una aproximación al estudio de los problemas didácticos desde un paradigma de *complejidad sistémica*, como el que propone Morin (1994), es posible encontrar complementariedades por encima de las divergencias aparentes[1]. La Teoría de las Funciones Semióticas (junto con la ontología

[1] "Así es que, habría que sustituir al paradigma de disyunción /reducción /unidimensionalización por un paradigma de distinción /conjunción que permita distinguir sin desarticular, asociar sin identificar o reducir " (Morin, 1994, p. 34)

matemática asociada) y las nociones teóricas que vamos a describir en este trabajo pueden permitir establecer conexiones y complementariedades entre las teorías mencionadas.

Aparte de la problemática teórica que acabamos de mencionar, en este trabajo nos proponemos desarrollar un conjunto de nociones que permitirán abordar problemas didácticos específicos, como los que describimos a continuación.

Como profesores de matemáticas estamos interesados por encontrar respuestas a las preguntas sustantivas que nos plantea la práctica de la enseñanza: *¿Qué matemáticas enseñar? ¿Cómo enseñar esas matemáticas?*

La didáctica de las matemáticas, desde un posicionamiento científico, tiene que reformular estas cuestiones *normativas* "ingenuas" para hacerlas operativas e investigables. Es necesario descomponer el problema en subproblemas y para ello se requiere explicitar modelos sobre la naturaleza de la propia matemática, y modelos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La TFS es una modelización de los conocimientos institucionales y personales de los "objetos matemáticos". Las nociones teóricas que se introducen en este artículo constituyen una modelización de la instrucción que permite abordar cuestiones descriptivas y explicativas previas, como las siguientes:

- ¿De qué variables o factores depende la *idoneidad* de un proceso de instrucción matemática?
- ¿Cuáles son los valores o categorías de tales variables?
- ¿Qué unidad de análisis de los procesos de instrucción interesa adoptar para tener en cuenta las interacciones entre las distintas variables?
- ¿Cómo secuenciar en el tiempo las tareas y funciones para optimizar el aprendizaje en unas circunstancias dadas?
- ¿En qué medida es idóneo/ eficaz el proceso de instrucción observado? ¿Cómo evaluar la idoneidad de un proceso de instrucción matemática?

El sistema de nociones teóricas que esbozamos en este artículo no aporta la solución directa a estas cuestiones, sino la posibilidad de tratarlas, como nos dice E. Morin para cualquier teoría:

> "Une théorie n'est pas la connaissance, elle permet la connaissance. Une théorie n'est pas une arrivée. C'est la possibilité d'un départ. Une théorie n'est pas une solution, c'est la possibilité de traiter un problème". (Morin 1990, p. 310).

La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión valorada. Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados que elaboramos en este trabajo es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su implementación. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor fundamentado sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática y elaborar criterios para el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje matemático.

La idea principal de este trabajo consiste en identificar en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones o facetas que interactúan entre sí, cada una de las cuales se puede modelizar como un proceso estocástico, con sus respectivos espacios de estados y trayectorias. La interacción entre los distintos estados y trayectorias se describe mediante las nociones de *configuración didáctica* y *trayectoria didáctica*, que nos proporcionan herramientas para identificar los *patrones de interacción* de una manera sistemática, así como hacer operativas las nociones de cronogénesis y topogénesis introducidas por Chevallard (1991).

Mostraremos también, con el análisis detallado de una configuración didáctica, cómo la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2002) permite realizar análisis de tipo microscópico de episodios instruccionales que complementa el nivel intermedio de la teoría de situaciones.

El artículo lo hemos estructurado de la siguiente manera: Comenzamos en la sección 2 indicando que un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos). Cada una de estas dimensiones se puede modelizar como un proceso estocástico, para cuyos estados proponemos una categorización. En la sección 3 introducimos las nociones de interacción y configuración didáctica (tanto teórica como empírica). Finalmente, concluimos con una síntesis e implicaciones para la investigación y la práctica docente.

Aplicamos las nociones introducidas al análisis de una clase de matemáticas sobre cálculo de derivadas (1º curso de Bachillerato, alumnos de 16-17 años), cuya transcripción se incluye en el Anexo. El ejemplo corresponde a una clase que no ha sido especialmente preparada, sino que es una sesión que se imparte de la manera habitual por un profesor que es reconocido entre sus colegas como "buen profesor". Nos parece que es representativa de una manera muy extendida de enseñar matemáticas en el nivel de bachillerato. Aunque el fragmento de clase es pequeño (solo hemos incluido en el Anexo la transcripción de 13 minutos) se ponen en juego los diversos componentes o facetas de un proceso de instrucción matemática, permitiendo ejemplificar el tipo de análisis que consideramos útil para identificar fenómenos didácticos ligados a la implementación de los significados institucionales, identificación de conflictos semióticos, patrones de interacción didáctica y sus consecuencias en la génesis de los significados personales de los estudiantes.

Somos conscientes de que la valoración de la idoneidad de un proceso instruccional requiere registrar un complejo de informaciones sobre el estado y evolución de los distintos componentes y dimensiones que lo definen. Es necesario, por tanto, usar diversos métodos y técnicas de recogida de datos (observación, encuesta, medida; cuestionarios, entrevistas, grabaciones audio-visuales) y determinar los estados cognitivos de los estudiantes en diferentes momentos del proceso instruccional. En el caso que usamos como ejemplo ilustrativo sólo disponemos de la grabación audio-visual del desarrollo de una clase. Debido a esta circunstancia, y a las limitaciones de espacio, sólo podemos mostrar algunos hechos que consideramos relevantes.

II. MODELIZACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN MEDIANTE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

1. Dimensiones de un proceso de instrucción matemática. Trayectorias muestrales

Como hemos indicado, un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos). Cada una de estas dimensiones se puede modelizar como un proceso estocástico.

En cada uno de dichas dimensiones podemos identificar un conjunto de elementos, (tareas, acciones, etc.), los cuales se secuencian en el tiempo. En cada realización de un proceso de instrucción matemática sobre un objeto matemático se pondrán en juego una muestra de elementos del significado pretendido del objeto (Godino, 2002), así como una muestra de las funciones docentes y discentes. También se seleccionarán unos recursos instruccionales específicos. Parece natural modelizar esta distribución temporal de funciones y componentes mediante procesos estocásticos[2], considerando tales funciones o componentes como sus estados posibles.

En cada realización del proceso instruccional (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático) se producen una serie de estados posibles y no otra. Es decir, se produce una *trayectoria muestral* del proceso, que describe la secuencia particular de funciones o componentes que ha tenido lugar a lo largo del tiempo. Distinguiremos seis tipos de procesos y sus correspondientes trayectorias muestrales:

1. Trayectoria epistémica, que es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado[3] institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.
2. Trayectoria docente: distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
3. Trayectorias discentes: distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).
4. Trayectoria mediacional, que representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.).
5. Trayectorias cognitivas: cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.
6. Trayectorias emocionales: distribución temporal de los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Cada una de estas trayectorias es una realización de un proceso estocástico, puesto que el proceso de instrucción tiene unas características no deterministas. Incluso aunque la planificación haya sido cuidadosa, siempre hay elementos aleatorios que producen cambios en cada una de las trayectorias anteriores, por la necesidad de adaptar la enseñanza planificada a las características y requerimientos de los alumnos.

Al observar un proceso instruccional, las secuencias en el tiempo de los estados posibles constituyen trayectorias muestrales empíricas. Desde un punto de vista teórico y a efectos de disponer de elementos de referencia sobre su representatividad interesa indagar las características potenciales de las trayectorias instruccionales. En las secciones 2.3 a 2.5 indicamos los principales estados posibles de las tres primeras trayectorias mencionadas (epistémica, docente y discente). La categorización de los estados de las restantes trayectorias será objeto de otros trabajos.

2. El tiempo didáctico

---

[2] Familia de variables aleatorias que depende del tiempo. La modelización mediante procesos estocásticos es parcial ya que no pretendemos definir un espacio de probabilidad para los sucesos implicados. Nos limitamos a identificar los espacios de estado de los procesos

[3] Aquí el "significado" lo interpretamos dentro del marco de la TFS como "sistema de prácticas operativas y discursivas"

Las actividades de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en el aula, espacio usual de la interacción entre profesor y alumnos, y también fuera del aula (espacio asignado para las tutorías, la biblioteca y el domicilio del alumno). Estas actividades tienen además una duración temporal: el currículo prevé un tiempo en el que se marca el comienzo y el final del proceso de estudio de un tema matemático (una sesión de clase, una semana a razón de 3 horas a la semana, etc.). Pero esta medida temporal apenas indica la duración que el profesor y los alumnos dedican efectivamente a las diversas actividades que se designan con los términos 'enseñanza' y 'aprendizaje'. La duración efectiva que el profesor dedica a las actividades de enseñanza y la duración que los alumnos dedican efectivamente a realizar las actividades propuestas por el profesor, y en particular, el tiempo que invierten en el estudio individual del contenido pretendido son factores determinantes del aprendizaje finalmente logrado. En consecuencia, el *tiempo didáctico* debemos concebirlo como un vector cuyas componentes son los valores de las duraciones temporales de las diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de estudio.

Tenemos que ser conscientes de que excepto la duración de las interacciones profesor-alumno que tienen lugar en la clase, las restantes duraciones son difícilmente accesibles a la observación externa, en particular el tiempo que cada alumno dedica al estudio personal del contenido pretendido. Este tiempo es, sin duda, un factor crucial para el aprendizaje.

El *tiempo de aprendizaje* podemos definirlo como la duración que un alumno requiere para lograr los objetivos de aprendizaje relativos a un contenido dado. Esta duración temporal es obviamente diferente del tiempo de enseñanza, tendrá un desfase temporal respecto de la enseñanza y será específica de cada estudiante. La estimación de estas duraciones presenta dificultades importantes, no sólo por las dificultades de determinar el tiempo de estudio personal, sino también por su dependencia de los criterios de evaluación de los aprendizajes, cuando estos no se refieren meramente a aspectos algorítmicos.

Cuando el significado de los objetos matemáticos se modeliza en términos de "sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos de problemas" la evaluación de los significados personales que construyen los alumnos en el proceso de estudio debe hacerse según ese enfoque. Pero en este caso, los juicios sobre el aprendizaje, el conocimiento, la comprensión y la competencia matemática presentan un nuevo nivel de complejidad: todas estas nociones dejan de ser dicotómicas. ¿Cuándo podemos afirmar que un alumno ha aprendido el objeto *derivada*?

La problemática del tiempo didáctico, de la cronogénesis y topogénesis (Chevallard, 1991), puede explicitarse mediante la modelización que proponemos de la enseñanza y el aprendizaje como un proceso estocástico. Permitirá, asimismo, identificar nuevos aspectos y enfoques para los fenómenos didácticos ligados a la gestión del tiempo didáctico.

La modelización del proceso de estudio como proceso estocástico supone la distribución en el tiempo de los distintos elementos del significado sistémico de un objeto y la distribución temporal de los estados docentes, discentes, recursos materiales, así como los estados cognitivos y emocionales. Nosotros vamos a interpretar la *cronogénesis didáctica* del saber[4] como la generación en el tiempo del saber matemático escolar como consecuencia de la interacción didáctica. El profesor es quien decide el orden en que se tratan los distintos objetos (y distintos elementos que componen su significado sistémico) y va introduciendo progresivamente nuevos objetos a medida que progresa el tiempo didáctico.

[4] En la TFS el *saber* se interpreta como *significado institucional de referencia*, y por tanto en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas, mientras que los *conocimientos* se conciben como significados personales (sistemas de prácticas personales). (Godino y Batanero, 1994). Esta modelización epistémico-cognitiva difiere de la propuesta en la teoría de situaciones, pero consideramos que puede ser un desarrollo coherente de la misma.

Interpretaremos la *topogénesis del saber* como la distribución de la responsabilidad principal del estudio de los distintos elementos del significado sistémico de los objetos matemáticos entre el profesor y el alumno. El profesor decide qué elementos del significado de los objetos matemáticos estarán bajo la responsabilidad total o parcial de los alumnos y cuáles toma a su cargo.

> "Profesor y alumno ocupan distintas posiciones en relación con la dinámica de la duración didáctica: difieren en sus relaciones respectivas con la *diacronía* del sistema didáctico, con lo que podemos denominar la *cronogénesis*. Pero también difieren según otras modalidades: según sus lugares respectivos en relación con el saber en construcción, en relación con lo que podemos llamar la topogénesis del saber, en la sincronía del sistema didáctico". (Chevallard, 1991, p. 83).

Las decisiones crono y topogenéticas que adopta el profesor fijan los significados implementados en la clase y lo que finalmente tienen oportunidad de aprender los estudiantes. Por esta razón son nociones útiles para el análisis didáctico.

La modelización que proponemos del proceso de instrucción en términos de trayectorias y estados va a permitir describir con detalle los fenómenos crono y topogenéticos. Por ejemplo, los segmentos instruccionales (1-13) y (14-41) del Anexo han comenzado a estar primero bajo la responsabilidad del alumno, como tarea para casa; pero en la sesión están bajo la responsabilidad del profesor, que es quien hace la modelización y aplica las técnicas. El ejercicio del segmento (42-44) queda completamente bajo la responsabilidad del alumno, debido a que después del segmento anterior el profesor considera que es un ejercicio rutinario para los estudiantes. Pero incluso dentro del segmento (14-41), y debido al patrón de interacción que implementa el docente, el cálculo de las derivadas de x^2+1 y $\sqrt{x}$ están bajo la responsabilidad discente durante un corto intervalo de tiempo, antes que el profesor decida presentar la solución en la pizarra. Estas decisiones topogenéticas modifican los significados implementados y, por tanto, los aprendizajes.

3. Trayectoria epistémica

En esta sección desarrollamos lo que denominamos *análisis epistémico* de un proceso de instrucción. Se trata de descomponerlo en unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. Con este fin consideramos útil introducir las nociones de configuración epistémica (matemática), trayectoria epistémica y estados potenciales de dichas trayectorias.

La TFS distingue seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos en ella, por tanto, seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento:

E1: *Situacional*: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: *Actuativo*: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: *Lingüístico*: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: *Proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: *Argumentativo*: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático.

La clasificación de las entidades matemáticas en las categorías que hemos definido no es absoluta, sino que, al tratarse de entidades funcionales, depende del nivel de análisis elegido y de los juegos de lenguaje en los cuales se generan. Podríamos entonces pensar que la identificación de los estados de las trayectorias tiene un carácter subjetivo. Sin embargo, si dos personas participan en el mismo juego de lenguaje y adoptan el mismo punto de vista, progresivamente llegarán a un acuerdo en la categorización de una cierta unidad de análisis.

El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad onto-semiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problemas (o tareas) que se van proponiendo. Llamaremos *configuración epistémica* al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema[5]. Se trata, por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. La atención se fija en la cronogénesis del saber matemático escolar, y en la caracterización de su complejidad onto-semiótica. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que llamamos *unidades epistémicas*. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio son numeradas correlativamente para su referencia y las denominamos *unidades naturales* de análisis.

En la tabla 1 se muestra la trayectoria epistémica de una parte del proceso de estudio sobre el "Cálculo de derivadas en bachillerato" (Anexo). Para cada una de las unidades epistémicas en que se divide dicho texto, hacemos una breve descripción de dicha unidad, e identificamos el estado de la trayectoria epistémica.

Unidad Natural	Conf. Epist. (tiempo)	U. Epist.	Descripción	Estado
0	CE1 (2.01)	0	Enunciado del ejercicio de cálculo de la velocidad de un móvil	E1: situacional
1-3		1	Aplicación de la técnica de solución	E2: actuativo
6-7		2	Enunciado de reglas de derivación (proposiciones)	E5: proposicional
8-12		3	Aplicación de las reglas de derivación	E2: actuativo
13		4	Descripción de la técnica de solución	E5: proposicional
14-16	CE2 (4.29)	5	Enunciado de otro problema: cálculo de la derivada del producto de funciones	E1:situacional
17-20		6	Descripción de una acción futura para derivar un producto de funciones	E2: actuativo
21-24		7	Recuerdo de la regla de cálculo de la derivada de un producto de funciones	E5: proposicional
25-26		8	Introducción de una	E3: lingüístico

[5] Si bien el origen de la configuración será una situación-problema, en algunas circunstancias puede ser más operativo tomar en consideración otro de los estados potenciales de la trayectoria para delimitar la configuración epistémica.

			notación, *f(x)* y *g(x)*	
27-39		9	Aplicación de la regla E6 al problema E5 usando la notación E7	E2: actuativo
40-41		10	Simplificación de notaciones	E3: lingüístico
42-44	CE3 (0.33)	11	Ejercicio de aplicación similar al anterior	E1: situacional
46-50	CE4 (6.3)	12	Enunciado del problema de hallar una fórmula para derivar la función sen(x)	E1: situacional
52-53		13	Evocación de una técnica general de solución	E5: proposicional
54		14	Aplicación de la regla general, limite cociente incremental al caso de la función seno	E2: actuativo
55		15	Reconocimiento de la indeterminación 0/0	E5: proposicional
56		16	Planteamiento del problema de solución de la indeterminación	E1: situacional
59-82		17	Solución de la indeterminación 0/0 y cálculo del límite	E2: actuativo

Tabla 1.- Trayectoria epistémica del proceso instruccional (Anexo 1)

Hay que tener en cuenta que cada configuración epistémica, globalmente considerada, desempeña una función específica en el proceso de instrucción. En este ejemplo, las configuraciones CE1 y CE2 tienen un carácter esencialmente *actuativo*, ya que se pretende que los estudiantes ejerciten y dominen unas técnicas de cálculo de derivadas determinadas. En cambio en la CE4 predomina el carácter *argumentativo*: se trata de justificar que la derivada del seno es el coseno. La breve configuración CE3 queda limitada al enunciado de una tarea, por lo que tiene un carácter *situacional*.

Ahora bien, para conocer lo que ocurre en el interior de cada configuración epistémica, tendremos que analizarla con más detalle y, por tanto, reconocer nuevas entidades y estados en el segmento de trayectoria correspondiente.

A lo largo del tiempo se distribuye el planteamiento y resolución de una colección de situaciones-problemas, alrededor de los cuales se construyen configuraciones epistémicas. La secuencia de estas configuraciones constituyen finalmente el "sistema de prácticas matemáticas" que fijan el significado institucional implementado para el objeto "cálculo de derivadas".

En los 13 minutos de la clase, cuya transcripción hemos incluido en el Anexo, identificamos 4 configuraciones epistémicas empíricas (o efectivamente implementadas) que analizamos a continuación.

Configuración epistémica 1

El proceso de estudio se inicia con un estado "situacional", esto es, con el planteamiento de un *ejemplo* de un *tipo de problema* de modelización matemática: la determinación de la velocidad de un móvil mediante su interpretación como derivada de la función que expresa la relación entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido.

El enunciado del problema pone en juego algunos objetos conceptuales (velocidad, derivada, y función espacio-tiempo, etc.), así como una función semiótica entre la derivada y la velocidad.

La realización de la tarea requiere, en primer lugar, una acción de modelización, lo que implica establecer una correspondencia entre dos sistemas de prácticas: el ligado al objeto velocidad (y su relación con el espacio y el tiempo), y el correspondiente a la derivada, como límite del cociente incremental. Se debe establecer una función semiótica entre la derivada y la velocidad que relacione ambos objetos conceptuales. Este sistema de objetos e interpretaciones es el que se pone en juego en la primera oración expresada por el profesor.

Una vez realizada la modelización se procede a aplicar la técnica general de derivación de funciones polinómicas al caso particular dado, a sustituir el valor de t por 1 y a realizar los cálculos aritméticos. El valor numérico obtenido, 5, tiene que ser interpretado como la medida de una velocidad: 5 metros por segundo.

Configuración epistémica 2

Se propone calcular la derivada de una función producto de otras dos, el polinomio x^2+1, y la función $\sqrt{x}$, aplicando la regla general de la derivada de un producto de funciones: $(f\cdot g)' = f'g + f\cdot g'$. La técnica a aplicar requiere recordar el enunciado de dicha regla, atribuir a f y g los valores particulares x^2+1 y $\sqrt{x}$, calcular las derivadas de dichas funciones y aplicar la regla general. El tipo de actividad matemática requerida aquí es el recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas que se suponen previamente aceptadas y conocidas; se propone con la finalidad de asegurar el dominio de tales reglas y se apoya en el conocimiento de las reglas de cálculo de derivadas de funciones potenciales y polinómicas.

Esta configuración es independiente de la anterior, pero ambas cooperan para construir el sistema de prácticas que el currículo designa como "derivada" (concepto, aplicación y cálculo).

Configuración epistémica 3

Esta configuración se organiza a partir de una breve intervención del profesor en la cual asigna a los alumnos la realización de un ejercicio similar al que acaba de resolver. Aunque no sabemos el ejercicio particular encomendado consideramos relevante el papel que desempeña esta actividad en el proceso de estudio. Es un problema o tarea similar a la que se acaba de realizar que aparentemente no aporta nada nuevo; pero cumple la función cognitiva de ejercitación a fin de retener el conocimiento por parte de los estudiantes, de asegurar más el dominio de la técnica de cálculo de derivadas del producto de funciones.

Configuración epistémica 4

La obtención de una fórmula para calcular la derivada del seno a partir de la definición general de derivada de una función es el objetivo básico de esta configuración. El primer paso es el recuerdo de la regla que define la derivada como límite del cociente incremental cuando el h tiende a 0, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, seguido de su interpretación y aplicación al caso particular de la función seno.

Para ello, debe asignar a $f(x)$ el valor sen x y a continuación aplicar la técnica de cálculo de límites por sustitución directa (que se supone conocida por los alumnos).

Pero en este caso, la aplicación de esta regla conduce a la indeterminación 0/0. Hasta ahora las indeterminaciones de este tipo se han resuelto básicamente transformando el numerador y el denominador como producto de factores. Sin embargo, en este caso las técnicas conocidas por los alumnos no son válidas para resolver la indeterminación (factorización, multiplicación por el conjugado en el caso de funciones irracionales). Ahora es necesario, según la transcripción, recordar y aplicar la identidad trigonométrica, $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x$, así como las equivalencias entre infinitésimos:

cos h - 1 es equivalente a $-\frac{h^2}{2}$, y que $\lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} = 0$

La simplificación de la expresión que se obtiene finalmente después de estas sustituciones conduce a la solución buscada: (sen x)' = cos x.

Globalmente considerada, la sesión de clase que hemos observado es compleja por la variedad de objetos matemáticos y conocimientos que se ponen en juego. Se comienza con la aplicación de la derivada a una modelización externa a las matemáticas (cálculo de la velocidad de un móvil), se continúa con una modelización interna (cálculo de la derivada de un producto de funciones), y la deducción de las reglas de derivación de las funciones y = sen x. La sesión, cuya transcripción no se incluye por razones de espacio, continúa con la deducción de las reglas de derivación de las funciones y = cos x, $y = \frac{1}{x+k}$ y $y = \frac{1}{x-k}$. La clase finaliza con el planteamiento de otro problema de modelización interna, la determinación de la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2+x+1$, en el punto de abscisas x =2.

Podemos observar que las configuraciones epistémicas constituyen “micro sistemas de prácticas” que se van agrupando y construyendo progresivamente el “significado sistémico” institucional del objeto *derivada*.

En la figura 1 representamos esquemáticamente un fragmento de la trayectoria muestral del proceso epistémico observado.

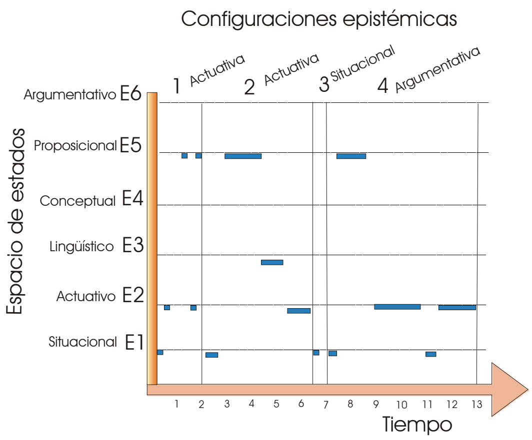

Figura 1. - Trayectoria epistémica

La enseñanza del cálculo de derivadas, o de cualquier otro contenido matemático, no es un hecho que tenga lugar una sola vez, sino que se repite "indefinidamente" en circunstancias similares (el mismo profesor "repite" la lección a grupos diferentes, o en cursos sucesivos). En estas repeticiones habrá ciertas regularidades, pero también variaciones imprevisibles. Cada proceso de instrucción implementado con ocasión de la impartición del curso en cuestión dará lugar a una trayectoria epistémica que puede representarse sobre el sistema cartesiano de la figura 1. Si hemos observado N clases podremos representar sobre el mismo sistema cartesiano N trayectorias epistémicas y estamos en condiciones de asignar probabilidades de ocurrencia de cada estado, probabilidades de paso de un estado a otro, así como plantearnos preguntas sobre las frecuencias de ocurrencias de sucesos en intervalos de tiempo (estadísticas de recuento) y sobre los tiempos de permanencia en cada estado (estadísticas de tiempos).

Estas técnicas cuantitativas, aunque sin duda muy laboriosas, podrían ser de interés para caracterizar las técnicas didácticas de los profesores y estudiar relaciones con otras variables. En este trabajo nos limitamos a esbozar esta posibilidad.

4. Trayectoria docente

Usaremos la expresión 'trayectoria docente' para referirnos a la secuencia de actividades que realiza el profesor durante el proceso de estudio de un contenido o tema matemático. Cuando tales actividades se circunscriben a una situación-problema (o tarea) específica hablaremos de 'configuración docente', la cual irá asociada a un configuración epistémica. Estas actividades o acciones del profesor son su respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, para las cuales proponemos la siguiente categorización[6].

Funciones docentes:

P1: *Planificación*: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

P2: *Motivación*: creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

P3: *Asignación* de tareas: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: *Regulación*: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: *Evaluación*: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.

P6: *Investigación*: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

La trayectoria docente del proceso de estudio del "cálculo de derivadas" (Anexo) se describe en la tabla 2.

Unidad natural	Conf. Epist.	U. Doc.	Descripción	Estado
0	CE1	1	Asignación de la tarea (ejercicio del libro)	P3: asignación
1-3		2	Presenta la resolución del ejercicio	P4: regulación
4		3	Evaluación interrogativa colectiva	P5: evaluación
6-12		4	Explica/justifica la técnica que ha mostrado	P4: regulación
13		5	Sintetiza el sistema de prácticas descrito	P4: regulación
14-16	CE2	6	Progresión del tiempo didáctico	P3: asignación
17-19		7	Evaluación de significados personales	P5: evaluación
21-24		8	Recuerdo de proposiciones previas (derivada del	P4: regulación

[6] Esta relación es una propuesta inicial que puede ser refinada y completada, pero ello no resta validez al tipo de análisis que proponemos.

			producto de dos funciones)	
25-27		9	Introducción de notaciones	P4: regulación
28-29		10	Asignación de la tarea de derivar	P3: asignación
30-31		11	Evaluación interrogativa colectiva	P5: evaluación
32		12	Orientación (coger los apuntes o el libro)	P3: asignación
33		13	Motivación ("despabilar con las derivadas, ...")	P2: motivación
33bis		14	Detención del tiempo didáctico (realización personal del ejercicio)	P3: asignación
34-39		15	Enseña la solución del ejercicio	P4: regulación
40-41		16	Adaptación de la tarea (no simplificar)	P3: asignación
42-43	CE3	17	Evaluación interrogativa colectiva	P5: evaluación
44		18	Motivación y orientación	P2: motivación
45		19	Evaluación interrogativa colectiva	P5: evaluación
46-49	CE4	20	Planteamiento del problema de hallar la derivada del seno	P3: asignación
50		21	Evaluación interrogativa colectiva	P5: evaluación
51		22	Motivación, ("No os cortéis, ...")	P2: motivación
52		23	Aplicamos la definición	P4: regulación
53		24	Evaluación interrogativa colectiva	P5:evaluación
54		25	Recuerdo e interpretación de reglas conceptuales	P4: regulación
55		26	Planteamiento de problemas (indeterminación 0/0)	P3: asignación
56-82		27	Presenta la resolución del ejercicio	P4: regulación

Tabla 2.- Trayectoria docente del proceso de estudio sobre el "cálculo de derivadas"

Configuración docente 1

El trabajo del profesor comienza recordando el enunciado de una tarea asignada para casa el día anterior. La unidad docente 2 refleja la actividad docente de institucionalización o regulación de la técnica de cálculo de la derivada de una función polinómica, suponiendo que el alumno ha debido de indagar la solución del problema, y en su caso, resolverlo por sus propios medios. Ahora es el momento de fijar la “manera de resolver” este tipo de problemas.

El trabajo de modelización que hace el profesor requiere el *recuerdo e interpretación de las reglas* conceptuales y procedimentales que se ponen en juego: velocidad, derivada, reglas de derivación de funciones polinómicas, etc.

La unidad *4), ¿De acuerdo?* Responde a la función docente de *evaluación* de los conocimientos aprendidos. Aquí se trata más bien de una evaluación que podemos calificar de colectiva y retórica, que utiliza como recurso para hacer avanzar el tiempo didáctico (y pasar a otra actividad). Pero en este caso ha permitido la intervención del alumno y modificar la trayectoria epistémica.

El profesor ha considerado como “transparente” el proceso de modelización. Pero dada su complejidad podemos ver, por la pregunta del alumno y la respuesta que da el profesor, que se generó un conflicto semiótico que permanece latente. El alumno ha preguntado "al derivar *qué* hemos hecho", y el profesor responde *cómo* se ha derivado.

El segmento correspondiente a la primera configuración termina con la unidad *13), Vas aplicando las reglas que hemos deducido estos días*.

Esta frase describe de manera genérica el tipo de actividad matemática que se ha realizado: *aplicar las reglas deducidas*. El profesor está transmitiendo un aspecto importante de las matemáticas: una parte necesaria de la actividad matemática es cuestión de aplicar las reglas previamente conocidas.

Configuración docente 2

La segunda configuración docente comienza con la elección de una nueva tarea entre las asignadas para casa el día anterior, que pide calcular la derivada de un producto de funciones. La elección se basa en una evaluación genérica que le permite reconocer la existencia de una dificultad en esa tarea. La resolución es asumida por el profesor que la presenta ante los alumnos. A lo largo de la presentación trata de dar una cierta participación a los alumnos, intentando transferir a los alumnos una parte de la tarea, aunque finalmente es el docente quien hace todo el trabajo. También hay un momento en el que trata de motivar el trabajo discente, atribuyendo "un valor fundamental" al cálculo de derivadas: *33), Despabilar con las derivadas, que ya veis que es fundamental que las hagáis.* Implícitamente les está informando que las derivadas también son importantes para él, con lo cual el alumno puede intuir que probablemente sean importantes en las pruebas de evaluación.

Configuración docente 3

Esta breve configuración consiste en la selección de otro de los ejercicios que supone no ha sido resuelto por los alumnos, pero que es similar al anterior*: 44), Intentarlo ahora aplicando esto.*

La siguiente actividad del profesor es una evaluación genérica que utiliza como pretexto para terminar el segmento instruccional dedicado a la corrección de ejercicios y abrir una nueva configuración sobre elaboración de una regla de cálculo de la función sen(x).

Configuración docente 4

Globalmente esta configuración es mucho más compleja que las anteriores y predomina el carácter argumentativo para establecer la proposición: (sen x)' = cos x. La argumentación requiere descomponer el problema en sub-problemas, los cuales, dada su complejidad son completamente resueltos por el profesor. Hay, sin embargo, momentos de evaluación, de tipo genérico, que pretenden mantener la atención del alumno y transferirles parcialmente la tarea, sin que verdaderamente lo consiga.

En el desarrollo global de la sesión se aprecia que el trabajo de *planificación* del profesor está basado en el uso del libro de texto. Los ejercicios propuestos son seleccionados entre los que se incluyen en el libro, el repertorio de reglas de derivación que se van deduciendo en clase se corresponde con el reflejado en el texto. No tenemos información de cómo el desarrollo de la clase haya podido afectar a la planificación inicial, excepto en el segmento 14-40 en el que observamos que los alumnos no han realizado por su cuenta los ejercicios asignados, lo que lleva al profesor a invertir más tiempo del previsto para realizar los ejercicios de la derivada del producto de funciones.

Encontramos algunas unidades que corresponden al ejercicio de la función de *motivación:*

33) Despabilar con las derivadas, que ya veis que es fundamental que las hagáis

51) No os cortéis, ¡vamos decirlo!

El libro de texto desempeña en el proceso de estudio el papel de "significado institucional pretendido". Pero se observa en esta sesión cómo el profesor va generando el significado institucional efectivamente implementado en la clase, como consecuencia de la interacción didáctica. Es él quien decide, como respuesta a circunstancias en muchos casos imprevisibles, tratar un objeto matemático como elemental o sistémico, utilizar diversos recursos expresivos, aportar un tipo de argumentación u otro, etc. En definitiva, es el actor clave de la transposición didáctica.

5. Trayectoria discente

De manera similar al caso de las trayectorias epistémica y docente interesa definir la noción de *configuración discente*, como el sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica. La siguiente relación puede constituir un primer inventario de tipos potenciales de estados o funciones del estudiante en el proceso instruccional.

A1: *Aceptación* del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: *Exploración*, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: *Recuerdo*, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: *Formulación* de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: *Argumentación* y justificación de conjeturas (al profesor o los compañeros).

A6: *Recepción* de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

A7: *Demanda* de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (por ejemplo, cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

A8: Ejercitación: Realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: Evaluación: Estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

La trayectoria discente del fragmento del proceso de instrucción del "cálculo de derivadas" (Anexo) se describe en la tabla 3.

Unidad natural	Conf. Epist.	U. Disc.	Descripción	Estado
0	CE1	1	Exploración personal (en casa) de la solución del ejercicio	A2: exploración
1-4		2	Recepción de la explicación	A6: recepción
5		3	Plantea preguntas sobre la explicación	A7: demanda
6-13		4	Recepción de la explicación	A6: recepción
19-20	CE2	5	Responder a preguntas del profesor	A4: formulación
21-33		6	Recepción de la explicación	A6: recepción
33bis		7	Exploración personal en clase de ejercicios	A2: exploración
34- 41		8	Recepción de la explicación	A6: recepción
42	CE3	9	Responder a preguntas del profesor	A4: formulación

44		10	Asunción de tarea (ejercicio similar)	A1: aceptación
45		11	Responder a las preguntas del profesor	A4: formulación
46-49	CE4	12	Asunción de tareas	A1: aceptación
50-53		13	Responder a preguntas del profesor	A4: formulación
54- 55		14	Recepción de la explicación	A6: recepción
56		15	Asunción de tarea (indeterminación 0/0)	A1: aceptación
57-59		16	Responder a preguntas del profesor	A4: rormulación
60-82		17	Recepción de información del profesor	A6: recepción

Tabla 3.- Trayectoria discente del proceso de estudio sobre el "cálculo de derivadas"

Las configuraciones discentes 1 y 2 (segmentos 1-13; y 14-41) son similares en cuanto al tipo de trabajo del alumno. Se supone que el alumno debe haber explorado personalmente la solución de los problemas; ahora es el momento de hacer la *auto-evaluación* del trabajo encomendado el día anterior. La manera de resolver el problema que muestra el profesor deberá ser contrastada con el procedimiento de solución personal. Para ello deberá adoptar una posición de *recepción-activa* de la información presentada por el profesor.

Los alumnos no tienen ocasión de comunicar ni discutir las soluciones que hayan podido encontrar en el supuesto trabajo personal realizado en casa.

En cuanto a la aceptación de las tareas se ve en la grabación audiovisual que el conjunto de los alumnos están atentos, tratan de seguir las explicaciones y hacer los ejercicios. Sin embargo, no se dispone de información precisa de lo que efectivamente hace cada alumno.

El trabajo de exploración personal del aprendiz con los problemas planteados se supone que es realizado fuera de la clase, ya que se trata de actividades propuestas para trabajo en casa. El proceso de estudio de estos problemas tiene que abarcar, no sólo los sucesos registrados en la sesión, sino también el trabajo realizado por el aprendiz antes de la clase, y después, durante la preparación de las pruebas de evaluación habituales.

En la configuración discente 3 (segmento 42-44) la responsabilidad de resolver la tarea queda atribuida plenamente al alumno. Después de resolver el problema de cálculo de la derivada del producto de dos funciones se supone que el nuevo ejercicio está al alcance de sus posibilidades y deberá hacerlo fuera del horario de clase.

En la configuración 4 (cálculo de la derivada del seno) los alumnos participan como espectadores del trabajo del profesor, a pesar de los intentos del docente de hacerles participar en la solución de alguna de las subtareas.

6. Otras trayectorias

Las trayectorias docente y discente responden a conductas explícitas del profesor y los alumnos que condicionan el desarrollo del proceso instruccional. Pero hay otras dimensiones o facetas del proceso que se deben tener en cuenta en una descripción global que permita el análisis del proceso como totalidad. Se trata del empleo de diversos recursos materiales como soporte de la instrucción (trayectoria mediacional), de la cronogénesis de los significados personales de cada alumno (trayectoria cognitiva), de las actitudes, valores, afectos y sentimientos generados (trayectoria emocional). Se trata de factores internos a la clase, que varían con el tiempo y condicionan los aprendizajes matemáticos.

Trayectoria mediacional

En el proceso instruccional se podrán utilizar diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio. Esto incluirá medios de presentación de la información en clase (pizarra, retroproyector, etc.), dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadores), materiales manipulativos, etc. El uso de estos recursos (tipo, modalidad, secuenciación, articulación con los restantes elementos del procesos, etc.) debe ser objeto de atención en la práctica y en la investigación didáctica. La noción de trayectoria mediacional pretende servir de herramienta para analizar los usos potenciales y efectivamente implementados de los recursos instruccionales y sus consecuencias cognitivas.

En nuestro ejemplo, la tecnología utilizada es la tradicional de libro de texto, escritura y cálculo manual en cuadernos y pizarra. El proceso de estudio implementado podría ser basado en el uso de programas de ordenador tipo DERIVE, en cuyo caso la técnica de cálculo cambiaría radicalmente. Esto podría permitir centrar la atención en el proceso de modelización, en lugar de las técnicas de derivación.

Trayectoria cognitiva

En la Teoría de las Funciones Semióticas se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Con la noción de *trayectoria cognitiva* hacemos referencia al proceso de cronogénesis de tales sistemas de prácticas personales, que puede modelizarse como un proceso estocástico.

La cronogénesis de los significados personales es una dimensión del proceso de estudio imposible de caracterizar con una simple grabación audiovisual del desarrollo de la clase, dado que es relativa a cada aprendiz, tiene lugar en la clase y fuera de la clase. Será necesario examinar los "apuntes de clase", cumplimentar cuestionarios y pruebas de evaluación inicial y final, realizar entrevistas, etc. En nuestro ejemplo sólo tenemos indicios de esa cronogénesis por medio de las esporádicas intervenciones de los estudiantes, y muy limitada a aspectos puntuales.

La interacción del profesor con los alumnos mientras resuelven las tareas en clase, en los segmentos en que tiene lugar esa actividad, le permite acceder parcialmente a la progresiva construcción de los conocimientos por parte de los alumnos, y tomar decisiones sobre la cronogénesis institucional. En nuestro ejemplo, aparte de las evaluaciones colectivas y retóricas del tipo, *¿Alguna duda más de los ejercicios del viernes? No, ¿todo el mundo?, ¿seguro?,* ha habido diversos momentos en los que el profesor observa el trabajo de los alumnos resolviendo personalmente ejercicios, lo que le permite evaluar en puntos concretos el estado de sus trayectorias cognitivas, y tomar decisiones sobre la trayectoria epistémica.

Trayectoria emocional

Otros factores condicionantes del proceso de instrucción que admiten distintos estados y cambian a lo largo del tiempo se aglutinan en torno a lo que designamos como estados emocionales (interés, compromiso personal, sentimientos de autoestima, aversión, etc.). El proceso de *devolución* que introduce la Teoría de Situaciones Didácticas responde a la necesidad de que los alumnos asuman como propias las situaciones-problemas que el profesor propone como medio para la construcción del conocimiento matemático. Para nosotros la devolución es uno de los componentes de las trayectorias emocionales.

Si bien es importante tener en cuenta la trayectoria emocional de los alumnos en cualquier proceso de instrucción, en aquellos en los que participen grupos de estudiantes con necesidades educativas especiales (alumnos con discapacidad, alumnos inmigrantes con dificultades, etc.) ésta puede llegar a ser determinante.

En nuestro ejemplo los estudiantes "parecen" estar interesados y atentos a las explicaciones del profesor. Se observa un ambiente de respeto y compromiso con las tareas, pero esta apreciación no deja de ser superficial, basada en las apariencias audiovisuales registradas. Sería necesario la aplicación de instrumentos de recogida de datos específicos para describir con validez y fiabilidad los estados de las trayectorias emocionales de los alumnos con relación al proceso instruccional que están viviendo.

III. INTERACCIONES DIDÁCTICAS

1. Interaccionismo simbólico y Teoría de Situaciones

La identificación de patrones de interacción profesor-alumno es un tema de interés en las investigaciones que se realizan en el marco del Interaccionismo Simbólico (Cobb y Baursfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000):

> "Los patrones de interacción se consideran como regularidades que el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente"(Voigt, 1995, p. 178).

Estos patrones son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución. Los patrones de interacción se ponen en juego en las situaciones sin que sean pretendidos ni reconocidos necesariamente por los participantes. Cuando los participantes constituyen una regularidad que el observador describe como un patrón de interacción, dicha regularidad está estabilizando un proceso frágil de negociación de significados.

Según esta descripción, algunos de los fenómenos de didáctica identificados en la TSD pueden ser descritos como patrones de interacción. Por ejemplo, el "*efecto Topaze*" es un patrón de interacción que se corresponde con lo que Voigt (1985) y Bauersfeld (1988) designaron como *patrón del embudo* (funnel pattern):

- el profesor plantea un problema a los alumnos,
- los alumnos son incapaces de resolverlo,
- el profesor propone cuestiones más fáciles relacionadas con el problema y cuya solución conduce a resolverlo, pero sin que los alumnos pongan en juego una actividad intelectual mínimamente significativa.

El análisis de los patrones de interacción no queda reducido a la relación entre profesor y alumnos en la TSD. Brousseau trata de caracterizar *fenómenos de didáctica*, esto es, regularidades observables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas explicables dentro de un marco teórico propio. Por ello también describe como fenómenos de didáctica, entre otros, el denominado "*deslizamiento metacognitivo*" y el "*envejecimiento de las situaciones didácticas*", en los cuales, los patrones de interacción se refieren a relaciones entre el profesor y los recursos didácticos y las propias situaciones, respectivamente.

Los distintos tipos de situaciones didácticas que se proponen en TSD (acción, formulación, validación, institucionalización) pueden ser descritos como patrones de interacción más complejos entre profesor- alumnos – saber – medio, que condicionan y determinan los significados de los conocimientos puestos en juego en la clase de matemáticas, y por tanto los aprendizajes alcanzables.

La noción de interacción didáctica se puede describir como cualquier relación entre dos o más objetos didácticos, sean éstos, epistémicos, cognitivos, docente, etc., pero siempre y cuando esas relaciones se establezcan en el seno de un proceso de instrucción. Los patrones de interacción son los *tipos* de interacciones didácticas. Esta noción generaliza la interacción simbólica y constituye la entidad relacional básica del análisis didáctico. Un objetivo esencial para la didáctica de la matemática será la identificación de tipos de interacciones, los factores condicionantes de su formación, así como la indagación de sus consecuencias en términos del aprendizaje matemático.

La TFS sugiere explicar la implementación de los patrones de interacción, al menos en algunos casos como ocurre en el patrón del embudo, teniendo en cuenta la complejidad onto-semiótica de las configuraciones epistémicas construidas.

2. Configuraciones y trayectorias didácticas

La modelización de la instrucción matemática como un proceso estocástico que hemos descrito en la sección anterior, con sus diversas subtrayectorias y estados potenciales, proporciona un procedimiento sistemático con el que identificar regularidades en la secuenciación de estados en cada trayectoria, o en las interacciones entre dos o más trayectorias. Se trata de describir la manera cómo se relaciona el profesor con los alumnos a propósito de los distintos componentes de un saber matemático específico usando determinados recursos materiales.

Fijada una situación-problema (o tarea) y haciendo uso de una tecnología determinada, el profesor y los estudiantes emprenderán una secuencia de actividades en interacción mutua con el fin de lograr que los alumnos sean capaces de resolver esa tarea y otras relacionadas. Por ejemplo, en el segmento (1-13) de la transcripción de la sesión de clase el profesor propone la resolución de un problema seleccionado del libro de texto para que lo resuelvan los estudiantes en casa. El profesor asigna la tarea, los alumnos exploran soluciones plausibles; es de suponer que los alumnos hayan asumido (o no) la tarea asignada.

El proceso de estudio continúa mediante la presentación por el profesor de la solución en la pizarra (con lo que regula y fija la manera de resolver el problema); el alumno recibe la información (se supone que de una manera activa) y la compara con su solución (auto-evaluación). En el caso de discrepancias, o incomprensión de la presentación, el alumno tiene ocasión de pedir explicaciones, y el profesor estará obligado a responder con nuevas aclaraciones. Hay un momento en que el profesor "cambia de tarea", iniciándose una nueva *configuración didáctica*.

Llamaremos *configuración didáctica* a la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación-problema (o tarea). Una configuración didáctica se compone de una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción (además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación.

La configuración didáctica la concebimos como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática.

El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. En la sesión de clase completa[7] sobre "reglas de derivación" que usamos como ejemplo hemos identificado una secuencia de 12 configuraciones didácticas empíricas (o efectivamente implementadas). En la sección 3.4 vamos a analizar las cuatro primeras de dichas configuraciones didácticas formadas por la conjunción interactiva de las configuraciones epistémica, docente y discente resumidas en las tablas 1, 2 y 3 (sección 2)

3. Configuraciones didácticas de referencia

El análisis de las configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso instruccional, y de las que potencialmente pueden diseñarse para su implementación, se verá facilitado si disponemos de algunos modelos teóricos que nos sirvan de referencia. En esta sección vamos a describir cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar ese papel y que designamos como configuración *magistral*, adidáctica, *personal* y *dialógica*.

La Teoría de Situaciones Didácticas propone una manera de organizar el trabajo del profesor y los alumnos a propósito de un saber matemático pretendido, que se considera óptima en términos del aprendizaje de los alumnos. La secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización especifican los papeles del estudiante en interacción con el medio (en el que se incluye el profesor, unos conocimientos pretendidos y unos recursos materiales y cognitivos específicos) que podemos interpretar como un tipo de configuración didáctica de naturaleza teórica.

Pero sabemos que este no es el único tipo de configuración didáctica que puede implementarse y que de hecho se implementa. Ni siquiera en el marco de la TSD se afirma que todos los saberes matemáticos pueden, ni deben, ser estudiados de esa manera. Todos tenemos en mente la manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas basada en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos y saberes presentados. Primero se presenta el componente discursivo del significado de los objetos matemáticos (definiciones, enunciados, demostraciones), y se deja la responsabilidad de dar sentido al discurso a los propios estudiantes por medio de los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que se proponen. Se trata de una decisión topogenética: "primero, yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas". En realidad, en este tipo de configuración didáctica no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y validación, sino que quedan bajo la responsabilidad del estudiante, o bien se ponen en juego en momentos aislados de evaluación.

Una variante intermedia entre los tipos de configuraciones descritos (que designaremos como adidáctica y magistral, respectivamente) puede definirse respetando el momento de exploración, pero asumiendo el profesor básicamente la formulación y validación. La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución.

Otro tipo básico de configuración didáctica se tiene cuando la resolución de la situación-problema (o la realización de una tarea) se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente. En la práctica esto es lo que ocurre cuando los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor, o están incluidos en el libro de texto y están capacitados para resolverlos. Se trata de un tipo de configuración didáctica en la que básicamente predomina el *estudio personal*.

---

[7] En el Anexo sólo hemos incluido, por razones de espacio, un segmento que comprende las primeras cuatro configuraciones.

En la figura 2 representamos en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones didácticas teóricas descritos.

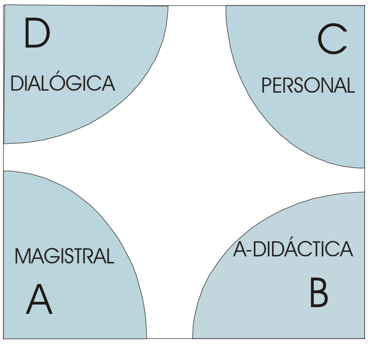

Figura 2.- Configuraciones didácticas teóricas

Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen en las trayectorias muestrales pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. A lo largo de un proceso de instrucción matemática las configuraciones empíricas oscilarán en torno a estos tipos teóricos.

4. Análisis de las configuraciones didácticas empíricas

En esta sección analizamos las cuatro configuraciones didácticas efectivamente implementadas en el ejemplo de clase sobre cálculo de derivadas. Analizaremos con más detalle la primera configuración aplicando las herramientas proporcionadas por la TFS y de manera menos detallada las otras tres por limitaciones de espacio. Se trata de explicar los conflictos de significado en términos de la complejidad ontológica y semiótica de la actividad matemática requerida.

Configuración didáctica 1: Corrección del ejercicio de cálculo de la velocidad

La primera configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de cálculo de la velocidad de un móvil aplicando la derivada. Con la información disponible no se puede saber el grado de asunción de la tarea por parte de los alumnos, en particular cuántos de ellos trataron de resolver el "ejercicio para casa" y qué fueron capaces de hacer. Esta información es, sin embargo, importante para explicar el desarrollo del proceso y del aprendizaje.

No hay comunicación por parte de los alumnos, sino sólo presentación de la solución por parte del profesor quien regula la forma de resolver la tarea. Hay un momento de evaluación colectiva mediante la pregunta genérica *¿De acuerdo?*, que da lugar a nuevas explicaciones. Esas explicaciones ponen en juego las funciones docentes de recuerdo e interpretación de reglas sobre la derivación de funciones potenciales.

La unidad *5), Pero D. José, ¿al derivar la ecuación qué es lo que hemos hecho?,*

indica que este alumno ha aceptado el compromiso educativo y quiere comprender.

Esto ha sido posible por la apertura del profesor a la interacción verbal en 4) y revela la presencia de un conflicto semiótico. El profesor interpreta que la duda del alumno se refiere a la aplicación de la técnica de cálculo de la derivada, y no al proceso de modelización /interpretación de la derivada.

Como consecuencia de la pregunta del alumno en *5)* el objeto "derivada de la función polinómica" $e(t) = 3t^2-t+1$, se reconoce como sistémico y pasa a ser descompuesto. Esto da lugar a recordar la regla, "la derivada de la suma es la suma de las derivadas de cada uno de los sumandos", "la constante permanece", etc.

La interacción profesor-alumno (unidades 4 y 5) ha modificado la trayectoria epistémica, abriéndose una bifurcación que despliega el significado de la técnica de derivación de las funciones polinómicas.

En la TFS se postula que los objetos matemáticos se pueden considerar desde la faceta extensivo-intensivo (ejemplar - tipo). El interés de esta faceta se puede observar cuando el profesor, después de considerar el problema resuelto como un caso particular de algo más general que él llama "la regla que hemos visto estos días", ante las dudas manifestadas por el alumno, decide justificar esta afirmación. Esto le lleva a realizar una cadena de funciones semióticas que relacionan objetos intensivos con extensivos.

La duda manifestada por el alumno, 5) *Pero, D. José, ¿al derivar la ecuación qué es lo que hemos hecho?,* es comprensible si tenemos en cuenta la compleja trama de funciones semióticas que el alumno tiene que realizar para entender, de modo significativo, la técnica utilizada. Sólo a título de ejemplo una de las posibles tramas de funciones semióticas que es necesaria para entender la oración 1 es la siguiente:

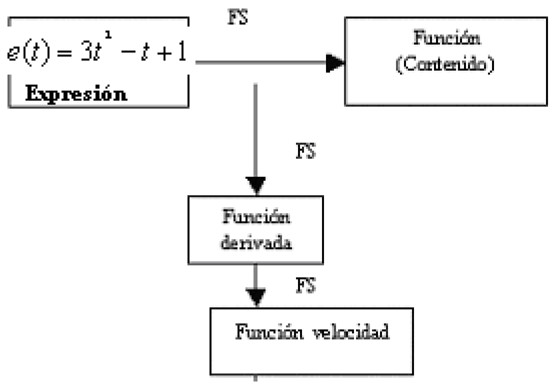

Figura 3.- Trama de funciones semióticas

La expresión escrita en la pizarra. $e(t) = 3t^2 - t + 1$, se tiene que entender como la función espacio, es decir se ha de considerar como un elemento de la clase de las funciones. Se trata de una función semiótica que relaciona una notación con un elemento de una clase (un extensivo). La función espacio se relaciona con otra función, su función derivada. Se trata de una correspondencia semiótica que relaciona un extensivo (la función espacio que corresponde a la expresión escrita en la pizarra) con otro extensivo (su función derivada).

La función derivada se relaciona con la función velocidad. Se trata de una función semiótica que relaciona un extensivo (la función derivada de la función espacio) con otro extensivo (la función velocidad). Esta función semiótica permite entender el mismo objeto con dos sentidos diferentes: como función derivada y como función velocidad.

La institucionalización de una acción no asegura que el alumno pueda realizar esta acción inmediatamente, ya que se necesita un cierto tiempo para que los alumnos no manifiesten dudas respecto de la acción considerada. En el segmento (7-12) podemos observar cómo la norma "las acciones que se han institucionalizado en clases anteriores son realizadas ahora sin necesidad de volverlas a explicar con detalle" se complementa con otra norma: "La institucionalización no produce efectos inmediatos ya que se necesita un cierto tiempo para que los alumnos no manifiesten dudas respecto de la acción considerada. Durante este tiempo el profesor tiene que ir recordando y explicando cómo y porqué se realiza esta acción."

Cuando el alumno manifiesta dudas sobre la acción que ha realizado el profesor, éste pasa a considerar en (7-12) el objeto desde el punto de vista sistémico. Es como si descompactara el objeto "reglas de derivación" en varios objetos (regla de la suma, regla de la derivada del producto de una función por una constante, derivada de la función potencial, derivada de la función de proporcionalidad directa y derivada de una constante), una situación en la que se utilizan estos objetos (el problema propuesto) y unos ostensivos que materializan estos objetos.

En (7) realiza implícitamente una función semiótica que relaciona un extensivo con un intensivo (pretende que el alumno considere la función $e(t) = 3t^2 - t + 1$ como un caso particular de una suma de funciones) y explícitamente funciones semióticas que relacionan intensivos con intensivos (el alumno ha de entender que en la "suma" intervienen "sumandos" y que "la función derivada" de la suma es la suma de las funciones derivadas)

En (8) el profesor establece explícitamente una función semiótica que relaciona un extensivo con un intensivo (quiere que el alumno considere la función $3t^2$ como un caso particular del producto de una función por una constante). En (9) el profesor establece explícitamente una función semiótica que relaciona un intensivo con un extensivo (quiere que el alumno entienda que ha aplicado una regla general a un caso particular). También hay funciones semióticas que relacionan notaciones con notaciones (por ejemplo, el alumno ha de entender $t^{2-1} = \text{t}$.

Esta configuración didáctica es la continuación de una configuración didáctica de tipo personal y está básicamente próxima al tipo A (magistral), aunque las interrogaciones del profesor y la intervención del alumno hace que incluya algunos rasgos propios del tipo D (dialógico).

Configuración didáctica 2: Corrección del ejercicio de cálculo de la derivada del producto de dos funciones

Se trata de otro ejercicio asignado por el profesor como trabajo para casa. El profesor "intuye" que sus alumnos probablemente no lo han resuelto por lo que comienza la clase resolviendo el ejercicio en la pizarra. Después de seleccionado el ejercicio *15) Éste, uno de ellos* comienza con una interrogación colectiva que, como se puede observar en la transcripción, es una característica de su estilo docente.

Una alumna da una respuesta parcial, *20) Derivamos equis cuadrado más 1 y después derivamos la raíz cuadrada de x, uno partido por dos raíz de equis*. No menciona cómo se combinan ambas derivadas en el caso del producto de dos funciones. El profesor no parece interesado en saber si la alumna en cuestión conoce la regla de la derivada del producto y cómo se aplica en este caso. Esto está indicando que la interrogación colectiva que había hecho tiene más bien un carácter retórico: no pretende realmente que los alumnos expresen sus conocimientos. Se trata más bien de "mantener la atención" de los alumnos, ya que esa pregunta colectiva puede convertirse en cualquier momento en pregunta individual. El alumno puede pensar que esa pregunta que está en el aire me puede caer a mí, luego debo estar atento al *juego didáctico*.

El profesor comienza su explicación recordando reglas vistas el día anterior y toma a su cargo el establecimiento de la correspondencia semiótica entre la regla general de la derivada del producto de dos funciones (un objeto intensivo proposicional) y el caso particular del producto de funciones $y = (x^2 + 1).\sqrt{x}$. Para ello debe establecer previamente las correspondencias notacionales entre $f(x)$ y $g(x)$ con las funciones particulares dadas.

La tarea inicial de cálculo de la derivada del producto de dos funciones ha sido descompuesta en partes; una de ellas es el cálculo de las derivadas de las funciones x^2+1 y $\sqrt{x}$. Ahora quiere transferir la responsabilidad de realización de esta subtarea a los propios alumnos. Estamos asistiendo a la puesta en escena del patrón de interacción que la TSD describe como "efecto Topaze": El profesor va rebajando progresivamente la exigencia cognitiva de la tarea inicial. Se trata de la transformación de una configuración que inicialmente era dialógica en una de tipo magistral. Pero no podemos afirmar que la actividad matemática que se está haciendo en clase (cuyo protagonista principal es el profesor) sea estéril. El recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas previamente establecidas es un componente necesario de la actividad matemática, y por tanto del aprendizaje.

Observamos en esta configuración didáctica una compleja dinámica de interaciones docente - discente - saber - medio, mediante las cuales el problema inicial se transforma y la responsabilidad de la actividad matemática pasa en unos momentos a los alumnos, mientras que en otros permanece en el profesor. Los momentos de recuerdo e interpretación de reglas previamente establecidas, necesarias para la continuación de la actividad, desempeñan un papel clave en el proceso de estudio y marcan puntos de bifurcación e inflexión en dicho proceso. Si los alumnos no recuerdan una definición, una propiedad una técnica, la continuidad de la actividad exige la intervención del docente, lo que da lugar a nuevas configuraciones didácticas.

La comparación global de esta configuración empírica con las configuraciones teóricas de referencia nos lleva a situarla próxima al tipo A (magistral), con algunos rasgos del tipo D (dialogal). Una observación más detallada permite apreciar el intento del docente de descomponer la tarea en subtareas y de implementar una configuración tipo C (personal), atribuyendo la responsabilidad al estudiante. Pero finalmente concluye con una presentación magistral.

Configuración didáctica 3: Resolución de ejercicios similares

Las unidades 42 a 45 muestran un tipo de configuración didáctica que reúne características propias. El profesor pregunta de manera colectiva si el siguiente ejercicio "os ha salido". Se acerca a un alumno y ve en el libro el ejercicio en el que han tenido dificultad. Al comprobar que es similar al anterior concluye: *44) Intentarlo ahora aplicando esto*. Lo característico de esta configuración es que finalmente el profesor deja completamente bajo la responsabilidad de los alumnos la solución de ejercicios similares a otro que ha sido resuelto en clase; estos ejercicios deberán ser resueltos fuera de la clase (configuración de tipo personal). Los conocimientos previos necesarios para abordar la solución se suponen conocidos, pero el trabajo pedido favorece el dominio de una técnica que el profesor considera valiosa. El enunciado de la actividad y su realización se apoya materialmente en el libro de texto y los apuntes de clase que sirven como memoria didáctica.

Este patrón de interacción se repite para los restantes "ejercicios del viernes", aunque el profesor no va a estar completamente seguro de que los alumnos sean capaces de resolverlos (¿Todo el mundo? ¿Seguro?), y sobre todo que, efectivamente, los alumnos hagan tales ejercicios. Pero el trabajo del profesor tiene que continuar apoyándose en esta "ficción": los alumnos cumplirán su parte del contrato, harán los ejercicios propuestos apoyándose en los apuntes de clase y el libro de texto y lograrán el aprendizaje. La clase está preparada para continuar con la deducción de nuevas reglas de derivación.

Configuración didáctica 4: Deducción de la regla de derivación de la función sen x

Ahora se plantea un problema de naturaleza bastante diferente a los anteriores. No se trata de modelizar una situación real (como el cálculo de la velocidad), ni de aplicar unas reglas generales de derivación a casos particulares, sino de deducir una nueva regla general para un tipo de funciones bastante diferente: las funciones trigonométricas.

Comienza con una justificación de la tarea indicando que las reglas que se van a deducir permiten "hallar de una forma más sencilla la derivada, sin tener siempre que aplicar el límite". El profesor es consciente de la complejidad de esta tarea y ha planificado su explicación en clase, aunque aplicando un patrón de interacción que en cierto modo define su estilo docente, que permite un cierto grado de participación a los alumnos.

Deja unos segundos para que los alumnos expliciten la regla general de cálculo de la derivada como límite del cociente incremental. Pero no espera realmente a que sean ellos los que la enuncien, sino que directamente escribe en la pizarra, al tiempo que algunos alumnos la recitan simultáneamente: $y' = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen\, x}{h}$.

Se trata de una primera etapa de un "efecto Topaze". Aplica la técnica de cálculo del límite funcional mediante la sustitución en la función del valor del límite de la variable independiente, $h = 0$, y declarando que "nos saldrá una indeterminación del tipo 0/0.

El saber puesto en juego es sin duda de una notable complejidad semiótica, lo que lleva al profesor a dar la solución, aunque intercalando en su discurso algunas interrogaciones colectivas para mantener la atención. La solución de la indeterminación requiere transformar el numerador, recordando y aplicando la regla trigonométrica que desarrolla el seno de una suma. Pide a los alumnos que recuerden la regla trigonométrica, pero como no tiene respuesta es él quien la escribe en la pizarra: *63) Seno, coseno; más, seno, coseno ... ¿Os acordáis?*

Continúa haciendo operaciones sacando factor común sen x, y aplica la regla del límite de una suma de dos funciones. Aparece otro punto crítico en el cálculo del límite de cada sumando ya que hay que identificar dos infinitésimos equivalentes. Se apoya en el libro de texto para recordarles que, como se indica en la tabla de infinitésimos equivalentes,

70) En la página 156, el coseno de un ángulo menos 1, cuando el ángulo tiende a cero, ¿a qué es igual?... 1-cos(x) es equivalente a $x^2/2$*, entonces*

71) cos(h)-1 es equivalente a $-\frac{h^2}{2}$*. 72. ¿De acuerdo?*

Recuerda también que (sen h)/h tiende a 1, cuando h tiende a 0, por lo que simplificando se obtiene finalmente la regla buscada:

82) Cuando la función es seno, su derivada es el coseno.

En esta configuración didáctica, dada la gran complejidad onto-semiótica de la actividad requerida, el docente es el responsable de la génesis del saber, asumiendo el protagonismo del recuerdo e interpretación de las reglas y de la aplicación de las técnicas. El alumno se limita a escuchar y anotar las explicaciones del profesor. Aunque no tenemos información del grado de comprensión que los alumnos hayan logrado del proceso, sí podemos observar el esfuerzo del profesor por comunicar a los alumnos el carácter deductivo de la matemática: "Si hemos aceptado este resultado, entonces debemos aceptar este otro".

Al igual que las configuraciones didácticas 1 y 2, esta configuración debemos situarla próxima al tipo A (magistral), con algunos matices del tipo D (dialogal). Hemos podido observar que las configuraciones empíricas reúnen características de dos o más configuraciones teóricas.

5. Patrones de interacción, técnicas didácticas y contrato didáctico

El análisis de trayectorias didácticas empíricas permitirá identificar ciertas regularidades en las configuraciones didácticas que las componen y en el modo en que se articulan. Llamaremos "*patrón de interacción didáctica*" a cualquier regularidad que pueda identificarse en las trayectorias didácticas y las configuraciones que las componen. Estas regularidades se pueden considerar también, al menos en ciertos casos, como "maneras de hacer", esto es, como técnicas didácticas; además la aparición de tales regularidades puede explicarse por la aplicación de cláusulas de los contratos didáctico, pedagógico y escolar. Por ejemplo, en las cuatro configuraciones estudiadas observamos que el profesor formula preguntas colectivas sobre si los alumnos "van siguiendo la explicación", o tienen alguna dificultad en las tareas. Este patrón de interacción se ha convertido en una manera de actuar del profesor ante los alumnos, lo que se puede describir como una técnica didáctica como respuesta al "problema docente" de "¿Cómo adaptar la enseñanza al aprendizaje? ¿Cómo mantener la atención de los alumnos?". Pero también revela el cumplimiento de una norma implícita que regula las relaciones profesor-alumno: "El profesor tiene que mantener la atención del alumno"; "El profesor debe basar su enseñanza en los conocimientos iniciales de los alumnos y en su progresión" (contrato pedagógico).

En nuestro ejemplo, el profesor propone a los alumnos varios ejercicios rutinarios sobre aplicación de las reglas de derivación con el fin de lograr su dominio. También observamos que el profesor se esfuerza por justificar deductivamente las proposiciones, como ocurre con la deducción de la regla de derivación del seno, a pesar de su complejidad. Pero la deducción y el cálculo automatizado son rasgos característicos de la actividad matemática, lo que parece forzar al profesor a su implementación (contrato didáctico, específico del contenido matemático).

Consideramos que las nociones de configuración didáctica y contrato (en sus diversas modalidades y tipos) son complementarios. La configuración se refiere a los sistemas de prácticas matemáticas y didácticas que efectivamente se implementan en los procesos de instrucción, mientras que el contrato se refiere a las normas que condicionan las acciones efectivas de los actores que participan en dichos procesos, y por tanto pueden explicar la aparición de los patrones de interacción.

El desarrollo de cada configuración didáctica y su secuenciación a lo largo de un proceso instruccional está apoyada en la implementación de una variedad de patrones de interacción, regularidades que se constituyen con frecuencia de manera inconsciente, reducen la incertidumbre y resuelven los conflictos semióticos.

6. Criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas

Las nociones teóricas introducidas en los apartados anteriores proporcionan herramientas para realizar análisis descriptivos pormenorizados de los procesos de instrucción matemática, lo que a su vez abre la posibilidad de encontrar explicaciones de las regularidades observables. Pero la didáctica de las matemáticas tiene que afrontar además el reto de la ingeniería didáctica, entendida como la disciplina que orienta el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática.

¿Qué criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas se pueden derivar del enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática?

Consideramos que la idoneidad global de una configuración didáctica, y de las trayectorias didácticas, se debe valorar teniendo en cuenta las diversas facetas o dimensiones que hemos propuesto. En el caso de las configuraciones docente y discentes creemos útil articularlas teniendo en cuenta las posibilidades de identificación de conflictos y de negociación de significados. Resultan, en consecuencia, cinco criterios de idoneidad que describimos a continuación:

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia. Incluye también las conexiones o apertura hacia otras configuraciones epistémicas que constituyen la trayectoria correspondiente.

- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos[8].
- *Idoneidad semiótica* tiene en cuenta las posibilidades que ofrece una configuración didáctica para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados.
- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad.
- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

El constructivismo psicológico ha elaborado criterios de idoneidad principalmente para las dimensiones cognitiva, emocional y semiótica, pero no atiende, o lo hace en menor medida, a los criterios que nosotros hemos denominado epistémicos y mediacionales.

En la figura 4 representamos la idoneidad de una configuración didáctica mediante el área del pentágono inscrito en un pentágono regular. La forma irregular del pentágono se deriva de la mayor o menor idoneidad (valorada de 0 a 1) en cada uno de los ejes o criterios.

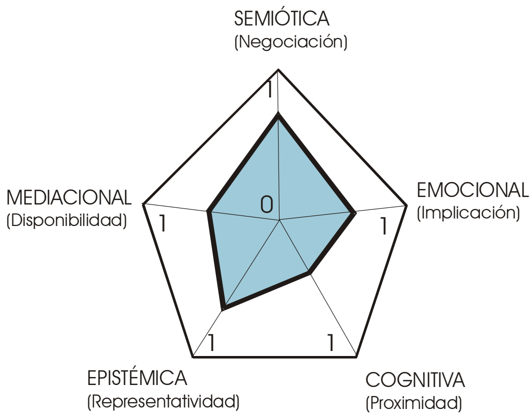

Figura 4.- Idoneidad de las configuraciones didácticas

IV. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

Las aportaciones de este trabajo a la didáctica de las matemáticas son básicamente de carácter teórico ya que el principal objetivo ha sido presentar una nueva manera de analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usando nuevas herramientas teóricas. Se trata de una ampliación de la TFS mediante la cual se puede abordar el análisis de la dimensional instruccional de dichos procesos, además de las dimensiones epistémica y cognitiva que permiten la noción de función semiótica y la ontología matemática asociada.

Para ello consideramos útil la modelización (al menos parcial) mediante procesos estocásticos, usar las nociones de trayectoria muestral y estados potenciales de los procesos

[8] Vigotsky (1979, p. 133).

estocásticos en que descomponemos los procesos de instrucción matemática. Como entidad relacional básica adoptamos la de interacción didáctica -relación entre dos o más objetos matemáticos o didácticos- que amplia la noción de interacción simbólica. Así mismo, la introducción de la noción de configuración didáctica (empírica y teórica), que generaliza la de situación didáctica, los tipos de configuraciones teóricas que proponemos y sus componentes (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional) constituyen recursos analíticos y explicativos, especialmente al ser combinados con los restantes elementos de la Teoría de las Funciones Semióticas.

Resaltamos también el interés de definir cuatro tipos teóricos de configuraciones didácticas que delimitan un "espacio didáctico" en el que situar las configuraciones didácticas empíricas, así como la elaboración de la noción de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas, valorada según las dimensiones epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional y emocional. La figura 5 es una síntesis del modelo teórico descrito.

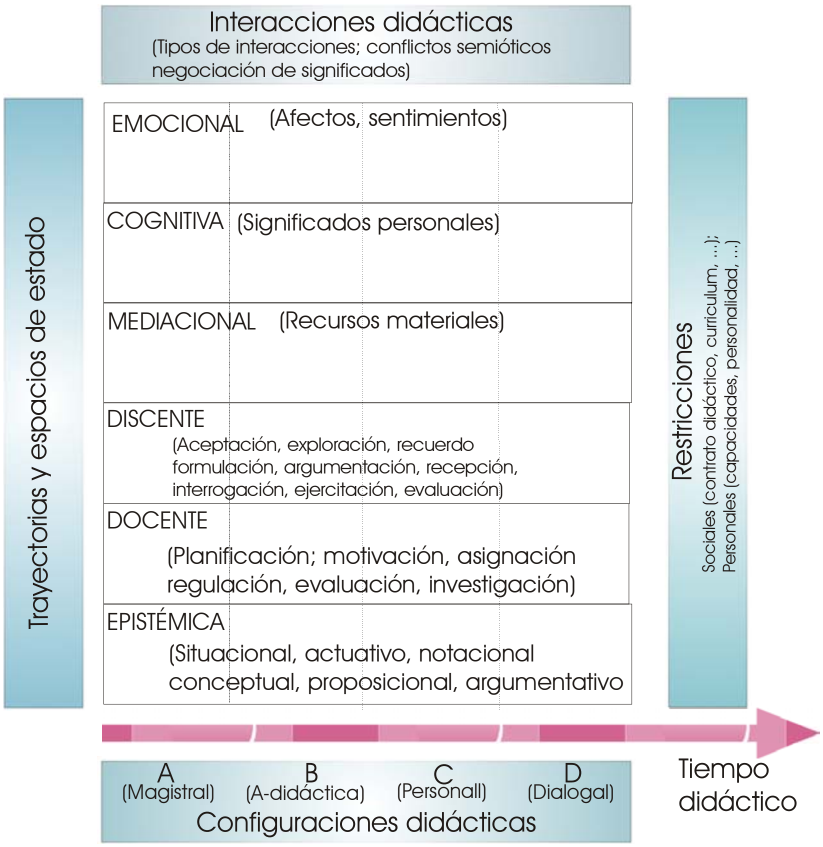

Figura 5.- Objetos e interacciones didácticas

El análisis que hemos realizado del ejemplo sobre "calculo de derivadas" ha permitido mostrar que la determinación de los significados institucionales finalmente implementados en una clase de matemáticas (que describimos aquí como una secuencia de configuraciones epistémicas) es el resultado de complejas interacciones entre las trayectorias docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional. Esto nos ayuda a tomar conciencia de que la cronogénesis de los conocimientos personales de los estudiantes (el aprendizaje) está condicionada por dichos significados implementados y la variedad de los factores que los determinan.

En nuestra clase sobre "cálculo de derivadas", los momentos de comunicación y validación han sido asumidos por el profesor, suprimiendo esos momentos de trabajo adidáctico por parte de los alumnos y cambiando radicalmente la significación personal de la actividad matemática. ¿Cuáles pueden ser las razones de nuestro profesor para suprimir esos momentos adidácticos?

Una respuesta bastante plausible la tenemos en la "presión curricular sobre el tiempo didáctico". El profesor está presionado por terminar el programa de estudio con el menor recorte posible de temas, máxime cuando sus alumnos deberán sufrir un examen de ingreso a la universidad al finalizar el bachillerato. La supresión de momentos adidácticos reduce además la complejidad epistémica del proceso. Si los alumnos presentan sus propias soluciones y argumentos el profesor tendrá que corregir los errores y explicaciones deficientes que posiblemente presentarán, lo que ampliará el programa en direcciones no previstas. Nuestro profesor prefiere evaluar las trayectorias cognitivas de manera genérica con preguntas colectivas y mediante la observación del trabajo de los alumnos en los momentos (no tan escasos en nuestra clase) de trabajo de exploración personal de los alumnos resolviendo ejercicios. Esa información le sirve para decidir sobre el desarrollo de la trayectoria epistémica. El profesor está convencido, además, que la enseñanza directa, la comunicación verbal, apoyada por la visión colectiva en la pizarra de las notaciones matemáticas, es efectiva, siempre que vaya acompañada por una recepción activa por parte de los alumnos. ¿Podemos asegurar que está equivocado cuando la casi totalidad de los conocimientos que aprendemos en nuestras vidas lo hacemos de esa manera?

Ausubel (2000) insiste y razona que el aprendizaje puede ser significativo aun cuando sea basado en la exposición verbal y la recepción. Como afirman Hache y Robert:

> “No se trata de caer en la ilusión de la transmisión directa de ideas entre el profesor y los alumnos, simplemente escuchando, sino de tener en cuenta los modos de comunicación del saber en los fenómenos de aprendizaje”. (Hache y Robert 1997, p. 111).

Más bien tendremos que aceptar que sirven para desarrollar unos significados personales no suficientemente ricos.

Una cuestión esencial para la instrucción matemática, que requiere nuevos desarrollos teóricos e investigaciones empíricas, es la caracterización de posibles trayectorias didácticas que optimizen el aprendizaje matemático. El abordaje de esta problemática tendría como consecuencia la elaboración de modelos prescriptivos, lo que requiere asumir explícitamente principios epistemológicos y axiológicos complementarios. Entre tales principios hemos propuesto cinco criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas que designamos como idoneidad epistémica (representatividad), cognitiva (proximidad), semiótica (negociación), mediacional (disponibilidad) y emocional (implicación).

Aceptando estos supuestos y fijado un objeto matemático y un medio instruccional, una trayectoria didáctica óptima debería tener en cuenta el doble carácter de las matemáticas como actividad y como producto. Por ello los alumnos deberían tener oportunidad de poner en práctica la actividad matemática, pero también de conocer y dominar los productos culturales matemáticos que otras personas han elaborado como resultado de su propia actividad. Además, el recuerdo e interpretación de reglas matemáticas ya asumidas forma parte de esa actividad matemática y resulta imprescindible para que pueda tener lugar.

Esto nos lleva a sugerir la complementariedad de los patrones de interacción de tipo A (magistral), basado en la "emisión-recepción" y los de tipo B "reinvención a-didáctica", tipo C (estudio personal) y tipo D (diálogo contextualizado), para cada componente de los contenidos matemáticos. Parece que el fomento del interés y la capacidad heurística por parte de los alumnos debe llevar a implementar, siempre que sea posible, un formato de tipo B (reinvención a-didáctica); pero siendo conscientes que la apropiación del significado institucional de referencia exigirá en algún momento un tipo de patrón de interacción emisión-recepción, e incluso un patrón conductista (ejercitación de ciertas técnicas básicas, cuyo objetivo es la rutinización).

Hemos razonado que la gestión de la dialéctica entre los distintos patrones de interacción deberá basarse en la negociación de los significados. De este modo el análisis semiótico se revela como un elemento crucial de los procesos de estudio de las matemáticas. Dicho análisis permitirá identificar los puntos críticos en que se deben negociar los significados entre los distintos actores que intervienen en el proceso educativo, aportar pautas para seleccionar las configuraciones didácticas y los patrones de interacción más apropiados y caracterizar los aprendizajes logrados.

REFERENCIAS

AUSUBEL D. P. (2000), *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognoscitiva*. Barcelona: Paidos, 2002.

BAUERSFELD H. (1988), Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Coony y D. Grows (Eds.), *Effective Mathematics Teaching* (p. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/Erlbaum.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'ensignement d l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2) 135-194.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et methods de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2) 39-115.

BROUSSEAU G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives aportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12 (1) 73-112.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 19 (2) 221-265.

COBB P. y BAUERSFELD H. (Eds.) (1995), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, N.J.:Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

GASCÓN J. (1998), Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 18 (1) 7-34.

GODINO J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 22 (2/3) 237-284.

GODINO J. D. y BATANERO C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14 (3) 325-355.

GODINO J. D. y LLINARES S. (2000), El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática,* 12 (1) 70-92.

HACHE C. y ROBERT A. (1997), Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait "fréquente" les mathématiques à ses eleves pendant la classe? *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17 (3) 103-150.

MARGOLINAS C. (1992), Éléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12 (1) 113-158.

MORIN E. (1990), *Science avec conscience*. Paris: Fayard.

MORIN E. (1994), *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona: Gedisa.

SCHNEIDER M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques à propos d'un enseignement *des* limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 21 (1.2) 7-56.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (2/3) 133-170.

VOIGT J. (1985), Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1) 69-118.

VOIGT J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 26: 275-298.

VYGOTSKY L. S, (1979), *El desarrollo de las funciones psicológicas superiores*, Barcelona: Grijalbo.

ANEXO 1

Transcripción de una sesión de clase sobre cálculo de derivadas en bachillerato

Curso: 3º de BUP (1er curso de Bachillerato). Una clase de 35 estudiantes. Pupitres individuales, dispuestos de manera contigua dos a dos, mirando a la pizarra.

La grabación comienza con la siguiente ecuación escrita en la pizarra. $e(t) = 3t^2 - t + 1$, *t = 1 seg.*

Se trata de la corrección de ejercicios propuestos el día anterior. El ejercicio pide calcular la velocidad de un móvil en t = 1 segundo, conocida la relación entre el espacio y el tiempo que viene dada por la función polinómica escrita.

Profesor:

1. De acuerdo, entonces derivamos la función espacio y vamos a hallar la función velocidad.
2. $e'(t)$ =6t-1, en el instante 1 seg., sustituimos la t por 1 y sale 5, que serán metros por segundo, la velocidad.
3. $e'(1)$ =6.1-1=5
4. ¿De acuerdo?

[1.10] (1 minuto y 10 segundos, tiempo desde el comienzo de la clase).

5. **Alumno**: Pero, D. José, ¿al derivar la ecuación qué es lo que hemos hecho?
6. Hemos aplicado la regla que hemos visto estos días.
7. La derivada de una suma es la suma de las derivadas de cada uno de los sumandos.
8. El primer sumando es una constante por la derivada de una potencial,
9. $(3t^2)' = 3.\ 2.t^{2-1} = 6t$

(Va indicando en la pizarra el desarrollo de los cálculos.)

10. La constante permanece, la derivada de t cuadrado 2, por t elevado a dos menos uno, la constante permanece, tres por dos seis, igual a 6t.
11. Eso seria el primer miembro.
12. El segundo, la derivada de t, 1, la derivada de una constante sumatoria, 0.

[2. 01]

13. Vas aplicando las reglas que hemos deducido estos días.
14. Luego me decías que había otro ejercicio que habéis tenido dificultad, que era,

(Toma una hoja de una mesa.)

15. Este, uno de ellos,
16. $y = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$
17. A ver, ¿cómo lo haríais?
18. ¿Quién va a tener dificultad en este?
19. A ver, (*refiriéndose a una alumna*), ¿cómo lo harías?
20. **Alumna**: Derivamos equis cuadrado mas 1 y después derivamos la raíz cuadrada de x, uno partido por dos raíz de equis.
21. Una de las reglas que vimos el viernes era:
22. La derivada de un producto de dos funciones ... ¿Qué se aplica?

(Varios alumnos responden apoyados en lo que va diciendo el profesor mientras va escribiendo en la pizarra.)

23. La derivada de la primera, por la segunda sin derivar, más la primera por la derivada de la segunda.
24. $(f.g)' = f'.g + f.g'$
25. Vamos a llamar a (x^2+1) , $f(x)$, y a raíz de x, $g(x)$,
26. y tenemos el producto de dos funciones.

[4.09]

27. Hemos llamado $f(x) = x^2+1$, y $g(x) = \sqrt{x}$, pues calcular $f'(x)$ y $g'(x)$.
28. Y luego aplicáis ...

(Señala la formula de la derivada del producto.)

29. Si no lo habéis hecho, hacedlo.
30. Parece que nadie lo ha hecho.
31. ¿Cómo se deriva x^2+1, y cómo se deriva $\sqrt{x}$?
32. Si no lo habéis estudiado este fin de semana, pues coger los apuntes si los tenéis, o el libro.
33. Despabilar con las derivadas, que ya veis que es fundamental que las hagáis.

[5.37]
33bis. (*Deja un tiempo para que los alumnos traten de resolver el ejercicio.)*
34. La derivada de $f(x)= x^2-1$, $f'(x) = 2x$, la constante sumatoria 0.
35. La derivada de g(x) = √x $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
36. Si no os acordáis lo ponéis de la forma *x* elevado a un medio, y es la función potencial.
37. Según este resultado, *y*' ¿a quien seria igual?
38. La derivada del primero por el segundo sin derivar más el primero (x^2+1) por la derivada del segundo:
39. $y' = (2x)\sqrt{x} + (x^2+1)\dfrac{2}{2\sqrt{x}}$
[6.21]
40. Ahora mismo lo vamos a dejar así, ya veremos el problema de simplificar.
41. Ahora vamos a aprender a derivar y luego veremos el tema de simplificar las derivadas.
[6.30]
42. ¿Y el siguiente qué? ¿No os ha salido?
43. (Se acerca a un alumno y ve en el libro el ejercicio en el que han tenido dificultad.)
44. Intentarlo ahora aplicando esto.
45. ¿Alguna duda más de los ejercicios del viernes?. No, ¿todo el mundo?, ¿seguro?
[7.03]
46. Pues vamos a seguir entonces deduciendo reglas para hallar de una forma más sencilla la derivada, sin tener siempre que aplicar el límite.
47. Vamos a tomar las funciones trigonométricas, vamos a ver qué pasa con el seno de *x* y el coseno de *x*.
48. Empezamos con el seno de *x*.
49. *y* = sen *x*
50. ¿Si queremos calcular la derivada de esta función, qué haríamos?
(Deja unos segundos, esperando que respondan.)
51. No os cortéis, ¡vamos, decidlo!
52. Aplicamos la definición.
53. ¿Cuál es la definición de derivada? ¿Cuál?
(Algunos alumnos van recitando al mismo tiempo que el profesor. Va leyendo la fórmula, mientras la escribe en la pizarra.)
54. $y' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h) - sen\,x}{h}$
55. Esa es la definición. Y nos saldrá, seno de x menos seno de *x*, cero, partido por cero, una indeterminación del tipo 0/0.
56. Vamos a resolverla.
57. ¿Cómo podríamos resolver esa indeterminación?
58. ¿A quién se le ocurre algo?
59. Habrá que hacer alguna transformación que ponga eso de otra forma. ¿Esto qué es?
(Deja unos instantes; señala el seno de la suma del numerador; una alumna dice algo inaudible.)
[8.57]
60. El seno de la suma de dos ángulos, ¿cómo era?
61. El seno de *x+h*, a qué seria igual.
(Espera a que los alumnos digan algo. Los alumnos no responden.)
62. Ya se os ha olvidado la trigonometría. Ya se han acabado los exámenes y ya se os ha olvidado todo.
(Algunos murmullos.)
63. Seno coseno, más seno coseno, ¿os acordáis?
(Escribe la formula en la pizarra.)
64. $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen\,x\cos h + senh\cos x - sen\,x}{h}$
Vamos a sacar factor común el seno de *x*,
(Escribe la nueva expresión, marcando con arcos el seno de x que hay que sacar factor común.)
65. $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen\,x(\cos h - 1) + senh\cos x}{h}$
66. Aquí han quedado dos sumandos.
67. Podemos calcular el límite de una suma como la suma de los límites.
68. Si miráis, porque estoy seguro que tampoco os vais a acordar, la tabla de infinitésimos equivalentes (señala en la pizarra a cos *h* – 1), que tenéis en vuestro libro, en la lección inmediatamente anterior.
(Va a hojear el libro.)
69. En la página 156, el coseno de un ángulo menos 1, cuando el ángulo tiende a cero. ¿a qué es igual?

1- cos x es equivalente a $x^2/2$, entonces

70. cos h-1 es equivalente a $-\dfrac{h^2}{2}$

71. ¿De acuerdo?

(Escribe en la pizarra.)

72. $$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{senx(-\frac{h^2}{2})}{h} + \frac{senh \cos x}{h} \right] = \cos x$$

73. Hemos logrado descomponer en dos sumando.
74. En este primer sumando podemos suprimir una h en el numerador y en el denominador.
75. Cuando h tiende a 0, 0 por lo que sea, 0.
76. Y este segundo sumando, ¿a qué tiende sen h/h cuando h tiene a 0?
77. Eso ya lo vimos, haciendo los tres triángulos, ¿os acordáis?
78. Eso tendía a 1.
79. ¿Qué va a quedar al final? Coseno de x.
80. O sea, que al final y' = cos x.
81. Cuando la función es seno, su derivada es el coseno.

(Recuadra en la pizarra, la función y = sen x, y la derivada, y' = cos x)

[13.09]