

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS¹

Juan D. Godino y Carmen Batanero ²

ABSTRACT

The concept of meaning, which is frequently used in an informal way in didactic research, is a central and controversial subject in philosophy, logic, semiotics and other sciences and technologies which are concerned in human cognition. The analysis of this concept from a didactical point of view could be useful to understand the relationship between the different theoretical frameworks in mathematics education and to throw a new light upon some research questions, particularly those referred to the assessment of knowledge. In this work, the aforementioned analysis is approached and a pragmatic theory of the meaning of mathematical objects is presented, in which a triple conditioning -institutional, personal and temporal- of the concept of meaning is established. The relationship between the proposed notion of meaning and those of conception and "rapport à l'objet" is also studied.

RESUMEN

La noción de significado, utilizada con frecuencia de modo informal en los estudios didácticos, es un tema central controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana. El análisis de esta noción desde un punto de vista didáctico puede ayudar a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones teóricas en esta disciplina y permitir estudiar bajo una nueva perspectiva las cuestiones de investigación, particularmente las referidas a la evaluación de los conocimientos. En este trabajo se aborda el mencionado análisis y se presenta una teoría pragmática del significado de los objetos matemáticos en la que se propone para el mismo un triple condicionamiento: institucional, personal y temporal. Se estudian, asimismo, las conexiones entre la noción de significado propuesta y las de concepción y relación al objeto.

RÉSUMÉ

La notion de signifié, utilisée fréquemment de manière informelle dans les études didactiques, est un thème central controversé en philosophie, logique, sémiotique et dans les autres sciences et technologies concernées par la cognition humaine. L'analyse de cette notion dans une perspective didactique peut aider à comprendre les relations entre différents cadres théoriques de cette discipline et permettre de formuler de nouvelles questions de recherche. Ceci nous paraît concerner tout particulièrement l'évaluation des connaissances. Dans le travail qui fait l'objet du présent article, on aborde cette question en développant une théorie pragmatique du signifié des objets mathématiques, théorie dans laquelle on propose pour ce dernier un triple conditionnement: personnel, institutionnel et temporel. On étudie également les connexions entre la notion proposée de signifié et celles de conception et de rapport à l'objet.

¹ *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, n° 3, pp. 325-355, 1994.

² Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino>

1. INTRODUCCIÓN

La Didáctica de las Matemáticas estudia los procesos de enseñanza/ aprendizaje de los saberes matemáticos - en los aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas - tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

El papel relevante que la idea de significado tiene, por tanto, para la Didáctica se pone de relieve por el uso que hacen de ella algunos autores interesados por el fundamento de esta disciplina. Así, Balacheff (1990) cita el significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática: "*Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas*" (p. 258). Como cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática menciona las siguientes:

- ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?
- ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia?
- ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

También Brousseau (1980) destaca como centrales las preguntas siguientes: "*¿cuáles son las componentes del significado que pueden deducirse del comportamiento matemático observado en el alumno?; ¿cuáles son las condiciones que conducen a la reproducción de la conducta, teniendo la misma significación, el mismo significado?*" (p. 132). Asimismo, Brousseau (1986) se pregunta si existe una "variedad didáctica" del concepto de sentido, desconocida en lingüística, psicología o en matemáticas.

Otra autora que considera como básica para la Didáctica de la Matemática la idea de significado es Sierpínska (1990), que, a su vez, la relaciona íntimamente con la comprensión: "*Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión*" (p. 27). "*La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos*" (p. 35).

Dummett (1991) relaciona, asimismo, el significado y la comprensión desde una perspectiva más general: "*una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de que una teoría del significado tiene que dar cuenta es aquello de que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje*" (p. 372).

Desde el punto de vista de la psicología cultural, el objetivo principal de la misma, según Bruner (1991), es el estudio de las reglas a las que recurren los seres humanos a la hora de crear significados en contextos culturales. "*El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado y los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los*

significados" (Bruner, 1990, p. 47).

A pesar del carácter relevante que la idea de significado tiene, no sólo para la Didáctica de la Matemática, sino para la psicología en general, no se encuentra en la literatura de la especialidad un análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas. Los investigadores en esta disciplina utilizan el término "significado" de un modo que podemos calificar de lenguaje ordinario, o sea, con un sentido intuitivo o pre-teórico.

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos.

La significación suele describirse (Lyon, 1980) como una relación ternaria, analizable en tres relaciones binarias, dos básicas y una derivada. La representación en forma de triángulo introducida por Ogden y Richards (1923) ilustra la problemática de la significación mediante el esquema de la Figura 1:

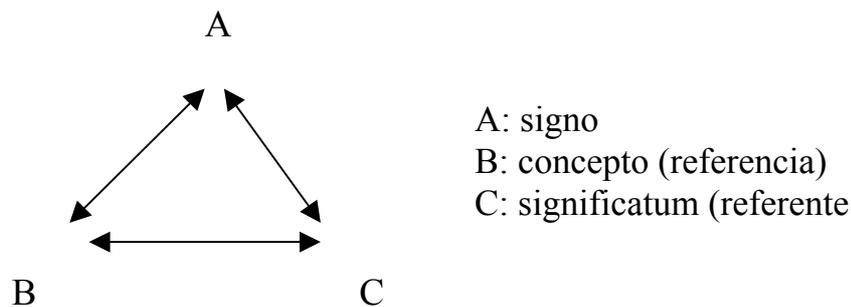


Figura 1

Este esquema indica que, en general, la relación entre un signo (A) y su referente (C) es indirecta, o sea mediatizada por un concepto (B). En nuestro caso A representa un término o expresión matemática, B el correspondiente objeto matemático (concepto, proposición, procedimiento, ...) y C el significatum (o referente) de dicho objeto.

La problemática del significado nos lleva a la compleja cuestión: ¿cuál es la naturaleza del significatum del concepto?, o más general, ¿cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?.

En matemáticas, los distintos tipos de definiciones que se utilizan (por abstracción, inducción completa, etc.) describen con precisión las notas características de sus objetos: un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos. Pero en el campo de la psicología cognitiva, interesada por los procesos de formación de los conceptos, ha adquirido una posición dominante una concepción según la cual, para describir la estructura interna de los conceptos, no existen atributos necesarios y suficientes que la determinen completamente. Como indica Pozo (1989), a partir fundamentalmente de la obra de E. Rosch, se ha impuesto la idea de que los conceptos están definidos de un modo difuso. Esta nos parece que es la posición adoptada por Vergnaud (1982, 1990) quien propone una definición de concepto, adaptada para los estudios

psicológicos y didácticos, en la cual incluye no solo las propiedades invariantes que dan sentido al concepto, sino también las situaciones y los significantes asociados al mismo.

Como consecuencia del análisis anterior consideramos justificado afirmar que el estudio teórico de la significación desde una perspectiva matemática, psicológica y didáctica, esto es, la formulación de una teoría explícita de los objetos matemáticos, puede ser útil para establecer conexiones entre distintas aproximaciones a las cuestiones de investigación en Didáctica de la Matemática.

En este trabajo analizamos esta problemática, propondremos un uso técnico y restringido de los términos "objeto" y "significado", incorporándolos en un esquema teórico, y estudiaremos algunas consecuencias de los mismos de cara al enunciado de cuestiones centrales para la Didáctica. Esperamos que las limitaciones inevitables de esta teorización sean disculpadas ya que como escribió Piaget (1979) *"ocurre que nunca pudo llegarse a un acuerdo acerca de lo que son realmente los "entes" matemáticos"* (p. 147).

Antes de exponer nuestra propuesta presentamos una síntesis de distintas aportaciones realizadas sobre la cuestión del significado, reconociendo de antemano su carácter limitado, dado que esta cuestión ha sido y es una constante en filosofía, lingüística, semiótica, psicología y demás ciencias y tecnologías interesadas por la cognición humana.

2. TEORIAS DEL SIGNIFICADO: REALISMO VERSUS PRAGMATISMO

De acuerdo con Kutschera (1979) las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las teorías realistas (o figurativas) conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; en consecuencia, suponen un realismo conceptual. *"Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática"* (Kutschera, 1979; p. 34). Una palabra se hace significativa por el hecho de que se le asigna un objeto, un concepto o una proposición como significado. De esta forma hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados.

La forma más simple de la semántica realista se presenta en los autores que atribuyen a las expresiones lingüísticas solo una función semántica, consistente en designar (en virtud de unas convenciones) ciertas entidades, por ejemplo:

- el significado de un nombre propio consiste en el objeto que se designa por dicho nombre;
- los predicados (por ejemplo, esto es rojo; A es más grande que B) designan propiedades o relaciones o, en general, atributos;
- las oraciones simples (sujeto - predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, Madrid es una ciudad)

En las teorías realistas (como las defendidas por Frege, Carnap, los escritos de Wittgenstein del *Tractatus* ...), por tanto, las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades (objetos, atributos, hechos). La función semántica de las expresiones consiste simplemente en esa relación convencional, designada como relación nominal.

En lo que respecta a la segunda categoría de teorías del significado, calificadas como pragmáticas, las dos ideas básicas son las siguientes:

- el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan;

- niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas - como conceptos o proposiciones-, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. Lo único accesible a la observación en estos casos, y por tanto, el punto de donde hay que partir en una investigación científica del lenguaje es el uso lingüístico. A partir de tal uso es como se debe inferir el significado de los objetos abstractos.

Una concepción pragmática del significado es abiertamente defendida por Wittgenstein en su obra *Investigaciones filosóficas*. En su formulación una palabra se hace significativa por el hecho de desempeñar una determinada función en un juego lingüístico, por el hecho de ser usada en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Para que una palabra resulte significativa, no es preciso, pues, que haya algo que sea el significado de esa palabra.

Para Wittgenstein no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje, cuyas estructuras tengan, por tanto, que regirse de acuerdo con las estructuras ontológicas, sino que el mundo se nos revela sólo en la descripción lingüística. Para este autor, hablar es ante todo una actividad humana que tiene lugar en contextos situacionales y accionales muy diversos y debe, por tanto, ser considerada y analizada en el plano de estos contextos. El lenguaje puede formar parte de diversas "formas de vida"; hay tantos modos distintos de empleo del lenguaje, tantos juegos lingüísticos, como contextos situacionales y accionales.

Desde el punto de vista epistemológico esta definición del significado *"es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje"* (Kutschera, 1979; pag. 148).

La aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la Matemática se corresponde con una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, ...). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente de la humanidad, en algún dominio ideal. El conocimiento matemático consiste en descubrir las relaciones preexistentes que conectan estos objetos.

Esta concepción implica, además, una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que éste es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo estos supuestos el significado del término "función", por ejemplo, sería simplemente el concepto de función, dado por su definición matemática.

A pesar de los distinguidos representantes de esta corriente, entre los que se cuentan Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hardy, Gödel, ..., han aparecido nuevas tendencias en la filosofía de las matemáticas que aportan críticas severas a la perspectiva absolutista y platónica de las matemáticas. Una síntesis de estas críticas y una visión de las matemáticas desde una perspectiva falible, basada en el convencionalismo de Wittgenstein y en el cuasi-empiricismo de Lakatos, podemos encontrarla en Ernest (1991).

Desde nuestro punto de vista, los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas (Ernest, 1991) llevan también a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y el que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

En las secciones siguientes vamos a precisar un sentido teórico para los términos de práctica, objeto y significado que se corresponden con los presupuestos pragmáticos de las teorías de significado. Asimismo, analizamos algunas implicaciones de esta teorización para la Didáctica de las Matemáticas.

3. PROBLEMAS MATEMATICOS, PRACTICAS E INSTITUCIONES

Introducción

Chevallard (1991) define un objeto matemático como *"un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito"* (pag. 8). Llama praxema a los *"objetos materiales ligados a las prácticas"* y usa esta noción para definir el objeto como un *"emergente de un sistema de praxemas"*.

Chevallard no se interesa por la noción de significado de un objeto, centrandó su atención, por el contrario, en una nueva noción teórica que denomina relación al objeto (*rapport à l'objet*) sobre la que apoya su teoría del conocimiento, o más bien, su antropología cognitiva en la que sitúa la didáctica. En este marco teórico *"un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como un existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto O existe para X (resp., para I) si existe un objeto, que represento por $R(X,O)$ (resp., $R(O)$) que llamo relación personal de X a O (resp., relación institucional de I a O)"* (Chevallard, 1992, pag. 9).

Desde nuestro punto de vista este trabajo representa una ruptura epistemológica dentro de los marcos teóricos usados en la didáctica, de profundas consecuencias en cuanto al enfoque y planteamiento de los problemas de investigación. Pero al mismo tiempo creemos necesario hacer un esfuerzo por clarificar las nociones introducidas por Chevallard, hacerlas operativas y poner de manifiesto las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente en la actualidad, como son, por ejemplo, las de concepción y significado.

En este sentido, consideramos necesario precisar las nociones de práctica y de objeto, así como proponer un uso técnico para la noción de significado que sea de utilidad en los estudios psicológicos y didácticos. Como pondremos de manifiesto, si a esta noción de significado se incorporan también los aspectos actitudinales y axiológicos ligados a las situaciones y objetos, puede ser considerada como una interpretación semántico pragmática de la noción de relación al objeto, entendida ésta como sistema de prácticas ligadas a un objeto.

La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva. Pero un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición humana, que quedan diluidos en la teorización de Chevallard, de los que en un enfoque sistémico de la Didáctica no se puede prescindir. La consideración explícita de este dominio nos lleva a diferenciar entre objeto institucional, base del conocimiento objetivo y objeto personal (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1990), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1982).

Por otra parte, creemos necesario destacar que las prácticas y los objetos que intervienen en ellas, y los que emergen de las mismas, así como las relaciones a estos objetos, están

organizados en torno de una finalidad: adoptar decisiones, actuar, resolver situaciones problemáticas o ciertas disposiciones del entorno. Por este motivo creemos necesario tomar como noción primitiva la de situación-problema.

El punto de partida de nuestra teorización es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, definimos los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Concepto de problema

Lester (1980) define un problema como *"una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución"* (pag. 287). A su vez, Simon (1978) describe que *"un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente"* (pag. 198).

Estos enunciados se refieren a problemas de cualquier índole. Nosotros estamos interesados por dilucidar las características de los problemas o situaciones de tipo matemático. En lo que sigue, para hacer más comprensible nuestro análisis, fijaremos la atención en un ejemplo: se refiere al campo de problemas y de actividades de las que emerge el objeto matemático designado con el término "media".

En ciertas situaciones necesitamos medir una cantidad X desconocida de una cierta magnitud. Pero debido a la imperfección de nuestros instrumentos, en mediciones sucesivas obtenemos distintos números como medidas de X. No tenemos ninguna razón para pensar que el verdadero valor esté más alejado de cualquiera de los números obtenidos. ¿Cómo determinar, a partir de un conjunto de medidas x_1, x_2, \dots, x_n la mejor estimación posible del verdadero valor X desconocido?

Este es un enunciado moderno, algo general y abstracto, de un problema - en realidad el campo de problemas de la estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida- que los astrónomos de Babilonia resolvieron calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos. Según Plackett (1970) esta misma técnica matemática - lo que hoy conocemos como media aritmética- fue aplicada de un modo general por Ptolomeo para estimar la cantidad por la cual la duración de un año excede de 365 días.

A partir de este ejemplo, podemos preguntarnos, ¿cuáles son las características de las situaciones y de las actuaciones de las personas que permitirían calificar los problemas y los métodos de solución como "matemáticos"? ¿Qué es lo característico de la actividad matemática?

Un primer aspecto que apreciamos es que en el enunciado de la cuestión y en el desempeño de las tareas correspondientes intervienen "objetos matemáticos" (números, operaciones, ...), representaciones simbólicas. Por ejemplo, actualmente usamos la expresión:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

También es característico de la actividad matemática extender las soluciones a otras situaciones, generalizarlas al caso de un número arbitrario de valores, incluso cuando la

variable es discreta con un número infinito de valores, o continua.

En la resolución de estos problemas matemáticos se precisa, por tanto, buscar dentro del campo de problemas lo esencial entre los distintos contextos, las relaciones con otras situaciones, problemas o procedimientos; es también característica la actividad de simbolizar, formular, validar, generalizar, ...; en definitiva, y como describe Freudenthal (1991), matematizar.

La noción de práctica que introducimos a continuación permite sintetizar las características de la actividad de matematización:

DEFINICION 1: Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales o abstractos, los cuales pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Como hemos indicado, Chevallard (1991) llama praxemas a estos objetos ligados a prácticas.

Las prácticas personales pueden ser actuaciones observables, esto es, manifestaciones empíricas, o también acciones interiorizadas no observables directamente. Esta noción general de práctica permite tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

El papel relevante de los sistemas de signos, dados por la cultura, como mediadores entre los estímulos del medio y las respuestas del sujeto es resaltado por Vygotskii (1934), quien presenta, asimismo, la actividad como elemento esencial de su teoría del aprendizaje. Estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores. El análisis semiótico de la actividad matemática realizado por Rotman (1988) apoya también la íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático: "*Los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades, pensar (imaginar acciones) y simbolizar (hacer marcas), las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial*" (pag. 32)

En el caso del problema de la estimación, una práctica habitual consiste en "sumar todas las valores de las mediciones y dividir por el número de sumandos". Aunque en cada problema concreto de estimación la magnitud de interés, el instrumento de medición, el número de medidas tomadas y los valores concretos obtenidos varían, la expresión anterior es aplicable a cualquiera de estas situaciones. Como vemos, lo que interesa, más que una práctica particular en un problema concreto dado, son los tipos de prácticas, esto es, los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas, no las muestras particulares de las mismas. Llamaremos a estos invariantes prácticas prototípicas. Generalmente, para cada campo de problemas y - en principio- para cada persona podemos asociar un sistema de prácticas prototípicas o características.

Prácticas significativas

El desarrollo de la actividad matemática, llevada a cabo por las personas comprometidas en la resolución de problemas, no consiste habitualmente en un proceso lineal y deductivo. Por el contrario, se manifiestan intentos fallidos, ensayos, errores y procedimientos infructuosos que se abandonan. Consideramos necesario introducir la noción de práctica significativa:

DEFINICION 2: Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

Las prácticas significativas conllevan una aptitud organizativa indicativa de una competencia, esto es, constituyen una praxis en el sentido de Morin (1977). Asimismo, el aspecto cognitivo de las prácticas prototípicas significativas se corresponde con la noción de "schème" empleada por Vergnaud (1990): "*organización invariante de la conducta para una misma clase de situaciones dadas*" (p. 136).

La figura 2 muestra la emergencia de una práctica prototípica significativa, la cual se destaca mediante un nombre en virtud de la función que desempeña.

PRACTICA PROTOTIPICA SIGNIFICATIVA

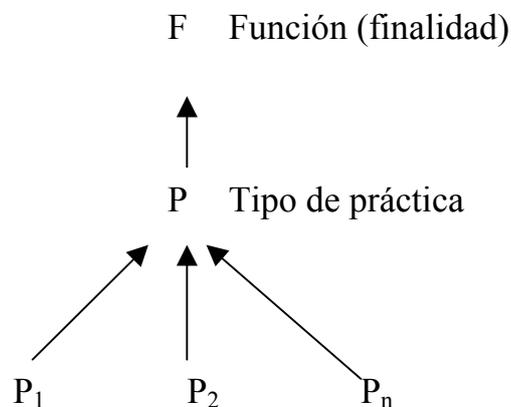


Figura 2

La noción de institución

Generalmente, las situaciones problemáticas y sus soluciones son socialmente compartidas, esto es, están vinculadas a instituciones. Proponemos la siguiente conceptualización para la noción de "institución" y de "sistema de prácticas sociales":

DEFINICION 3: Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Llamaremos institución matemática (M) a las personas que en el seno de la sociedad están comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos. Son, por tanto, los productores del "saber matemático". Otras instituciones (macro-instituciones) involucradas con "situaciones matemáticas" son los "utilizadores" del saber matemático (matemáticos aplicados) y los "enseñantes" del saber matemático (la escuela del saber matemático).

En el seno de las distintas instituciones se realizan ciertas prácticas apropiadas para el fin de lograr la solución del correspondiente campo de problemas. Interesa considerar el conjunto de tales prácticas desde una perspectiva sistémica, con el fin de indagar su estructura o principio organizativo.

DEFINICION 4: Sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas:

Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I.

Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas sociales citamos: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, ...

Representaremos a este sistema por la notación $P_I(C)$

4. OBJETOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES

La práctica descrita en el ejemplo de estimación de una cantidad desconocida afectada por errores de medición - sumar las diferentes observaciones y dividir por el número de datos- es el germen de lo que hoy conocemos como "media aritmética". Esta misma solución se ha encontrado efectiva por distintas personas a lo largo del tiempo en situaciones problemáticas como las siguientes:

(a) Cuando se necesita obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados x , cuya distribución es aproximadamente simétrica alrededor de un valor dado; en este caso se toma la media por sus propiedades de localización central, por ser "centro de gravedad" del espacio de valores muestrales o poblacionales. Un uso derivado de este sería la comparación de muestras o poblaciones, reducidas a sus respectivas medias (contraste de hipótesis sobre la media) del que derivan también el análisis de varianza y el diseño de experimentos.

(b) Cuando se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad en los procesos estocásticos de generación de muestras. En esta situación se toma la media de la variable en la población como predicción, como valor esperado, por sus propiedades muestrales derivadas del teorema central del límite. De aquí se derivan muchos modelos de predicción, como los distintos tipos de regresión.

(c) Cuando se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir para conseguir una distribución uniforme en poblaciones finitas.

Estos y otros problemas, primero prácticos más tarde teóricos, han llevado a progresivas generalizaciones del concepto. Así, por ejemplo, cuando se tiene una variable aleatoria X que interviene en situaciones discretas pero con un número ilimitado de valores x_i , los cuales ocurren con probabilidades p_i , se dice hoy que la media, o esperanza matemática de X , es la suma infinita siguiente (supuesto que converja):

$$E(X) = \sum x_i p_i = \mu$$

En el caso de una variable aleatoria continua, con función de densidad f , la media se define por: $E(X) = \int xf(x)dx$

Objeto institucional

El objeto matemático media se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. De acuerdo con Morin (1977), la noción de emergencia significa que los productos globales de las actividades que forman un sistema disponen de cualidades propias, las cuales retroactúan sobre las actividades mismas del

sistema del que se vuelven inseparables.

Las definiciones y enunciados constituyen manifestaciones lingüísticas que en la cultura matemática suelen tomarse como elementos que determinan esta clase de objetos, describiendo el procedimiento constructivo del mismo o sus propiedades características. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, hemos de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas, proponiendo la siguiente definición:

DEFINICION 5: Objeto institucional O_I :

Es un emergente del sistema de practicas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I .

Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado. El objeto institucional puede conceptualizarse también como signo de la unidad cultural constituida por $P_I(C)$. Los objetos institucionales son los constituyentes del conocimiento objetivo, considerado éste en el sentido descrito por Ernest (1991). Si la institución I es la institución matemática M , el objeto institucional recibirá el nombre de objeto matemático (pueden ser conceptos, proposiciones, teorías, ...)

Hay que destacar que de un campo de problemas pueden emerger diversos objetos que, como consecuencia, están mutuamente relacionados. Vergnaud (1990) resalta este hecho así como la variedad de situaciones problemáticas en que un mismo concepto es aplicado: "*Un concepto no toma su significado en un sólo tipo de situaciones y una situación no se analiza con ayuda de un sólo concepto*" (pág. 167). Esto le lleva a proponer como elemento de análisis didáctico la noción de campo conceptual. Por otro lado, los mismos objetos institucionalmente reconocidos son fuente de nuevos problemas y pueden ser usados como herramientas en la resolución de otros. (Dialéctica útil-objeto formulada por Douady, 1986).

Con nuestra definición de objeto institucional estamos postulando la existencia (cultural) de distintos objetos, según la institución de referencia, en situaciones donde la concepción absolutista de las matemáticas ve un único objeto. Nosotros hemos sido conducidos a esta formulación como consecuencia de los presupuestos pragmáticos que nos sirven de base, y la consideración de su utilidad para el análisis antropológico de los fenómenos cognitivos y didácticos. A una conclusión similar llega Rotman (1988), mediante su análisis semiótico de la actividad matemática, cuando afirma: "*El teorema de Euclides 'dado cualquier número primo podemos encontrar otro mayor' no es el mismo que el teorema moderno 'existen infinitos números primos' puesto que, aparte de otras consideraciones, la naturaleza de los numerales griegos hace altamente improbable que los matemáticos griegos pensarán en términos de una progresión infinita de números*" (pag. 33). En definitiva, para este autor, los números estudiados por los babilonios, los griegos, los romanos y por los matemáticos actuales nos parecen los mismos números, como consecuencia de un fenómeno de apropiación regresiva.

Objeto personal

El carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto y en la invención de nuevas ideas matemáticas. "*No sólo en sus aspectos prácticos, sino también en los teóricos, el conocimiento emerge de los problemas para ser resueltos y de las situaciones para ser dominadas. Es cierto en la historia de las*

ciencias y en la tecnología; también es cierto en el desarrollo de instrumentos cognitivos en los niños muy jóvenes" (Vergnaud, 1982, p. 31). Esto nos lleva a proponer, en el plano personal, la introducción de las nociones de "sistema de prácticas personales" y de "objeto personal":

DEFINICION 6: Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas:

Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C . Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$

DEFINICION 7: Objeto personal O_p :

Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$.

La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje. Estos objetos son los constituyentes del conocimiento subjetivo (Ernest, 1991).

5. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE UN OBJETO

Los objetos son nombrados y descritos mediante ciertas prácticas (intensivas) que suelen considerarse como definiciones del objeto (incluso se identifican con el objeto mediante un fenómeno metonímico). Vergnaud (1990) considera, sin embargo, que el significado de un objeto matemático, desde un punto de vista didáctico y psicológico, no puede quedar reducido a su mera definición: "*Un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza*" (p. 135). Este autor considera que "*son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo*" (p. 158).

Coincidimos con este autor en que el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos. Además, creemos que es preciso diferenciar una dimensión personal e institucional para este significado. Así, respecto al objeto media:

(1) En la "escuela elemental" encontramos que los currícula proponen:

- la definición, en el caso más simple, empleando una notación sencilla (se evita el sumatorio y la ponderación);
- algunos ejemplos de aplicación, limitados al cálculo manual o con calculadora del número obtenido como media de un conjunto de datos.
- discriminación respecto de otras medidas de tendencia central (mediana, moda).

(2) En la "escuela secundaria" (o en la universidad), como puede verse en los textos correspondientes, el rango de cosas que se dicen y hacen con la media se amplía al enunciado y demostración de algunas propiedades y a su aplicación a situaciones problemáticas más realistas y complejas. Así se introduce la noción de media o esperanza matemática de una distribución de probabilidad, se muestran algunas distribuciones de probabilidad, como la normal que tienen como uno de sus parámetros la media; se distingue entre media de la muestra y media de la población, etc.

(3) En la "vida diaria", en la cultura popular (medios de comunicación, relaciones sociales, ...), en el mundo empresarial, la evolución de la bolsa, precios, producción, empleo y otros indicadores económicos se mide a partir de números índice, en los que intervienen medias ponderadas. Los científicos emplean la media en el diseño de sus experimentos, como medida del efecto de sus tratamientos. Lo esencial en estas instituciones no son las propiedades matemáticas o definiciones de la media, sino que es su uso como herramienta de análisis y toma de decisiones en cierto tipo de situaciones problemáticas.

En estos ejemplos vemos que el término "media" es usado para referirse a unidades culturales (o institucionales) diferentes. Esto nos lleva a proponer la siguiente definición:

DEFINICION 8: Significado de un objeto institucional O_I :

Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado.

Se trata de un constructo relativo a la institución y dependiente estocásticamente del tiempo. Simbólicamente, para un tiempo t y una institución I :

$$S(O_I) = P_I(C)$$

Si $I=M$, hablaremos del significado matemático de un objeto.

Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional. El análisis semiótico de los objetos institucionales implica la consideración de las situaciones problemáticas y los objetos que intervienen en las actividades de resolución correspondientes.

Dimensión subjetiva del significado

En correspondencia con la noción de significado de un objeto institucional interesa introducir la noción de significado de un objeto personal O_p en los siguientes términos:

DEFINICION 9: Significado de un objeto personal O_p :

Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado.

Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente.

Simbólicamente, $S(O_p) = P_p(C)$

Una parte del significado es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituidas por acciones interiorizadas.

6. SIGNIFICADO Y COMPRESION

Una institución de una importancia particular para la didáctica es la clase de matemáticas. El profesor debe proporcionar al alumno un entorno de aprendizaje que tenga en cuenta las directrices curriculares, los libros de texto y materiales didácticos -que pueden ser considerados también como instituciones portadores de aspectos parciales del significado de los objetos correspondientes-. Ello se traduce en que, para un objeto matemático O_M , el

profesor realiza un proceso de selección de situaciones, notaciones, etc. que se traducirán en un significado restringido para O_M .

Dentro de esta institución (la clase de matemáticas) un aspecto particularmente importante es la evaluación del aprendizaje del alumno por parte del profesor en la que es preciso confrontar el significado que se trata de transmitir con el efectivamente adquirido. Esta situación queda descrita en la siguiente definición:

DEFINICION 10: Significado de un objeto O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I :

Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.

En consecuencia, de un mismo campo de problemas C que en una institución I ha dado lugar a un objeto O_I con significado $S(O_I)$, en una persona puede dar lugar a un objeto O_p con significado personal $S(O_p)$. La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es, lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto O desde el punto de vista de I . El resto de prácticas personales serían consideradas "erróneas", desde el punto de vista de la institución.

La figura 3 muestra la relación entre las distintas nociones teóricas introducidas, clasificadas en tres dominios: mundo real (las situaciones-problemas), el dominio antropológico (o de las prácticas personales e institucionales) y el cognitivo (de las emergencias o ideas).

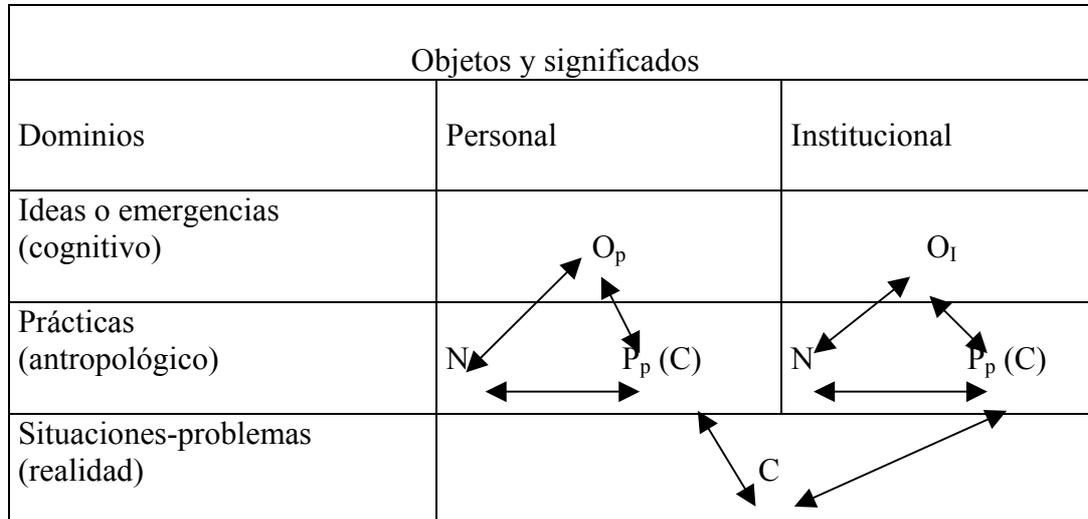


Figura 3

En una situación ideal, y en una institución dada, diríamos que un sujeto "comprende" el significado del objeto O_I -o que ha "captado el significado" de un concepto, por ejemplo- si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente. La comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. Coincidimos con Glasersfeld (1989) cuando afirma: "*El proceso de acomodación y ajuste del*

significado de las palabras y expresiones lingüísticas continua de hecho para cada uno de nosotros a lo largo de nuestras vidas. No importa durante cuanto tiempo hemos hablado una lengua, habrá aún la ocasión en que nos demos cuenta que, hasta cierto punto, hemos estado usando una palabra de tal modo que ahora resulta ser idiosincrásico en algún aspecto particular" (pág. 133).

El problema de la evaluación de los conocimientos

El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos, cuya importancia para la investigación y la práctica de la educación matemática puede apreciarse en el reciente "ICMI Study" dedicado al tema (Niss, 1993), es planteado por Wheeler (1993) desde su dimensión epistemológica. Si necesitamos evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes para una multiplicidad de fines, la primera cuestión que debe dilucidarse se refiere a la naturaleza del propio conocimiento. La razón que da este autor nos parece obvia: "*¿Cómo podemos evaluar lo que no conocemos?*" (pág. 87). Precisamente, una de las finalidades de la teoría que presentamos en este trabajo sobre el conocimiento matemático es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del mismo.

El sistema cognitivo del sujeto (su conocimiento conceptual y procedimental, sus intuiciones, representaciones, esquemas,...), esto es, según nuestra conceptualización, la red de objetos personales construida en un momento dado, es una totalidad organizada y compleja. La distinción realizada en nuestra teorización entre el dominio de las ideas u objetos abstractos (personales e institucionales) y el dominio de los significados o sistemas de prácticas de donde emergen tales objetos inobservables, permite plantear con nitidez el problema de la búsqueda de correspondencia entre ambos dominios, o sea, el problema de la evaluación de los conocimientos, tanto subjetivos como objetivos o institucionales.

La determinación de los conocimientos subjetivos precisa necesariamente de procesos de inferencia, a partir de los conjuntos de prácticas asociados observados en la situación de evaluación, cuya validez y fiabilidad hay que garantizar (empleamos aquí los términos de validez y fiabilidad en su acepción más amplia: ausencia de sesgo y precisión en los procesos de muestreo de situaciones, sujetos, tiempos y circunstancias inevitables en todo proceso de medición educacional y psicológica) (Messick, 1991; Feldt y Brennan, 1991). La complejidad de este proceso de inferencia se deduce del hecho de que no sólo existen interrelaciones entre los conocimientos referidos a diferentes objetos matemáticos, sino que, incluso para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional (conoce x por ciento), lo que hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas de maestría de dominio o del rasgo latente (Webb, 1992; Snow y Lohman, 1991).

Al reconocer esta complejidad queda patente el problema de la evaluación de los conocimientos. ¿Cuales son los criterios aplicables para la elección e interpretación del sistema de indicadores empíricos que debemos usar para caracterizar el estado cognitivo global (o parcial), o sea, el conocimiento de un sujeto sobre un objeto matemático reconocido como objeto de saber?. Aunque esta problemática, que podríamos denominar de la semiometría para diferenciarla de la problemática psicométrica, supone toda una nueva línea de investigación de tipo metodológico en los estudios didácticos, podemos apuntar al menos un primer criterio sobre la selección de las situaciones de evaluación.

El carácter observable de las prácticas sociales permite, mediante un estudio fenomenológico y epistemológico realizado adecuadamente, determinar, para un objeto dado, el campo de problemas asociado, así como los significados institucionales. El análisis de las

variables didácticas del campo de problemas proporciona un criterio para estructurar la población de las posibles tareas de las cuales debe extraerse una muestra representativa, si se quiere garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación. Estos dos elementos proporcionarán unos primeros puntos de referencia a tener en cuenta para diseñar las situaciones de evaluación pertinentes para la evaluación de los conocimientos subjetivos.

7. LAS NOCIONES DE OBJETO MATEMATICO Y SIGNIFICADO EN OTROS AUTORES

La atribución hecha anteriormente de significación (o sentido) a una práctica si desempeña una función en una situación problemática se corresponde con la conceptualización presentada por Eco (1991) para un sistema de significación. Asimismo, supone una semiótica pragmática según la cual el significado de una expresión viene dado por el uso o función que esa expresión tiene en el correspondiente juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953).

Steinbring (1991) reconoce la complejidad de la estructura conceptual y establece su íntima conexión "implícita y axiomática" con las situaciones y las representaciones, dentro de lo que denomina triángulo epistemológico, constituido por el objeto, el signo y el concepto. Reconoce, asimismo, el papel de la actividad del sujeto para guiar y desarrollar las relaciones entre los elementos del mencionado triángulo. Este autor no propone una definición de significado de un concepto, pero sí introduce la idea de significado intencional de los signos matemáticos y de las situaciones de referencia: *"El signo en sí mismo no tiene significado matemático, sólo en su intención para algún contexto; y los elementos del nivel objeto sólo proporcionan significado matemático en la intención de mostrar una estructura relacional oculta en la situación de referencia. Los signos matemáticos y los aspectos de las situaciones de referencia deben ser dotados de significado por intención para llegar a ser elementos del triángulo epistemológico"* (pág. 85).

Desde nuestro punto de vista, esta noción de significado intencional de los signos y objetos podemos relacionarlo estrechamente con nuestra noción de práctica significativa, en la cual se reconoce una finalidad (diríamos también una función o intencionalidad) para la resolución de los problemas o situaciones.

La consideración de la noción de significado como una entidad compuesta no es nueva. Putnam (1991) presenta el significado como un "vector" o sucesión finita de componentes entre los cuales destaca:

"(1) los marcadores sintácticos que se aplican a las palabras, como "nombre";

(2) los marcadores semánticos que se aplican a la palabra, como "animal", "período de tiempo";

(3) una descripción de los rasgos adicionales del estereotipo, si lo hubiere;

(4) una descripción de la extensión.

Parte de esta propuesta consiste en la siguiente convención: "los componentes del vector representan todos ellos, excepto la extensión, una hipótesis acerca de la competencia del hablante individual" (pág. 191).

Bunge (1985) define la significación de un concepto por medio de un par constituido por la intensión y extensión:

$\text{Sig}(C) = \langle I, E \rangle$, donde,

C: Un concepto;

Sig (C): El significado del concepto;

I: intensión, las notas esenciales que caracterizan el concepto;

E: extensión, conjunto de objetos a los cuales se aplica o refiere el concepto.

Al conjunto de notas inequívocas de un concepto lo llama Bunge (1985) núcleo intensional. Aunque lo considera insuficiente para caracterizarlo completamente, el núcleo intensional proporciona una definición de trabajo del concepto.

Nuestra distinción entre significado personal e institucional se corresponde con la realizada por Ausubel y cols (1983), quienes distinguen entre significado psicológico y significado lógico, aunque conceptualizados de manera diferente. Para Ausubel y cols un material de enseñanza posee significado lógico (o potencial) si sus elementos están organizados, no sólo yuxtapuestos, de tal forma que las distintas partes de la estructura se relacionan entre sí de modo no arbitrario. Desde el punto de vista del sujeto se produce un aprendizaje significativo "*si la tarea de aprendizaje puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra), con lo que el alumno ya sabe*" (pág. 37). Estos autores conciben el contenido como una red de conceptos y proposiciones lógicamente organizados; pero respecto a la estructura interna de los conceptos adoptan una concepción clásica según la cual un concepto está constituido por una serie de atributos necesarios y suficientes, de tal modo que todos los ejemplos del concepto tienen unos atributos y ningún no-ejemplo del concepto posee esos atributos.

Para nosotros el establecimiento de relaciones entre los distintos objetos, tanto a nivel personal como institucional, es una parte esencial de los sistemas de prácticas de los que emergen los objetos, pero no agotan todos los aspectos relevantes involucrados en tales sistemas y, por tanto, en el significado.

La formulación que presentamos de la noción de objeto y significado personal es compatible con la expuesta por Vergnaud (1990): "*El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición*" (p. 158).

Vergnaud (1982), presenta una noción de concepto matemático que puede ser interpretada en términos semánticos. Este autor define un concepto como una tripleta (S, I, z) en la cual cada símbolo representa lo siguiente:

S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;

I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;

z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (pág. 36).

En el trabajo de 1990, Vergnaud describe a S como la referencia (del concepto); I el significado ("*el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas*"); z, el significante (conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento).

Para nosotros el concepto es un emergente (una idea) de este sistema de "prácticas" realizadas por alguien (o en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones problemáticas, tareas o disposiciones del entorno. Los distintos elementos constituyentes del concepto, en el sentido descrito por Vergnaud, dan lugar para nosotros a distintos tipos de prácticas significativas.

En la definición de la noción de significado de un concepto que hemos propuesto intervienen los tres elementos de la tripleta que propone Vergnaud como definición de un

concepto. Coincidimos con este autor al explicitar que las situaciones y representaciones están íntimamente asociadas con la actividad de la que emergen los objetos matemáticos culturalmente definidos, esto es, consideramos necesario destacar la relación dialéctica entre la actividad (la praxis) y el concepto. En nuestra definición se encuentran presentes los elementos destacados por Vergnaud pero organizados de un modo específico, dando lugar al ente teórico que denominamos significado del objeto correspondiente. El concepto sería el emergente de este sistema de prácticas. El componente I de la tripleta conceptual de Vergnaud consideramos que describe adecuadamente el núcleo intensional del significado del concepto (Bunge, 1985), y lo podemos denominar significado en sentido estricto, pero aunque proporciona una definición operativa del concepto no agota toda la significación del mismo.

También Douady (1991) atribuye a los conceptos matemáticos un carácter no unitario, identificando dos polos o dimensiones principales de los mismos: el aspecto objeto (cultural, impersonal e intemporal), plasmado en definiciones y propiedades características y el aspecto útil o herramienta para resolver problemas por alguien en un momento dado. Por otra parte considera que el *"significado de un concepto se deriva del contexto en que está implicado. Por tanto, es el estatuto como útil lo que entra en juego. También se deriva de las relaciones desarrolladas en el contexto con otros conceptos en el mismo dominio matemático o no"* (pág. 116). Se ve en esta cita que Douady comparte una noción pragmática del significado pero no llega a proponer una conceptualización del mismo. Tampoco queda patente una formulación clara de la génesis de los conceptos.

En nuestra definición de significado de un objeto incorporamos en un todo dialéctico tanto el objeto (fijado intensivamente) como su uso en situaciones problemáticas características, así como las representaciones simbólicas asociadas al mismo, las cuales intervienen también en la actividad de resolución. Habitualmente estos usos extensivos de los objetos son considerados como las aplicaciones de los mismos, algo independiente del objeto al que no aporta nada nuevo; éste tiene en germen toda la colección de aplicaciones posibles. Esta perspectiva impide comprender la dinámica de la formación y evolución de los conceptos, tanto culturalmente como mentalmente.

Respecto a las nociones de práctica y objeto descritas por Chevallard (1991), consideramos que nuestro trabajo precisa estas nociones, ya que en el trabajo citado de Chevallard no se especifica una institución de referencia en la cual tienen lugar las prácticas (en distintas instituciones se realizan prácticas distintas, lo que dará lugar a objetos distintos) y, además, no cualquier práctica es pertinente a la emergencia de los objetos (algunas prácticas son incorrectas, inapropiadas o irrelevantes).

La noción de praxema nos parece un objeto teórico de gran interés ya que supone desvelar un nivel de análisis más elemental de la idea de uso o práctica social: en una práctica intervienen personas que manipulan física o mentalmente objetos de diversa naturaleza (verbal, gráfica, gestual, material) en el curso de una actividad (en nuestro caso actividad de matematización). Este concepto de praxema permite atraer la atención hacia las circunstancias contextuales (institucionales), de las manifestaciones lingüísticas o gestuales, que deben ser tenidas en cuenta para identificar la significación pragmática de dichas manifestaciones. No obstante, nosotros consideramos que la noción de praxema debería conceptualizarse como cualquier fragmento de una práctica con significación propia.

Desde nuestro punto de vista, interesados por explicitar una noción operativa de significado de un objeto matemático, encontramos de interés distinguir entre el nombre de un objeto, el objeto (como una entidad cultural) y el sistema de prácticas sociales ligadas a la resolución de problemas del que emerge esa unidad cultural, al cual consideramos como significado del objeto. Se produce aquí una semiótica connotativa en el sentido descrito por Eco (1991): el término "función", por ejemplo, denota la idea de función, y ésta a su vez

connota el sistema de usos.

8. SIGNIFICADOS Y CONCEPCIONES

El aprendizaje puede concebirse como el proceso de construcción y adquisición de redes conceptuales viables mediante el ajuste progresivo de la estructura cognitiva del sujeto (en correspondencia con los significados personales) a la estructura de los significados institucionales. No se realiza para un objeto aislado sino para una población creciente de nociones progresivamente más abstractas y mutuamente imbricadas.

Debido a que no es posible presentar simultáneamente toda esta red conceptual, en ocasiones, el alumno atribuye connotaciones y simbolizaciones no adecuadas a los constructos matemáticos, o los aplica de modo no pertinente.

El término concepción se aplica en el lenguaje ordinario para referirse a la idea general que tiene una persona en su mente cuando piensa sobre algo. Recientemente ha sido introducida en los estudios psicológicos y didácticos con un sentido técnico más preciso (Artigue, 1990); Confrey, 1989). Dado que presenta unos rasgos característicos que se relacionan con nuestra noción de objeto y significado realizaremos un breve estudio comparativo.

Según Artigue (1990) la noción de concepción responde a dos necesidades distintas:

"- Poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que le son asociados, poner en evidencia su adaptación mas o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas.

- Ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica transmitida por los modelos empiristas del aprendizaje, permitiéndole diferenciar el saber que la enseñanza quiere transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno" (pág. 265)

En la descripción que hace esta autora se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistemológico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular). Así Artigue (1990) habla de: *"un conjunto de concepciones es definido a priori con referencia a once definiciones distintas de círculo" (pág. 268);* y también se habla de *"las concepciones del sujeto sobre el concepto de ... (círculo, tangente, límite, etc.)"*.

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

a) la concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado en relación a un objeto. Esta conceptualización es la que hace Vergnaud (1982) y es la que también proporciona Confrey (1989): *"el sistema global de conocimientos y creencias del sujeto"* en relación a un objeto.

b) la concepción como un objeto local, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Desde nuestro punto de vista, la noción de concepción, en cualquiera de sus dos acepciones (epistemológica y cognitiva) tiene un carácter global. Lo que es local es la parte investigada o evaluada con situaciones específicas en una investigación particular.

La conceptualización epistemológica de la noción de concepción puede ser asimilada a la

idea de un emergente de ciertos subsistemas de prácticas sociales asociadas a subcampos de problemas de un campo dado, esto es, se corresponde con lo que hemos denominado objeto institucional O_I . El análisis de las definiciones del concepto de círculo o de tangente realizado por Artigue (1990), por ejemplo, sería una aportación para la caracterización parcial de la estructura del ente teórico que nosotros denominamos significado del objeto matemático designado por el término "tangente": cada definición aporta aspectos diferenciales, bien en las representaciones utilizadas o en la eficacia relativa para la resolución de problemas progresivamente más generales y abstractos. Definen, por tanto, significados parciales del objeto matemático tangente.

El punto de vista cognitivo global de la concepción podemos relacionarlo con el constructo objeto personal O_p , así como los de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1990) corresponderían a aspectos locales de las concepciones del sujeto.

La idea de concepción sobre un objeto y de relación al objeto, tanto personal como institucional, parten de un dato previo cuya existencia, naturaleza y estructura interna no se analiza ni cuestiona: el objeto. Presentan, en consecuencia, desde nuestro punto de vista, una debilidad a la hora de investigar los procesos de formación de tales concepciones o relaciones. Además, no tratan el problema de su evaluación y de la validez de las inferencias que se deben realizar a partir de las manifestaciones empíricas. No entran en la distinción entre constructo inobservable y el sistema de indicadores correspondientes.

Para la investigación didáctica el constructo teórico primario que proponemos es el de "sistema de prácticas sociales" asociadas a un campo de problemas, $P_i(C)$, que dado su carácter social, son compartidas en el seno de I y, por tanto, observables. De este sistema emerge el objeto O_I cuyo significado no es otra entidad que el propio sistema de prácticas del que emerge y que constituye al mismo tiempo su sistema de indicadores empíricos.

El análisis fenomenológico, semiótico y antropológico permitirá determinar la estructura de $S(O_I)$, lo que constituirá el punto de referencia para estudiar la génesis y desarrollo de los significados personales $S(O_p)$, para los sujetos p de I , al menos en la parte observable de estos significados.

9. TRANSPOSICION DIDACTICA, SIGNIFICADO Y ECOLOGIA CONCEPTUAL

Chevallard (1985) ha introducido el término transposición didáctica para referirse al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. La transposición se manifiesta en la diferencia existente entre el funcionamiento académico (a nivel de investigación, como "saber sabio") de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo.

Esta noción puede ser interpretada en términos de diferencias en el significado de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y las instituciones escolares. Por diversas causas los usos y connotaciones de las nociones matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente restringidos. El problema didáctico se presenta cuando, en forma innecesaria, el muestreo realizado sobre los componentes del significado tiene un carácter sesgado o se añaden prácticas inadecuadas, presentando, no un significado limitado del concepto (lo cual es inevitable), sino otro incorrecto o irrelevante (por ejemplo, cuando ocurre un deslizamiento metadidáctico).

En la construcción del currículo se opera ya una primera etapa del proceso de muestreo inevitable que transforma el significado de los objetos matemáticos. La selección de unos saberes a enseñar en los distintos niveles y grupos de alumnos, supone un fraccionamiento y secuenciación del saber que impone severas restricciones en el significado del mismo.

Además, al proponer ciertos patrones de uso, ciertas connotaciones y notaciones para los constructos matemáticos, excluyendo otros posibles, se está condicionando el entorno de significación de los mismos que se ofrece al alumno.

La investigación didáctica debe aportar conocimientos sobre cómo llevar a cabo esta selección muestral de un modo racional, teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el tiempo y los restantes elementos del proceso didáctico. Se debe aportar conocimiento sobre los sesgos conceptuales y vacíos de significación que necesariamente se producirán en las relaciones personales de los alumnos a las matemáticas como consecuencia de las distintas opciones de desarrollo curricular.

Los currículos y los libros de texto presentan siempre muestras del significado de los conocimientos matemáticos, con frecuencia no representativas y a veces con sesgos difíciles de eliminar. El análisis del entorno de significación que se le ofrece al alumno en la clase de matemáticas se revela como esencial para interpretar correctamente las respuestas de éste.

La transposición didáctica puede ser interpretada en términos más generales dentro del marco de la ecología conceptual (Toulmin, 1972), o la ecología de las ideas (Morin, 1992; Godino, 1993), esto es, como el estudio de las condiciones socioculturales e históricas que determinan la formación y los distintos modos de existencia de los significados institucionales y de sus mutuas interdependencias.

10. ALGUNAS CUESTIONES PARA LA INVESTIGACION DIDACTICA

La consideración del significado de los objetos matemáticos como sistemas y la distinción entre distintos tipos de significados (personal e institucional), implica la introducción en la problemática didáctica del estudio de la estructura y caracterización de esta clase de entidades teóricas. Permite, asimismo, poner de manifiesto el carácter muestral del proceso de selección de situaciones de enseñanza y evaluación, así como de las manifestaciones o comportamientos de los alumnos, ayudando a superar la ilusión de transparencia determinista que con frecuencia se adopta al considerar estos problemas.

Describimos, a continuación, algunas cuestiones de investigación más específicas formuladas de acuerdo a la teoría del objeto y significado desarrollada.

a) Una clase de estudios primarios en Didáctica deben orientarse a determinar o caracterizar los significados institucionales, especialmente el significado en la institución matemática; es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas, las situaciones problemáticas fundamentales que incorporan las notas esenciales de las nociones, las notaciones que podríamos llamar canónicas. Este análisis debe abarcar los aspectos epistemológicos y fenomenológicos de los mismos.

Una vez caracterizado el significado de referencia estaremos en condiciones de comprender las características del significado en las restantes instituciones de enseñanza y tratar de estudiar los factores condicionantes que operan en su constitución y desarrollo.

La problemática de estudio de los significados institucionales para los objetos matemáticos podría modelizarse con la metáfora ecológica (introducida por Chevallard (1989) en la Didáctica): un objeto particular desempeña una función en distintas clases de instituciones e interesa determinar las condiciones necesarias y/o suficientes para que desempeñe su papel en cada una de ellas. Las nociones de objeto y significado institucionales pretenden servir de instrumento conceptual para este análisis ecológico y semiótico de las ideas matemáticas cuyo locus (o realidad) debemos situar en la cultura como hace White (1983).

b) Respecto a los significados de los objetos personales, esto es, los relativos a profesores y alumnos, es necesario desarrollar procedimientos de diagnóstico que permitan, en un momento dado, conocer el significado personal construido para el objeto o campo conceptual correspondiente.

A pesar de la aparente simplicidad de este tipo de investigación, un problema fundamental es que la población de posibles situaciones (ítems o reactivos) empleados en el diagnóstico, para un concepto dado, es potencialmente infinita. Será necesario determinar las variables que determinan la estructura de dicha población, con objeto de obtener una muestra representativa de la misma, que evite el sesgo o invalidez en la determinación de los significados personales. Además hay que tener en cuenta el carácter interiorizado de una parte de las prácticas personales, lo que plantea el problema de la correspondencia de éstas con sus manifestaciones externas.

Esta clase de estudios a) y b) podríamos decir que constituirían una *estática de significados*, tanto institucionales como personales, y su objetivo sería determinar las *variables de estado y de control* de dichos sistemas en momentos particulares.

c) Los procesos de enseñanza se dirigen a determinar secuencias óptimas de situaciones para presentar, en el tiempo y con los medios disponibles, una muestra representativa de los componentes del significado de los objetos matemáticos.

Metafóricamente, el estudio de los procesos de enseñanza/ aprendizaje en la clase de matemáticas puede decirse que corresponde al estudio de los efectos sobre los significados personales de "choques" de secuencias didácticas portadoras de elementos de significación.

La captación del significado por el alumno, el aprendizaje comprensivo (relacional o significativo), puede modelizarse como una secuencia de actos de comprensión, actos de superación de obstáculos (Sierpiska, 1990). La caracterización de dichos actos, y la identificación de mecanismos productores de obstáculos (Artigue, 1990), es una temática central dentro de lo que podemos denominar *dinámica del significado personal de los objetos matemáticos*.

d) El estudio de los cambios que el significado institucional de referencia de los objetos matemáticos sufre para convertirse en significado a enseñar, a través de distintas instituciones de enseñanza (diseños curriculares, autores de textos, ...) constituye lo que podríamos llamar *dinámica de los significados institucionales* (transposición didáctica, ecología conceptual).

Finalmente, resaltamos que la conceptualización expuesta en este trabajo sobre los objetos matemáticos y su significado debe corresponderse con una teoría instruccional, esto es, una teoría del aprendizaje organizado de los conceptos científicos, que integre las teorías cognitivas de tipo asociacionista (Pozo, 1989) y las del aprendizaje por reestructuración. En este sentido la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), complementada con la Dialéctica útil-objeto de Douady (1986), nos parecen aportaciones de indudable relevancia, que podrían ser estudiadas desde el punto de vista de la teorización aquí presentada, con el fin de establecer el grado de coherencia entre nuestras ideas y las de los autores citados.

11. SÍNTESIS Y EVALUACIÓN DE NUESTRO MODELO

El modelo teórico presentado adopta la noción de situación-problema como idea primitiva. La variación sistemática de las variables que intervienen en las situaciones-problema da lugar a diferentes campos de problemas e instituciones. La génesis del conocimiento personal se produce como consecuencia de la interacción del sujeto con el campo de problemas, mediatizada por los contextos institucionales.

Proponemos también dos unidades primarias de análisis para estudiar los procesos cognitivos y didácticos: la *práctica significativa*, y el *significado de un objeto*. Para ambas unidades postulamos la distinción entre dos dimensiones interdependientes: personal e institucional.

Así pues, la práctica significativa, considerada como una *forma expresiva situada*, implica una situación-problema, un contexto institucional, una persona y los instrumentos semióticos que mediatizan la acción. Esta noción se utiliza para conceptualizar los objetos matemáticos.

La noción de significado de un objeto propuesta nos permite derivar una noción de comprensión que tiene en cuenta los procesos institucionales y contextuales implicados. De este modo, la comprensión no se reduce a un acto puramente mental.

La utilidad práctica de un modelo teórico como el propuesto no puede mostrarse mediante un ejemplo. Por el contrario, sería necesario implementar un plan coordinado de investigaciones, en el cual aún estamos comprometidos. No obstante, podemos identificar algunas consecuencias de nuestro modelo, que consideramos de interés para la orientación general de la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

1. De este sistema teórico se puede deducir que la investigación didáctica debería centrar la atención de modo preferente en el estudio de las relaciones complejas entre los significados institucionales de los objetos matemáticos y los significados personales construidos por los sujetos. Esto debería ser así porque los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en el seno de diversas instituciones en las cuales el conocimiento matemático adopta significados específicos, y estos significados condicionan dichos procesos. Sin duda existen procesos mentales que condicionan el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, el centro de atención de la investigación didáctica no debería ser las mentes de los estudiantes, sino los contextos culturales e institucionales en que tiene lugar la enseñanza.
2. La naturaleza sistémica del constructo que hemos llamado *significado de un objeto* (conceptos, proposiciones, teorías) nos permite orientar el proceso de selección muestral de las situaciones de enseñanza y evaluación: Los significados institucionales pueden desempeñar el papel de universo de referencia para estos procesos muestrales. Además, los componentes que hemos incorporado en las prácticas significativas, y las categorías sugeridas de tales prácticas, nos permiten centrar la atención sobre la dialéctica objeto-situación e institución-herramientas mediadoras en el estudio de los procesos cognitivos y didácticos.
3. La distinción entre las dimensiones personal e institucional, tanto para los objetos como para los significados, nos permite articular las facetas epistemológicas, sociológicas y psicológicas en los procesos de cognición humana, y, por tanto, en los procesos de educación matemática. Una parte importante de la problemática de la investigación didáctica se puede formular mediante dos ideas básicas: '*semiometría*', esto es, la caracterización de los significados personales e institucionales, y la '*ecología de los significados*', o sea, el estudio de las relaciones entre ambos significados.
4. El sistema teórico pretende articular diferentes aproximaciones cognitivas y epistemológicas mediante la construcción de un vínculo ontosemántico que podría ser compartido por las mismas. Entre estas aproximaciones podemos citar: constructivismo social, teoría de la actividad, cognición situada, etnomatemática, antropología cognitiva y didáctica, teoría de situaciones didácticas, etc. Sin embargo, el nivel de acuerdo y complementariedad entre estas teorías y nuestro modelo requerirá estudios más profundos en el futuro.

En síntesis, la principal utilidad de la teoría ontosemántica esbozada y el relativismo socio-epistémico postulado, incluso para el conocimiento matemático, se basa en su potencial para integrar diferentes teorías. Además, consideramos que proporciona un marco para formular o para reorientar algunas cuestiones de investigación en didáctica de las matemáticas.

REFERENCIAS

- ARTIGUE M. (1990), Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, nº 2,3, pp. 241-286.
- AUSUBEL D. P.; NOVAK J.D. y HANESIAN, H. (1983), *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Mexico, Trillas.
- BALACHEFF N. (1990), Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, (4), p. 259-272.
- BRUNER J. (1990), *Actos de significado. Mas allá de la revolución cognitiva*. Madrid, Alianza. Col. Psicología Minor, 1991.
- BROUSSEAU G. (1980), Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 1 p.
- BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.
- BUNGE M. (1985), *La investigación científica*. Madrid, Ariel.
- CHEVALLARD Y. (1989), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, n.1 pp. 73-112.
- CONFREY J. (1990), A review of research on students conceptions in mathematics, science and programming. *Review of Research in Education*, v. 16, pp. 3-55.
- GODINO J.D. (1993), La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, Vol 2, nº 2, pp. 69-79 (Revista Teórica e de Investigaçao; Associação de Professores de Matemática, Lisboa).
- DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n 2, pp. 5-31.
- DOUADY R. (1991), Tool, object, setting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics. *En: A. J. Bishop & S. Melling Olsen (Eds). Mathematical knowledge: its growth through teaching*, pp. 100-130. Dordrecht, Kluwer A. P.
- DUMMETT M.A.E. (1991), ¿Qué es una teoría del significado?. *En: L.M. Valdés (Ed.), La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos. [original en inglés publicado en 1975]
- FELDT L. S. y BRENNAN R. L. (1991), Reliability. *En: R. L. Linn (Ed.) Educational measurement (Third ed.)*, pp. 263-331). New York, American Council on Education and

Macmillan Publ.

- FREUDENTHAL H. (1991), *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Kluwer AC.
- ECO U. (1991), *Tratado de semiótica general*. Barcelona, Lumen. (1a ed. 1977).
- ERNEST P. (1991), *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Press.
- GLASERSFELD E. von (1989), Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese* 80: 121-140.
- KUTSCHERA F. von (1979), *Filosofía del lenguaje*. Madrid, Gredos.
- LESTER F.K. (1980), Research on mathematical problem solving. *En*: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.
- LYONS J. (1989), *Semántica*. Barcelona, Teide. (orig. inglés, 1977).
- MORIN E. (1986). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid, Cátedra (orig. fr. 1977; Editions du Seuil).
- MESSICK S. (1991), Validity. *En*: R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.), pp. 13-104). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.
- MORIN E. (1992), *El método; las ideas*. Madrid, Cátedra. (orig. fr. 1991; Editions du Seuil).
- NISS M. (Ed.) (1993), *Investigations into assessment in mathematics education; an ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer A.P.
- OGDEN C.K. y RICHARDS I.A. (1923), *El significado del significado*. Barcelona, Paidós, 1984.
- PIAGET J. (1979), Los problemas principales de la epistemología de la matemática. *En*: J. Piaget (Director), *Tratado de lógica y conocimiento científico. 3: Epistemología de la matemática*. Buenos Aires, Paidós.
- PLACKETT R.L. (1970), The principle of the arithmetic mean. *En*: E.S. Pearson y M. Kendall (Eds). *Studies in the history of statistics and probability*, Vol. I, p. 121-126. London, Charles Griffin.
- POZO J.I. (1989), *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid, Morata.
- PUTNAM H. (1975), El significado de "significado". *En*: L.M. Valdés (Ed.), *La búsqueda del significado*. Madrid, Tecnos.
- SIERPINSKA A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, p. 24-36.
- SIMON H.A. (1978), Information-processing theory of human problem solving. *En*: W. K. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitives processes*, Vol 5: Human information processing. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
- SNOW R.E. y LOHMAN D.R. (1991), Implication of cognitive psychology for educational measurement. *En*: R. L. Linn (Ed.) *Educational measurement* (Third ed.), pp. 263-331). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.
- STEINBRING H. (1991), Mathematics in teaching processes. The disparity between teacher and student knowledge. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11, n. 1, pp. 65-108.
- TOULMIN S. (1972), *Human understanding*. Vol I: The collective use and evolution of

- concepts. Princeton, Princeton University Press.
- VERGNAUD G. (1982), Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2, pp. 31-41.
- VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 10, n. 2,3, pp. 133-170.
- VYGOTSKII L.S. (1934), *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, La Pléyade, 1977.
- WEBB N. L. (1992), Assessment of student's knowledge of mathematics: step toward a theory. *En: D.A. Grouws, (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, Macmillan.
- WHEELER D. (1993), Epistemological issues and challenges to assessment: What is mathematical knowledge? *En: M. Niss (Ed.) Investigations into assessment in mathematics education, An ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer A.P.
- WITTGENSTEIN L. (1953), *Investigaciones filosóficas*. Barcelona, Crítica, 1988.