# ANALISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PUESTOS EN JUEGO EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y ORIENTACIÓN DE CUERPOS TRIDIMENSIONALES[1]

Margherita Gonzato, Juan D. Godino, José M. Contreras,
*Universidad de Granada*

## RESUMEN

En el marco de una investigación sobre evaluación y desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial con profesores en formación, ejemplificamos el uso de una "guía para el reconocimiento de objetos y procesos" para analizar los conocimientos puestos en juego en la resolución de dos tareas de visualización y orientación espacial de cuerpos tridimensionales. Se muestra cómo dicha guía, herramienta teórica del "enfoque ontosemiótico" en educación matemática, facilita y enriquece tales análisis, estructurando las facetas y los procesos involucrados.

**Nivel educativo**: Formación de profesores de primaria y secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de las matemáticas el profesor se enfrenta frecuentemente con actividades descritas en libros de textos o en otros materiales didácticos. ¿Qué preparación necesita para poder presentar, corregir, ampliar y discutir dichas actividades en la clase?

Parece importante y necesario que un profesor que proponga una determinada actividad a sus alumnos, no sólo tenga el conocimiento para resolverla (conocimiento común del contenido), sino además pueda identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en su resolución (conocimientos especializado del contenido), que le ayuden a prever posibles conflictos, elaborar ampliaciones y variaciones de las tareas y planificar posibles institucionalizaciones de los conocimientos implicados (Hill, Ball, y Schilling, 2008; Godino, 2009).

Diferentes trabajos (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) mencionan las dificultades que los profesores en formación tienen en el análisis de dichos conocimientos. Parece entonces importante proporcionar una "guía" que facilite la realización de tales análisis.

En este trabajo describimos y aplicamos una herramienta teórica de análisis, la "guía para el reconocimiento de objetos y procesos" (GROP), basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), en la resolución de dos tareas de visualización y orientación espacial de cuerpos tridimensionales. Esta guía ayuda a analizar diferentes procesos epistémicos - cognitivos, de los cuales vamos a describir los siguientes: procesos de representación/significación, procesos de composición/síntesis, procesos de materialización/idealización, procesos de particularización/generalización.

Podemos observar que en el campo de la Educación Matemática el tema de la visualización y orientación espacial ha recibido y recibe mucha atención (Bishop, 1983; Clements y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996;

[1] *Jornadas de la S.A.E.M Thales*. Córdoba, 10-12 Septiembre 2010

Gutiérrez, 1996; Presmeg, 2006; Battista, 2007). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

Por otra parte, el tema de la visualización y orientación de cuerpos tridimensionales en los libros de textos y en la enseñanza de la geometría es frecuentemente omitido, o considerado como actividad secundaria (matemática recreativa), aunque la correcta interpretación de informaciones de carácter espacial es hoy día una capacidad requerida en muchas profesiones y situaciones diarias.

Con el análisis que hacemos en este trabajo de dos tareas de orientación y visualización de cuerpos tridimensionales queremos desvelar los conocimientos que se ponen en juego en sus resoluciones, que no son solo conocimientos de tipo procedimental, sino también conceptuales, lingüísticos y argumentativos. Este análisis enriquece y da relevancia al tema en la enseñanza, muestra posibles generalizaciones de las tareas y motiva posibles institucionalizaciones de los conocimientos implicados.

## 2. GUÍA PARA EL RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y PROCESOS

Presentamos en la Figura 1 el diagrama de proceso que proporciona una guía para el reconocimiento sistemático de los conocimientos puestos en juego en una práctica matemática (la solución de un problema o la realización de una tarea). Dicho diagrama es una síntesis del modelo epistémico – cognitivo propuesto por el "enfoque ontosemiótico" para el conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2007).

En este trabajo nos centraremos en la descripción de los siguientes procesos:

1) Procesos de descomposición/análisis: descomposición del enunciado en unidades semióticas fijando la atención en los elementos lingüísticos claves del texto.
2) Procesos de representación/significación: descripción de los objetos puestos en juego (lenguaje y conceptos principales).
3) Procesos de composición/síntesis: composición de las unidades previamente identificadas y reconocimiento de la puesta en funcionamiento de proposiciones, procedimientos y argumentos.
4) Procesos de materialización/idealización: la materialización de los objetos ideales (matemáticos) con dibujos, iconos, índices, símbolos.
5) Procesos de particularización/generalización: el uso de casos u objetos particulares para facilitar y permitir un razonamiento sobre el caso general; las posibles generalizaciones y variaciones de la tarea.

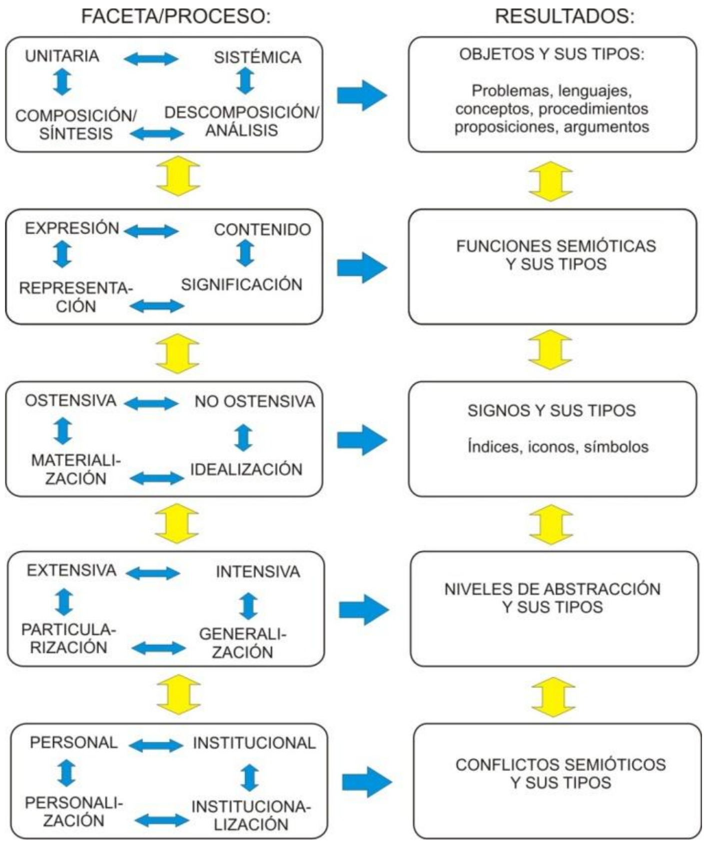


Figura 1. Guía para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos (GROP).

En los siguientes apartados vamos a dar algunas soluciones posibles y ejemplificamos el uso de la GROP para analizar dos tareas de visualización y orientación espacial de cuerpos tridimensionales y contestar de manera sistemática a la pregunta, ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de la tarea?

# 3. DESCRIPCIÓN Y ANALISIS DE LA TAREA 1

## 3.1. ENUNCIADO Y SOLUCIÓN

La primera tarea (apartado 1a) procede de un test de visualización espacial utilizado por Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988) para estudiar las diferencias debidas a género, nivel escolar, lugar de proveniencia y el efecto de la instrucción en la resolución de tareas de visualización espacial.

Tarea 1. La Figura 2 muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-arriba-derecha.

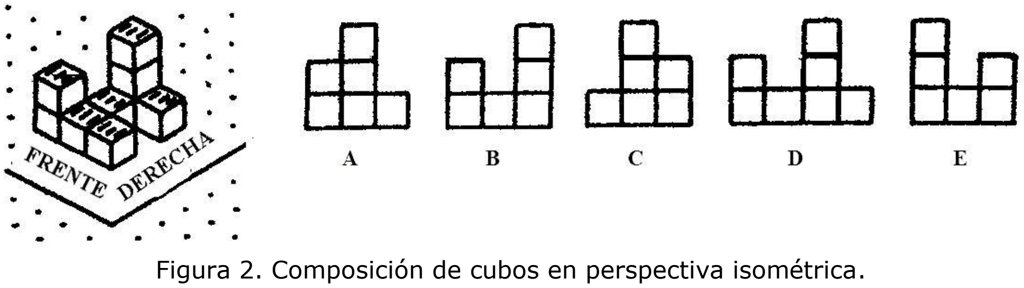


Figura 2. Composición de cubos en perspectiva isométrica.

1a) ¿Cuál de las siguiente figuras, A, B, C, D, E, correspondería a su vista desde atrás? Justifica la respuesta.

1b) ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la solución de la tarea?

A continuación damos una posible respuesta a la tarea 1a.

Solución: La figura C. Justificación: si me pongo atrás del edificio, a mi izquierda vería un solo cubo, al centro tres cubos apilados y a mi derecha dos cubos apilados, lo que corresponde a la vista C. Las restantes figuras son diferentes a la C; la A corresponde a la vista de frente (a mi derecha hay un cubo, al centro tres y a mi izquierda dos). La B corresponde a la vista desde la derecha; la D es falsa ya que no puede haber cuatro cubos alineados en ninguna vista; la E corresponde a la vista desde la izquierda.

## 3.2. ANÁLISIS EPISTÉMICO

### 3.2.1. Procesos de descomposición/análisis

En primer lugar, procedemos a la *descomposición* del enunciado en unidades semióticas fijando la atención en los *elementos lingüísticos* claves del texto: los términos "FRENTE" y "DERECHA", la figura compuesta de piezas cubicas, ángulo frente-arriba-derecha, vista desde atrás, las figuras A, B, C, D, E que corresponden a posibles vistas del objeto, justifica la respuesta.

### 3.2.2. Procesos de representación/significación

En el anterior proceso de análisis interviene, como elemento de leguaje el espacio gráfico bidimensional (la hoja de papel en que está hecho el dibujo) que incluye seis objetos: uno que refiere al objeto representado en perspectiva isométrica, y cinco que refieren a cinco vistas (proyecciones ortogonales) plausibles del objeto desde distintas posiciones. Cada letra A, B, C, D, E funciona como índice de las figuras representadas encima de ellas y el lector tiene que interpretar cada par letra/figura como una posible vista del objeto dado en perspectiva (o sea, descomponer el conjunto de vistas en 5 subproblemas).

Como objetos lingüísticos/materiales identificamos el objeto de referencia (el edificio compuesto de cubos que es representado por el dibujo en perspectiva) y el observador, interpretado como el sujeto hipotético que observa el objeto tridimensional desde diferentes posiciones.

Las diferentes vistas del objeto son representadas mediante trazos (significante) de sus límites materiales y /o las intersecciones de las superficies (significado) perceptibles, en las condiciones ópticas definidas, para un observador desde un punto de vista dado.

Se ponen en juego los conceptos de objeto visible, objeto oculto, de sistema de referencia tridimensional, punto de vista (o foco), puntos de vista opuestos (frente es opuesto a atrás; derecha es opuesta a izquierda), ángulo frente-arriba-derecha, plano de proyección, rectas proyectantes, direcciones de mirada del observador (rayo visual),…

El sistema de referencia tridimensional (vertical/horizontal/profundidad), determina los valores "encima", "debajo", "derecha", "izquierda", "frente", "detrás" y permite la elección de una determinada orientación del objeto (dada por los términos FRENTE y DERECHA). Observamos que el ángulo frente- arriba-derecha describe la posición (con respecto al objeto orientado) del sujeto que representa el objeto en perspectiva isométrica.

Justificar la respuesta requiere explicitar las reglas que se siguen para establecer que una proposición es verdadera: si se ha convenido el significado de frente, derecha, entonces necesariamente la respuesta correcta es la C".

### 3.2.3. Procesos de composición/síntesis

Mediante un proceso de *composición* de las unidades previamente identificadas reconocemos la puesta en funcionamiento de diferentes *proposiciones, procedimientos y argumentos*. Entres las diferentes *proposiciones* que se ponen en juego hay las propiedades propias de las diferentes proyecciones (isométrica y ortogonales), por ejemplo sabemos que las proyecciones paralelas sobre un plano ortogonal conservan la forma, tamaño y posición relativa de los cuerpos proyectados. En consecuencia las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente, mientras que si se miran desde un ángulo diferente aparecen como figuras romboédricas.

Observamos que el objeto representado en perspectiva se considera orientado, es decir, posee un "frente", "izquierda", "arriba", "derecha".

Hay una equivalencia entre las rotaciones del objeto con respecto al observador y las rotaciones del observador alrededor del objeto, lo que proporciona dos *procedimientos* equivalentes: cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto) e imaginar el giro del objeto sobre su base, para en seguida comparar la nueva perspectiva obtenida con cada una de las vistas dadas.

Teniendo en cuenta el significado atribuido a los conceptos de frente, derecha y atrás, los convenios de representación plana de objetos tridimensionales, y las propiedades de las proyecciones ortogonales se debe aceptar que si el observador se pone detrás del edificio, a su izquierda verá un solo cubo, al centro tres cubos apilados y a su derecha dos cubos apilados (*argumento*). Por tanto, la representación plana de la figura que vería desde atrás sería la C.

### 3.2.4. Procesos de materialización/idealización

La tarea muestra la representación material en la hoja de papel de un objeto real (el edificio) ideal (imaginado). Esta representación en perspectiva isométrica se refiere a la vista que un observador hipotético tendría del edificio ideal. Este tipo de perspectiva tiene la ventaja de permitir la representación a escala, y la desventaja de no reflejar la disminución aparente de tamaño que percibe el ojo humano.

El dibujo del edificio es entonces una materialización de un objeto ideal: la vista de un edificio que tendría un hipotético observador.

Las representaciones materiales de las vistas desde otras posiciones se presentan con proyecciones ortogonales. Tales representaciones funcionan como iconos de las vistas reales del objeto por parte de un hipotético observador, cuya dirección de mirada es perpendicular al plano visual de la observación.

Los dibujos (en proyecciones isométricas y ortogonales) pueden ser interpretados cómo materializaciones de objetos ideales (composiciones de cubos) que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" (reconocer las vistas) que se realizan sobre ellos.

En la tarea los dibujos son proyecciones sobre la hoja de un objeto. Estas proyecciones tienen dos facetas: de un lado se puede interpretar la proyección como instrumento de dibujo técnico para representar un objeto en perspectiva, que implica una serie de reglas prácticas para ejecutar la proyección. De otro lado se puede definir de modo formal la proyección con un operador de proyección (o una matriz de proyección) que tienen determinadas propiedades; las características y las relaciones de la imagen resultante pueden ser calculadas mediante la trigonometría.

### 3.2.5. Procesos de particularización/generalización

Observamos que en esta tarea se da una vista particular de un objeto y se pretende que se razone sobre el objeto en su totalidad.

La tarea admite múltiples y variadas generalizaciones cambiando la composición del objeto real representado. Se puede pedir la construcción y el reconocimiento de las diferentes vistas. Es una tarea prototípica de los problemas de representación en el área de dibujo técnico y geometría descriptiva. En Verillon y Rabardel (1993) se presentan interesantes variaciones y aplicaciones de dicha tarea.

Análisis similares se pueden realizar con otros procedimientos y argumentaciones posibles que dan respuesta a la cuestión planteada. Por ejemplo se podría primero identificar la vista desde frente (que puede resultar más fácil debido a la perspectiva presentada del edificio) y después justificar la elección de la vista desde atrás por medio de una simetría. Para una justificación completa se necesitaría definir esta simetría en términos formales, lo que puede ser fuente de dificultades.

# 4. DESCRIPCIÓN Y ANALISIS DE LA TAREA 2

## 4.1. ENUNCIADO Y SOLUCIÓN

La segunda tarea (apartado 2a) es un problema incluido por Gorgorió (1998) en un cuestionario sobre el tema de la "rotación espacial" utilizado para analizar las diferentes estrategias de los estudiantes.

Tarea 2. Los dados dibujados en la figura adjunta (Figura 3) tienen las caras colocadas de diferentes maneras. Entre las siguientes parejas de dados hay una en la que si se hace girar uno de los dos dados (éste) se coloca en la misma posición que el otro.

2a) ¿Cuál de las parejas, A, B, C o D, cumple esa condición? Justifica la respuesta trazando el eje (o los ejes) alrededor del cual uno de los dados debe girar para que muestre la misma perspectiva que el otro.

2b) ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la solución de la tarea?

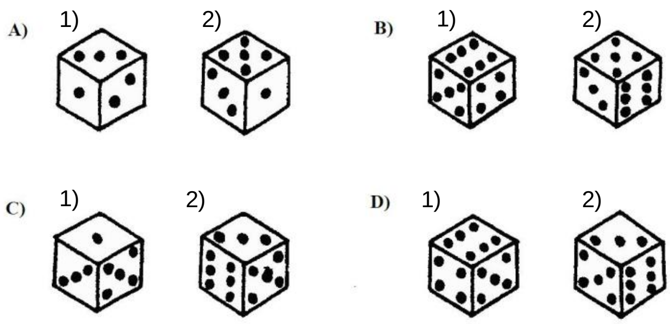


Figura 3. Parejas de dados.

A continuación damos una posible respuesta a la tarea 2a.

Solución. La pareja que cumple la condición es la C. Justificación: Si se hace girar el dado 1) 90º grados a la derecha alrededor del eje perpendicular a la cara del 5 que pasa por su centro (Figura 4), el dado se pone en la misma posición que el 2). En efecto, el cinco queda en la misma cara, el tres se pone arriba (donde estaba el uno) y desde abajo sale la cara del seis (que es la cara opuesta del uno) poniéndose delante (donde estaba el tres).

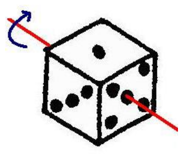

Figura 4.

## 4.2. ANÁLISIS EPISTÉMICO

### 4.2.1. Procesos de descomposición/análisis

En primer lugar *descomponemos* el enunciado en unidades semióticas (términos y expresiones claves del enunciado y resolución): dados; caras de un dado; girar; misma posición; eje; perspectiva; justifica la respuesta.

### 4.2.2. Procesos de representación/significación

La tarea presenta cuatros pares de dados dibujados en perspectivas isométricas. Los dados de cada par están designados con números 1) y 2) que funcionan como índices de las figuras representadas encima de ellas. El lector tiene que interpretar cada par de dados como una posible solución del problema, y por tanto descomponer el conjunto de los dados en 4 subproblemas.

Además se requiere el conocimiento de un lenguaje verbal espacial para expresar localizaciones, direcciones y rotaciones de objetos tridimensionales representados en el plano (cara opuesta, adelante/atrás, derecha/izquierda, encima/debajo, rotar a la derecha,…)

Como objetos lingüísticos/materiales identificamos los diferentes dados, representados en varias posiciones. La tarea está basada en las diferentes composiciones de los dados y en sus posiciones.

Se ponen en juego los conceptos de objeto visible, objeto oculto, caras de un dado, rotación, eje de rotación, perpendicularidad, amplitud de rotación, sentido de rotación, posición de las caras con respecto a un observador (cara de arriba, cara derecha, cara de abajo, cara de atrás,…), dados idénticos,…

Justificar la respuesta requiere explicitar las reglas que se siguen para establecer que una proposición es verdadera: dibujando el eje de rotación perpendicular a la cara de uno de los dos dados y definiendo el sentido y los grados de rotación se puede justificar la equivalencia de los dos dados.

### 4.2.3. Procesos de composición/síntesis

Mediante un proceso de *composición* de las unidades previamente identificadas reconocemos la puesta en funcionamiento de diferentes *proposiciones, procedimientos y argumentos*. Entres las diferentes *proposiciones* que se ponen en juego están las propiedades propias de las diferentes proyecciones (isométrica y ortogonales), por ejemplo sabemos que las proyecciones paralelas sobre un plano ortogonal conservan la forma, tamaño y posición relativa de los cuerpos proyectados. En consecuencia las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente, mientras que si se miran desde un ángulo diferente aparecen como figuras romboédricas.

Una *propiedad* central en esta tarea es la “equivalencia” de dos dados, es decir que girando uno de los dos dados obtenemos dos perspectivas idénticas (los dados están puestos de manera que sus partes visibles son idénticas). Esto es posible solo si los dados son realmente idénticos. Los pares de dados que no son equivalentes no es porque sean dados falsos (en efecto, los puntos de sus caras opuestas suman siempre 7) sino porque son dados cuyos puntos están colocados de forma diferente. Ilustramos en la Figura 5 dos parejas de dados que no son idénticos, y que entonces nunca se logrará ponerlos en la misma posición, cualquiera que sea la rotación que se haga sobre ellos.

Pareja 1. Pareja 2.

Figura 5. Dos ejemplos de parejas de dados no idénticos.

Observamos que en la pareja 1 la diferencia se basa en la disposición de los puntos de una cara con respecto a las otras, mientras que en la pareja 2 la diferencia está en la disposición de las caras. Con referencia a este segundo ejemplo, Besuden (1990) muestra que existen dos posibles orientaciones de un dado (y más en general del espacio), llamados sistema de orientación a izquierda y a derecha. En la tarea expuesta podemos observar que los dados que no son equivalentes corresponden a dados con orientaciones diferentes.

Además se ponen en juego las *propiedades* propias de la rotación de un objeto tridimensional alrededor de un eje de rotación, por ejemplo, sabemos que los puntos pertenecientes al eje de rotación no se mueven.

Teniendo en cuenta el significado de "misma posición" atribuido a los dados representados, los convenios de representación plana de objetos tridimensionales, y las propiedades de la rotación de un objeto tridimensional sobre un eje de rotación, se debe aceptar que si se hace girar 90º en un determinado sentido uno de los dos dados sobre el eje perpendicular a la cara del 5 que pasa por su centro, los dados de la pareja C se ponen en la misma posición (*argumento*).

#### 4.2.4. Procesos de materialización/idealización

La tarea muestra la representación material en la hoja de papel de objetos reales (los dados) los cuales en la tarea dada son imaginarios o ideales.

Los dibujos (en proyecciones isométricas) pueden ser interpretados cómo *materializaciones* de objetos ideales (cubos) que permiten la realización de las "acciones matemáticas" (rotar) que se realizan sobre ellos. *Idealmente*, se podría resolver la tarea aplicando una determinada matriz de rotación a uno de los dos cubos, definido de forma algébrica.

#### 4.2.5. Procesos de particularización/generalización

Observamos que también en esta tarea se da una vista particular de los objetos (en perspectiva isométrica) donde solo tres caras son visibles y se pretende que se razone sobre los objetos en su totalidad, es decir, imaginando todas las caras de los dados.

La tarea se puede generalizar a un objeto cualquiera, siempre que se conozca su forma real. Observamos que para planear otras actividades similares con dados es necesario conocer el significado de "equivalencia de dados", sea por disposición de puntos como de orientación de las caras. También se puede variar la tarea pidiendo una determinada justificación apoyada en códigos previamente establecidos. Por ejemplo, en Besuden (1990) se considera el dado apoyado sobre un plano, se establece un código para las cuatros rotaciones posibles sobre las caras laterales, y se dan interesantes variantes de esta tarea.

## 5. REFLEXIONES FINALES

Los resultados obtenidos al aplicar estas tareas a dos grupos de estudiantes (58 alumnos realizaron la tarea 1 y 68 la tarea 2) del primer curso de "Matemáticas y su didáctica" en la Universidad de Granada indican que resultan difíciles para un porcentaje elevado de estudiantes (55,2% respondieron erróneamente la tarea 1 y 73,5% la tarea 2). El tipo de análisis que hemos realizado permite desvelar el entramado de conocimientos que se ponen en juego, bien de manera explícita o implícita cuando se abordan tareas que involucran la visualización y orientación espacial. Dichas conocimientos no solo son de tipo procedimental, sino que también se ponen en juego conocimientos conceptuales, lingüísticos y argumentativos.

Parece necesario que en la formación matemática y didáctica de profesores se incluyan tareas como las aquí analizadas, las cuales podemos calificar de elementales, al tratarse de problemas o ejercicios abordables por los estudiantes de primaria o secundaria. Sin embargo, la consigna, ¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de la tarea?, que sin duda es valiosa para el profesor, implica el desarrollo de competencias que progresivamente deberían desarrollarse.

**Reconocimiento:**

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y de la Beca FPU, AP2008-04560.

## REFERENCIAS

BATTISTA, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester, (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908), Information Age Publishing, Charlotte, NC.

BEN-CHAIM, D., G. LAPPAN, y R. T. HOUANG (1988). *The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls*, American Educational Research Journal, 25(1), 51–71.

BESUDEN, H. (1990). *Räumliche Orientierung: Die rechts/links Beziehung*, Math. Schule, 28 (7/8), 461-474.

BISHOP, A. (1983). Space and Geometry, en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203), Academic Press, New York.

CLEMENTS, D. H. y BATTISTA, M. (1992). Geometry and spatial reasoning, en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420- 464), MacMillan, New York.

GODINO, J. D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática,* Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

GODINO, J. D. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas,* UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y FONT, V. (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*, ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. [Versión en español, ampliada y actualizada disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino].

GODINO, J. D., RIVAS, M., CASTRO, W. F. y KONIC, P. (2008). *Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas*, Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia, Centro de Profesores y Recursos, Murcia.

GORGORIÓ, N. (1998). *Exploring the Functionality of Visual and Non-visual Strategies in Solving Rotation Problems*, Educational Studies in Mathematics, 35, 207-231.

GUTIÉRREZ, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework, en L. Puig and A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 1, pp. 3-19), Universidad de Valencia, Valencia.

HERSHKOWITZ, R., PARZYSZ, B. y VAN DORMOLEN, J. (1996). Space and shape, en A. J. Bishop et al. (eds.), *International handbook of mathematics education (*pp*.* 161-204*)*, Kluwer, Dordrecht.

HILL, H. C., BALL, D. L. y SCHILLING, S. G. (2008). *Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students*, Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

PRESMEG, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics, en A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 205-235), The Netherlands: Sense publisher, Rotterdam.

VÉRILLON, P. y RABARDEL, P. (1993). De l'analyse des compétences à l'élaboration de contenus : contribution de la psychologie et de la sémiologie à la conception en ingénierie didactique, en A. Bessot y P. Vérillon, *Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux* (pp. 145-181), La Pensée Sauvage, Grenoble.