NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESCOLAR. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS[1]

ALGEBRIZATION LEVELS OF SCHOOL MATHEMATICS ACTIVITY. IMPLICATION FOR PRIMARY SCHOOL TEACHER EDUCATION

Juan D. Godino, Lilia P. Aké, M. Gonzato

Universidad de Granada

jgodino@ugr.es . lpake@ugr.es . mgonzato@ugr.es

Miguel R. Wilhelmi

Universidad Pública de Navarra

miguelr.wilhelmi@unavarra.es

RESUMEN: El desarrollo del razonamiento algebraico elemental desde los primeros niveles educativos es un objetivo propuesto en diversas investigaciones y orientaciones curriculares. En consecuencia es importante que el profesor de Educación Primaria conozca las características del razonamiento algebraico y sea capaz de seleccionar y elaborar tareas matemáticas adecuadas que permitan la progresiva introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria. En este trabajo presentamos un modelo en el que se diferencian tres niveles de razonamiento algebraico elemental que puede utilizarse para reconocer características algebraicas en la resolución de tareas matemáticas. Presentamos el modelo junto con ejemplos de actividades matemáticas, clasificadas según los distintos niveles de algebrización. Dichas actividades pueden ser usadas en la formación de profesores a fin de capacitarles para el desarrollo del sentido algebraico en sus alumnos.

PALABRAS CLAVE: Álgebra elemental, niveles de algebrización, tareas matemáticas, formación de profesores, sentido algebraico

ABSTRACT: The development of elementary algebraic thinking since the earliest levels of education is a goal that is proposed in different research works and curricular guidelines. Consequently primary school teachers should know the characteristics of algebraic reasoning and be able to select and develop appropriate mathematical tasks that serve to gradually introduce algebraic reasoning in primary school. In this paper we present a model that distinguish three levels of elementary algebraic thinking and is useful for recognizing the algebraic features in solving mathematical tasks. We describe this model with examples of mathematical activities, classified according to the different levels of algebraization. These activities can be used in training teachers in order to prepare them to develop their students' algebraic sense.

KEY WORDS: Early algebra, algebraization levels, mathematical tasks, primary school teachers

[1] *Enseñanza de las Ciencias* (aceptado, Diciembre 2012)

1. INTRODUCCIÓN

Un profesor propone a sus estudiantes el siguiente problema:

> *Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?*

El estudiante A resolvió el problema de la siguiente manera:

> Supongamos que hay el mismo número de sillas y de taburetes: $3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4$. Como el resultado sobrepasa el total de 20 patas, excediéndose en 1 pata, se cambia una silla (de 4 patas) por un taburete (de 3 patas). Finalmente se obtiene 4 taburetes y 2 sillas: $3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4$, teniendo un total de 20 patas.

El estudiante B resolvió el problema de la siguiente manera:

> Sea T el número de taburetes y S el número de sillas. Como el total de taburetes y sillas deben sumar 6, entonces, $T + S = 6$. Por otro lado, se debe tener un total de 20 patas entre los taburetes y las sillas, esto es, $3T + 4S = 20$. Como de $T + S = 6$ se obtiene que $T = 6 - S$; por tanto, $3(6 - S) + 4S = 20$, de donde$18 + S = 20$, obteniéndose finalmente que $S = 2$. Si $S = 2$, entonces $T = 4$. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.

En este ejemplo parece que habría consenso en aceptar que la solución del estudiante A se puede calificar de aritmética, mientras que la del estudiante B de algebraica. B usa “letras” para representar las cantidades desconocidas, y opera con ellas de acuerdo con ciertas reglas para obtener la solución. En cambio A opera directamente con números naturales particulares a los cuales les aplica operaciones aritméticas.

Sin embargo, el consenso en la consideración de una actividad como algebraica o aritmética no siempre es tan extendido. ¿Sólo podemos considerar como solución aritmética aquella actividad matemática que involucra números particulares y operaciones aritméticas? ¿Sólo podemos considerar como solución algebraica aquella actividad matemática que involucra el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos literales y operaciones con dichos símbolos, como la realizada por el estudiante B?

Supongamos que un estudiante C resuelve el problema de la siguiente manera:

> Teniendo en cuenta que el número de asientos es 6 y que cada silla aporta 4 patas y cada taburete 3, entonces se puede construir una tabla con todos los casos posibles:

Número	1	2	3	4	5	6
Patas de sillas	4	**8**	12	16	20	24
Patas de taburetes	3	6	9	**12**	15	18

> Luego, tiene que haber 2 sillas y 4 taburetes, ya que entonces hay 6 asientos en total ($2 + 4 = 6$) y el número total de patas es 20 ($8 + 12 = 20$).

El problema así resuelto permite reconocer ciertos aspectos considerados tradicionalmente como algebraicos:

1. *Determinación de reglas o técnicas generales.* Para resolver problemas del mismo tipo es suficiente aplicar la *técnica general* siguiente: “Se construye una tabla con tantas columnas como número de asientos haya y se determina cuál de las combinaciones posibles determina el número de asientos justos con el número de patas exacto”.

2. *Simbolización o representación de un objeto mediante un símbolo o una letra*. Una persona podría haber sustituido en la primera columna los términos “patas de sillas” y “patas de taburetes” por los símbolos: □ y Δ respectivamente; de tal manera, que el símbolo utilizado evocara la característica principal de los asientos en el problema (tener 4 o 3 patas, respectivamente).
3. *Determinación de propiedades y proposiciones*. La tabla muestra el número de patas que “aportan” uno, dos, tres, etc. asientos de cada tipo. Así, se deduce las propiedades:
   a) Si el número de patas es impar, el número de taburetes tiene que ser impar.
   b) Si el número de patas es par, el número de taburetes también.
   c) El número de patas de un conjunto de sillas es siempre par.
   d) El número de patas de un conjunto de sillas es múltiplo de 4; el de taburetes, de 3.

En estas condiciones, la resolución propuesta por el estudiante C excede el campo meramente aritmético, aportando el germen de un trabajo algebraico; y ello a pesar de que en la resolución C sólo usa “números”. Parece necesario entonces identificar indicadores de la actividad matemática que permitan clasificarla como “aritmética” o “algebraica” o, de forma más precisa, aspectos que permitan establecer una graduación en diferentes niveles de algebrización.

Estas cuestiones no son triviales si tenemos en cuenta la abundante literatura existente donde se aborda esta problemática (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007; Cai y Knuth, 2011); tampoco son intrascendentes desde el punto de vista educativo, ya que involucran diversas maneras de concebir la propia actividad matemática, así como su enseñanza y aprendizaje en la escuela.

En este trabajo, después de sintetizar algunas características del álgebra elemental que motivan su inclusión en el currículo de educación primaria (sección 2) y resaltar el papel del álgebra como instrumento de modelización (sección 3), presentamos en la sección 4 una propuesta de clasificación de los tipos de objetos que intervienen en la actividad matemática usualmente considerada como algebraica (relaciones binarias, operaciones y sus propiedades formales, funciones y estructuras, sus tipos y propiedades). También se consideran algunos procesos matemáticos cuya presencia conjunta y articulada es indicativa del razonamiento algebraico (generalización, representación alfanumérica, cálculo analítico).

Puesto que nuestro objetivo es identificar rasgos indicativos de actividad algebraica desde los primeros niveles educativos, en la sección 5 definimos dos niveles primarios de algebrización de la práctica matemática. Estos niveles de razonamiento proto-algebraico (esto es, primarios o incipientes) se enmarcan dentro de otros dos niveles: uno, sin rasgos algebraicos; otro, con rasgos consolidados de dicho razonamiento. Para cada nivel se presentan ejemplos de tareas y posibles soluciones que pueden ser útiles para desarrollar en los profesores el sentido de lo algebraico y, por tanto, capacitarlos para la docencia en educación primaria.

En la sección 6, ejemplificamos la aplicación de los niveles de razonamiento algebraico al análisis de las respuestas a una tarea matemática de una muestra de 140 estudiantes de magisterio. Estos datos fueron usados para promover la discusión sobre los rasgos característicos del álgebra elemental con los maestros en formación. Finalmente, en la sección 7 presentamos una síntesis del modelo, conexiones con propuestas similares de otros autores y algunas implicaciones para la formación de profesores de Educación Primaria.

2. ALGEBRA EN EL CURRÍCULO DE PRIMARIA

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que el bloque de álgebra se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde los primeros años de escolarización.

Como afirman Godino y Font (2003), ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12). En el "álgebra escolar" se incluyen no sólo las funciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino también el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructuras isomorfas.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento funcional está en el corazón de las matemáticas concebidas como la ciencia de los patrones y el orden, ya que los procesos de formalización y generalización son procesos centrales de las matemáticas.

Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) señalan asimismo que el razonamiento algebraico implica también:

- Desarrollar un pensamiento relacional, es decir, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones.
- Transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta.
- Desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones (ej., asociativa, conmutativa, distributiva), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad).

En consecuencia, la formación de maestro debe contemplar la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos, descubriendo su función central en la actividad matemática. Sólo así serán los maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles.

Algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los niños, y que, por tanto, deben conocer los maestros en formación, son:

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. El uso de símbolos permite expresar de manera más eficaz las generalizaciones de patrones y relaciones. Entre los símbolos destacan los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como

representaciones de cantidades que varían, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.

4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Respecto a la cuarta característica, hay que destacar que todas las representaciones de una función dada son simplemente maneras diferentes de expresar la misma idea. Cada representación pone en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades de la visualización para formar conceptos y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

3. EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Godino y Font (2003) constatan la existencia en la escuela de una concepción tradicional y limitada del álgebra escolar denominada "aritmética generalizada". Esta concepción supone que el álgebra es un campo de las matemáticas donde se manipulan letras que representan números no especificados. Así, los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la "aritmética generalizada" son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas partes de las matemáticas está en la generalidad de las afirmaciones:

- La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales:

$$20;\ -7;\ \frac{14}{5};\ 4{,}75;\ \sqrt{3}$$

  O mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas:

$$45 \times 12;\ \frac{73 + 5{,}4}{3};\ (13 - 7{,}4)^3$$

- El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como *x*, *y*, *t*, *v*, o bien expresiones con variables:

$$3x - 5;\ x^2 - x + 5;\ (x + 5)(x - 7);\ 3uv + 4v + u + v + 1$$

Este "tipo de álgebra"" está presente desde los primeros niveles educativos. Siempre que se necesite expresar una generalización, el simbolismo y las operaciones algebraicas resultan de gran utilidad.

Es necesario, sin embargo, que los maestros tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. Algunas características del álgebra que son fáciles de apreciar son:

- El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos.
- La expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Pero estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial es la actividad que se hace con estos instrumentos. Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta concepción ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de menor o mayor grado (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización y, puesto que se puede iniciar su estudio desde la educación primaria se debería hacerlo (Cai y Knuth, 2011).

4. TIPOS DE OBJETOS Y PROCESOS ALGEBRAICOS

De acuerdo con lo explicado anteriormente, una práctica matemática se considera algebraica si presenta cierto tipo de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como "algebraicos". Son tipos de objetos algebraicos los siguientes:

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.

Ejemplo: Dos fracciones se dicen que son equivalentes cuando aplicadas a una misma cantidad la cantidad fraccionaria que se obtiene es la misma. De otra forma, cuando el producto cruzado de numeradores y denominadores son iguales; formalmente,

$$a, b, c, d \in \mathrm{Z}; c, d \neq 0\text{: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc. \text{ Por ejemplo: } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

El conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí, $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\right\}$, da lugar a la consideración de un nuevo objeto más general que cada una de dichas fracciones, que es un número racional particular, usualmente representado por la fracción irreducible $\frac{2}{3}$. Este número racional es un objeto intensivo (una generalidad o abstracción) que se puede definir de una manera más formal indicando la propiedad que caracteriza la formación de todas las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$: es el conjunto de todas las fracciones en las que el numerador es de la forma 2k, y el denominador de la forma 3k, siendo k cualquier número entero diferente de 0.

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{n}{m} \mid n = 2k; m = 3k; k \in \mathrm{Z}\backslash\{0\}\right\}$$

2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Asimismo, pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.

Ejemplos:

- Aplicar la propiedad distributiva a la expresión $3(2+x)$ para producir la expresión equivalente $6+3x;$ o bien a la expresión $24x+18y$ para producir la expresión equivalente $6(4x+3y)$.
- Usar variables para representar números y expresiones en la resolución de un problema del mundo real; comprender que una variable puede representar un número desconocido, o cualquier número en un conjunto específico.

3) *Funciones*. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones y álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Asimismo, es preciso distinguir los diferentes objetos involucrados: funciones; variables, fórmulas, parámetros, etc., y contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula, analítica.

Ejemplo: ¿En la figura 1, cuántos cuadrados tendrá el dibujo de la sexta posición 6ª? ¿Y el dibujo situado en la posición n–ésima?

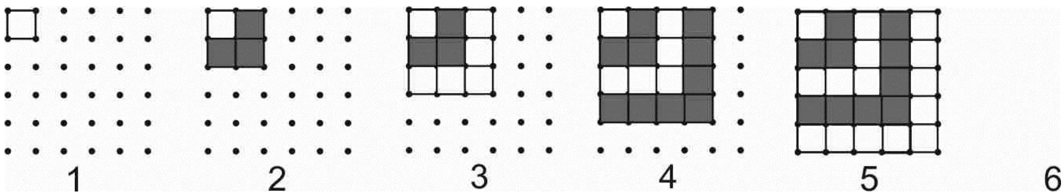

Figura 1. Secuencia de cuadrados

En este ejemplo, el número de cuadrados que se van formando para cada posición de la figura viene dado por la función cuadrática, $\mathrm{y}=\mathrm{n}^2$. Intervienen los conceptos algebraicos de función, variable independiente (n), variable dependiente (y), criterio o regla de correspondencia, n^2.

4) *Estructuras, sus tipos y propiedades* (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) características del álgebra superior o abstracta.

El estudio de estas estructuras algebraicas corresponde a niveles educativos superiores, aunque es posible encontrar en libros de primaria contenidos que corresponden a un primer contacto con las propiedades algebraicas que caracterizan al semianillo $(\mathbb{N},+,\times)$ de los números naturales.

Procesos algebraicos

En el caso de la práctica o actividad algebraica los procesos de particularización – generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Mason y Pimm, 1984; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008). Así, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización. Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que denominaremos objeto *intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Mediante el proceso inverso de particularización se obtienen objetos que denominamos *extensivos*, esto es, objetos particulares. El objeto intensivo puede ser visto como la regla que genera los elementos que componen una colección o conjunto, sea finito o infinito. Una colección finita simplemente enumerada no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Entonces el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*.

Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o *materializada* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (*proceso de reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal.

Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual (Radford, 2003).

En la siguiente sección, describimos la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está fijada objetiva o platónicamente establecida, puesto que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática. De hecho, el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

5. NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESCOLAR

En esta sección describimos las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria, que permiten definir distintos niveles o grados de algebrización. Proponemos distinguir dos niveles de algebrización primarios (que llamamos proto-algebraicos al considerarlos como primarios, primitivos o incipientes). Dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico) y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata, por tanto, de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas. Además, el cambio en alguna de las variables de la tarea puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

1. *Generalización*. Generación o inferencia de intensivos.
2. *Unitarización*. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
3. *Formalización y ostensión*. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

4. *Transformación*. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

Ilustraremos las descripciones de los niveles de algebrización con ejemplos de actividades pertenecientes a las tres facetas o campos del razonamiento algebraico que propone Kaput (2008), esto es, estructuras/operaciones, funciones/patrones y modelización.

5.1. Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico)

Si deseamos capacitar al maestro de primaria para que desarrolle el razonamiento algebraico en sus estudiantes, es necesario describir las prácticas matemáticas de nivel 0, esto es, aquellas que no incluyen características algebraicas de acuerdo con la descripción hecha en las secciones anteriores. Proponemos la siguiente regla para asignar el nivel 0 de algebrización a una práctica matemática:

> *Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.*

Ejemplo 1. Calcula el término que falta: $1500 - 925 = \_\_\_\_$

Suponiendo que el resultado 575 se obtiene mediante el algoritmo usual de la sustracción, el número desconocido, representado por una línea horizontal (___), es simplemente el resultado de efectuar la operación indicada en el primer miembro de la igualdad; el signo igual expresa el resultado de la operación. Se trata, por tanto de una actividad típicamente aritmética. El trabajo consiste en calcular el número particular que se debe asignar a la línea horizontal de la derecha.

Ejemplo 2. En un libro de primaria encontramos el siguiente ejercicio.

Realiza estas sumas y compara los resultados:

$$a)\ 24386 + 6035; \qquad 6035 + 24386$$

$$b)\ 24386 + 6035 + 715; \qquad 6035 + 715 + 24386$$

Si un alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales dos a dos, la actividad matemática realizada no implica ningún nivel de razonamiento algebraico.

Ejemplo 3. En los libros de educación primaria encontramos abundantes enunciados de problemas como el siguiente:

> El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un alumno puede razonar del siguiente modo:

> El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan $500 - 72 = 428$; 428 petunias.

En esta práctica matemática intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. Es cierto que en la tarea el sujeto debe reconocer la ocasión de aplicar los conceptos (objetos intensivos) de multiplicación y sustracción de números naturales, además del concepto de número natural aplicado como medida del tamaño de colecciones discretas. Sin embargo, estos procesos de particularización no los consideramos como propios del razonamiento algebraico: las reglas que definen las situaciones de uso de tales conceptos no se hacen explícitas en la realización de la tarea.

5.2. Nivel incipiente de algebrización (nivel 1)

En el ejemplo 2, un alumno podría haber razonado de la siguiente forma: "puesto que $24386 + 6035$ es 30421, entonces para calcular $24386 + 6035 + 715$ es suficiente añadir 715 al resultado 30421, dando como suma total 31136. Asimismo, podría haber razonado que los resultados son iguales dos a dos, puesto que el orden en que se suman dos términos es irrelevante. El alumno no tiene porqué nombrar a estos razonamientos "propiedades asociativa y conmutativa"; lo esencial es que establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones. Es aquí que se establece un primer paso en la algebrización del razonamiento.

> *Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.*

En el caso de prácticas matemáticas que ponen en juego incógnitas y relaciones (ecuaciones) el uso de materializaciones simbólicas (__, …, [ ], ○) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización si la determinación del valor desconocido no se hace mediante la mera asignación del resultado de operaciones sobre objetos particulares. Asimismo, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo ℕ de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia del nivel 1 de algebrización.

Ejemplo 4:

$$a)\ 15 + 11 = 11 + [\ \ ];\quad b)\ 10 + [\ \ ] = 15 + 15;\quad c) 3 \times [\ \ ] = 672$$

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa:

$$10 + [\ \ ] = 10 + 5 + 15 = 10 + (5 + 15) = 10 + 20$$

Luego el número que falta es 20. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación. Algunos alumnos de 12-13 años persisten en resolver la expresión c) mediante ensayo y error, sin reconocer la relación inversa entre la división y multiplicación ("síndrome de la inversa de la multiplicación"; Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 8). La resolución mediante ensayo y error, probando sucesivos números, sería una práctica de nivel 0 de algebrización.

En los tres casos las tareas se resuelven evocando propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, y no realizando los cálculos sobre los números particulares que intervienen, o mediante ensayo y error. Esta es la razón por la que le asignamos un primer nivel de algebrización.

Ejemplo 5: Continúa la siguiente secuencia: rojo, azul, azul, rojo, azul, azul, …

Un alumno razona de la siguiente manera: Después de un rojo, siempre siguen dos azules y después de dos azules sigue un rojo.

El alumno que razona de esta manera reconoce una regla general compatible con el conjunto finito de elementos dados que le permite ir generando sucesivamente los términos de la secuencia. Consideramos esta actividad de nivel 1 de algebrización. Si el alumno se limita a escribir los términos que siguen en algunos casos, sin expresar alguna regla general la actividad sería de nivel 0.

Ejemplo 6 (balanza algebraica): ¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza (figura 2) para que quede equilibrada*?*

Solución: La segunda balanza indica que 3 destornilladores pesan igual que 6 tornillos; luego 1 destornillador pesa igual que 2 tornillos. En la primera balanza hay 14 tornillos en el plato de la derecha; si quitamos el destornillador habrá que quitar 2 tornillos para que se mantenga el equilibrio. Luego en la tercera balanza hay que poner $14 - 2 = 12$; 12 (tornillos).

Como se ve se están aplicando propiedades estructurales del semianillo $(\mathbb{N}, +, \times)$, aunque con un lenguaje natural. Se puede asignar el nivel 1 de algebrización a cada una de las etapas en que se descompone la tarea.

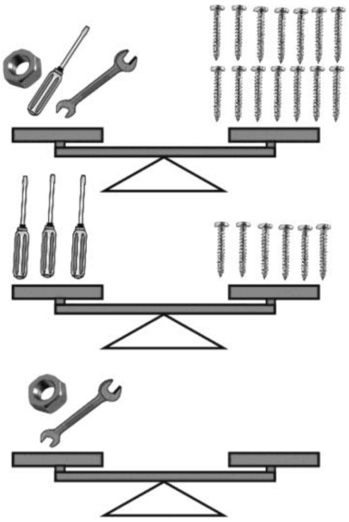

Figura 2

Ejemplo 7 (áreas y perímetros): Indica el lado de un cuadrado y la base y altura de un rectángulo que tengan igual área y distinto perímetro.

Solución 1: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 (cuatro veces el lado) y el área 36 (lado por lado). Un rectángulo de área 36 puede estar formado por una base de 12 y una altura de 3 ($12 \times 3 = 36$); en este caso el perímetro será $12 + 12 + 3 + 3 = 30$, que es diferente de 24.

En esta resolución interviene los objetos intensivos, fórmulas generales de cálculo del área de un cuadrado (lado $\times$ lado), del rectángulo (base $\times$ altura), perímetro del cuadrado (4 $\times$ lado) y perímetro del rectángulo (2 veces la base más dos veces la altura). Sin embargo, dichas reglas no aparecen enunciadas de manera general y explícita, sino particularizadas con valores numéricos específicos. La actividad matemática que se realiza es de índole aritmético-geométrica sin ningún carácter algebraico (nivel 0).

Solución 2: Supongamos que el lado del cuadrado es 6; el perímetro será 24 y el área 36. Podemos encontrar muchos rectángulos cuya área sea 36, y perímetro diferente de 24. Por ejemplo, si la base fuera 4, la altura sería 9 (36/4=9), el perímetro 26; si la base fuera 2, la altura sería 18 (36/2=18), el perímetro 40. En general, la altura sería 36 dividido por la base.

En esta segunda solución se genera un objeto intensivo: el conjunto de soluciones posibles para la base y altura del rectángulo una vez fijada el área del cuadrado. Se establece una relación general entre la altura y la base del rectángulo (altura=Área/base), aunque dicha regla se enuncia con lenguaje aritmético y natural. Esta actividad matemática supone un nivel 1 de razonamiento algebraico.

5.3. Nivel intermedio de algebrización (nivel 2)

Este nivel de algebrización lo definimos mediante la siguiente regla[2]:

> *Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.*

Ejemplo 8: Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Solución 1: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 moneda, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos.

Veamos la siguiente solución:

Solución 2: Juan comienza con *n* monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene $2n$; paga 4 y se queda con $2n - 4$. Introduce $2n - 4$ en la máquina y obtiene el doble, o sea, $2(2n - 4)$. Al pagar 4 se queda sin dinero, o sea:

$$2(2n - 4) - 4 = 0; 4n - 8 - 4 = 0; 4n - 12 = 0; n = 3$$

La solución 2 es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma $Ax + B = C$.

Ejemplo 9 (secuencia de figuras con palillos)[3]: En la figura 3, ¿Cuántos palillos son necesarios para formar el dibujo situado en la posición 4ª? ¿Y para formar el dibujo que estuviera en la posición 50? ¿Y para la posición 100?

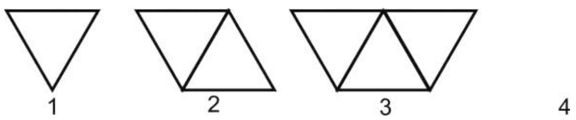

Figura 3

Solución: La secuencia de figuras está formada por triángulos; cada triángulo requiere 3 palillos, luego la figura en la posición n, requiere $3n$ palillos. Pero al poner juntos los triángulos se eliminan palillos; en la figura 2ª se elimina 1, en la 3ª se eliminan 2, en la 4ª se eliminan 3. O sea, la fórmula general será $3n - (n - 1)$. Para la figura 50 se necesitan 101 palillos y para la 100, 201.

---

[2] En tareas estructurales seguimos el criterio propuesto por Filloy et al. (2008), quienes consideran como no propiamente algebraica la modelización de problemas verbales mediante ecuaciones de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales nuestra propuesta incluye en este nivel las generalizaciones contextuales (Radford, 2003) y las generalizaciones simbólicas que no reconozcan las formas canónicas de expresión de la generalidad. Las generalizaciones factuales las consideramos como propias del nivel 1.

[3] Un ejemplo similar es descrito en Radford (2011) en una experiencia realizada con niños de segundo grado (7-8 años). Los alumnos fueron capaces de encontrar la regla que genera las figuras de una posición genérica (50, 100, 500, …), y expresarla con el apoyo de ejemplos particulares (generalización factual). Asimismo, fueron capaces de referir mediante gestos a un valor indeterminado para la posición de las figuras y la forma de las mismas.

Se trata de una generalización de tipo mixto, contextual y simbólico. La regla que proporciona el número de palillos en una posición cualquiera se relaciona con la forma y posición ordinal de la figura. La fórmula dada no es transformada operando con la variable para obtener la forma canónica de expresión, $2n + 1$.

5.4. Nivel consolidado de algebrización

En el ejemplo 6 (balanza algebraica) la exposición en lenguaje natural podría haberse formalizado: puesto que $3d = 6t$ (3 destornilladores = 6 tornillos); dividiendo por 3 ambos miembros, $d = 2t$. Además, en la primera balanza, $p + d + l = 14t$ (pieza, destornillador, llave = 14 tornillos). Entonces, si se quita el destornillador del platillo izquierdo el equilibrio se mantiene si quitamos un peso equivalente, o sea 2 tornillos. Esta explicación de la actividad matemática realizada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) ya que se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación requerida.

Este nivel puede ser descrito de la siguiente forma:

> *Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo* $Ax \pm B = Cx \pm D$*, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.*

En el ejemplo de hallar el número de sillas y taburetes, incluido en la sección de introducción de este trabajo, la solución dada por el estudiante B es claramente de nivel 3 de algebrización.

6. NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

En esta sección presentamos respuestas de estudiantes de magisterio a un problema, analizadas según los tipos de objetos y procesos que ponen en juego, y clasificadas según los niveles de razonamiento algebraico que manifiestan. Se trata de un ejemplo de aplicación del modelo de análisis descrito en las secciones anteriores, que ha sido usado como reactivo con dichos estudiantes para promover la reflexión sobre los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental.

El problema propuesto a una muestra de 140 estudiantes de magisterio, en el contexto de una asignatura que contempla su formación didáctico-matemática, es el siguiente:

> *Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?*

La figura 4 incluye la respuesta del estudiante 1. En el primer paso el estudiante reconoce las condiciones de aplicación de la multiplicación. Se trata de una situación multiplicativa en la que se dan como datos el estado de una magnitud (número de días), una razón (4 euros por día), y se pide el estado de otra magnitud (cantidad de euros ahorrados).

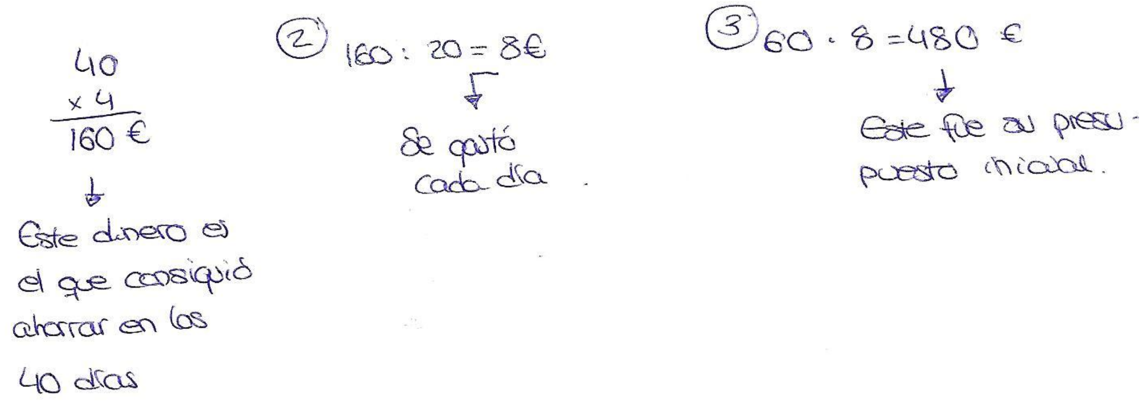

Figura 4. Respuesta del estudiante 1

En el segundo paso reconoce primero una situación aditiva (diferencia entre los días totales, 60, y los días previstos, 40) y otra situación multiplicativa en la que conocen dos estados de dos magnitudes (cantidad de euros ahorrados, número de días) y halla la razón (gasto diario, 8 €). Finalmente, en el tercer paso, reconoce otra situación multiplicativa de tipo de razón en la que se conoce un estado de una magnitud (60 días), una razón (8 € por día) y se calcula otro estado final (cantidad de euros de presupuesto inicial).

Todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son medidas de cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas. El estudiante realiza, no obstante, un proceso de modelización aritmética muy eficaz y sintético. En cada paso se pasa del mundo de las cantidades al de los números naturales, donde se realizan los cálculos, cuyos resultados son interpretados en términos del contexto del problema (160€; 8€; 480€). No hay ningún rasgo propio de razonamiento algebraico por lo que asignamos a esta actividad matemática el nivel 0 de algebrización.

La figura 5 incluye la respuesta del estudiante 2. Este estudiante reconoce en el problema las condiciones de aplicación de los conceptos de multiplicación (4€ al día en 40 días), y de la sustracción ($60 - 40 = 20$; 20 días). El cálculo de la razón, gasto diario (8€ por día) lo realiza con el procedimiento de la regla de tres, simbolizando con la letra x la incógnita. En los siguientes pasos continúa aplicando conceptos y operaciones aritméticas. La intervención del símbolo literal para representar la incógnita es el único rasgo algebraico que pone en juego; para encontrar el valor de dicha incógnita no alcanza a plantear y resolver de manera explícita una ecuación de la forma $Ax = C$. Asignamos un nivel 1 de algebrización a la actividad matemática realizada por el estudiante 2.

Recidió 480 €

Ahorra 4 € al día → en 40 días 160 €

Como le duran 60 días, con esos 160 € come

20 días. $60 - 40 = \underline{20 \text{ días}}$.. Hacemos una regla

de 3: $\left.\begin{array}{l} 20 \text{ días} \rightarrow 160 \text{ €} \\ 1 \text{ día} \rightarrow x \end{array}\right|$ $x = 8$ € → gasta al día.

$\underbrace{40 \text{ días} \times 8 \text{ €} = 320 \text{ €}}_{40 \text{ días}} + \underbrace{160 \text{ €}}_{20 \text{ días}} = \underbrace{\boxed{480 \text{ €}}}_{60 \text{ días}}$

Figura 5. Respuesta del estudiante 2

La figura 6 incluye la respuesta del estudiante 3. Este estudiante simboliza con la letra x el gasto diario previsto inicialmente para los 40 días, y el gasto diario efectivamente realizado mediante $x - 4$. Es capaz de plantear una ecuación que relaciona los valores numéricos de las medidas de las cantidades que intervienen. A continuación aplica un procedimiento algorítmico para despejar la incógnita y hallar su valor (x =12 € recibe inicialmente para comer un día). Se trata de una modelización claramente algebraica (nivel 3).

$40x = 60(x-4)$

$40x = 60x - 240$

$240 = 60x - 40x$

$240 = 20x$

$x = \frac{240}{20} = 12$ € recibe inicialmente para comer un día

En total recibe: $12 \times 40 = 480$ €

Figura 6. Respuesta del estudiante 3

En la tabla 1 indicamos la incidencia de los niveles de algebrización en la muestra de 140 estudiantes a los cuales se les aplicó este problema, tanto en el caso de respuestas correctas como incorrectas.

Tabla 1. *Frecuencias (y porcentajes) de respuestas al problema según niveles de RAE (n = 140)*

Niveles de algebrización	*Correctas*	*%*	*Incorrectas*	*%*	*Total*	*%*
0	64	63,4	24	61,5	88	62,9
1	25	24,8	10	25,6	35	25,0
2	0	0	1	2.56	1	0,7
3	12	11,8	4	10,3	16	11,4
Total	101	100	39	100	140	100,0

Es necesario aclarar que los datos de la tabla 1 no describen perfiles cognitivos de los sujetos con relación al razonamiento algebraico elemental, esto es, no son indicativos de estadios de desarrollo cognitivo ante una clase de tareas matemáticas. Ello requeriría aplicar una muestra representativa de tareas y estudiar determinadas invariancias en los tipos de respuestas del sujeto. Aunque un porcentaje elevado de los estudiantes muestran un cierto anclaje en el uso del cálculo aritmético, dado que la tarea se puede resolver fácilmente de ese modo, otros estudiantes ponen en juego algunos rasgos de razonamiento proto-algebraico, o bien realizan claramente una modelización algebraica. La discusión con los estudiantes de estas diferentes aproximaciones a la resolución de la tarea permitió al formador iniciar la reflexión sobre los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental.

7. SÍNTESIS, CONEXIONES CON OTROS MODELOS E IMPLICACIONES

En este trabajo hemos presentado indicadores de la actividad matemática organizados en niveles progresivos de algebrización. Es necesario reconocer que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podrían llevar a proponer nuevos niveles. Sin embargo, nuestra propuesta puede ser útil para orientar la acción del maestro de primaria que trate de impulsar la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia representacional y operatoria.

En la tabla 2 resumimos las características esenciales de los cuatro niveles de algebrización identificados, que hemos descrito y ejemplificado en las secciones previas de este trabajo, y que nos permiten distinguir tres niveles de razonamiento algebraico elemental.

En síntesis proponemos utilizar tres criterios para distinguir los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE):

1. La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
2. El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales.
3. Tipo de lenguajes usados.

Los niveles de algebrización que proponemos están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico: A) El álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones; B) El álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales. El aspecto A se concreta en nuestro modelo en dos niveles proto-algebraicos de razonamiento, mientras que el B se asociada a un nivel algebraico consolidado. Los niveles de algebrización que describiremos son también interpretables en términos de “capas de generalidad” que describe Radford (2011, p. 311).

Nuestro requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir “lo algebraico”. Puig y Rojano (2004, p. 198) incluyen entre otras las siguientes características:

- El uso de un sistema de signos para resolver problemas que permita expresar el contenido del enunciado del problema relevante para su solución (su “estructura”), separada de lo que no es relevante.
- La ausencia de compromiso ontológico de los sistemas de signos, que les permitan representar a cualquier tipo de objeto matemático.

- El carácter analítico del uso de los sistemas de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica.

Tabla 2: Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos
2	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal
3	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto

Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico-literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. “Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual” (Filloy, Puig y Rojano, 2008, 93).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como “algebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007) proponemos distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para distinguirlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es “hacer explícita la generalidad”, en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad (Figura 7).

Las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas, que se identifican y describen en diversos trabajos realizados en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Gascón, 1999; Bolea, et al., 2001; Ruiz-Monzón, Bosch y Gascón, 2010; Gascón, 2011) corresponden a tareas y actividades matemáticas que, según nuestra modelización del razonamiento algebraico, tienen ya un carácter algebraico consolidado. Por ejemplo, la primera etapa del proceso de algebrización que describen Ruiz-Monzón, Bosch y Gascón (2010), consistente en la formulación escrita (simbólica) de un “programa de cálculo aritmético”, se corresponde a una actividad matemática del nivel 3 según nuestro modelo.

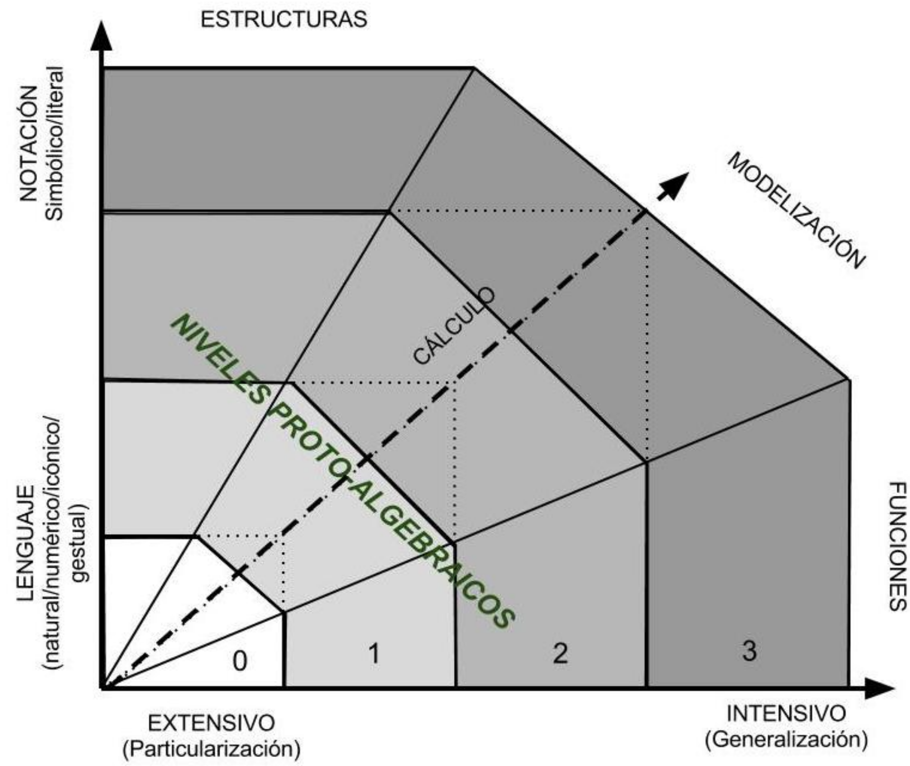

Figura 7. Niveles proto-algebraicos de razonamiento matemático

Los tipos de objetos y procesos algebraicos considerados en el modelo descrito en este trabajo suponen un análisis microscópico complementario al abordado mediante la noción de praxeología. De hecho, el modelo propuesto permite un estudio pormenorizado de los comportamientos de los sujetos, que excede el carácter institucional abordado desde la identificación de las praxeologías matemáticas y didácticas. Además, al incluir nuestro modelo niveles proto-algebraicos, está más adaptado a etapas donde el razonamiento algebraico es incipiente (tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria), mientras que los sucesivos niveles del proceso de algebrización propuestos desde la Teoría antropológica de lo didáctico en los trabajos citados, están más centrados en la caracterización del razonamiento algebraico en niveles educativos superiores.

Si queremos desarrollar el razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. Como afirma Radford (2011, 319), "El pensamiento algebraico es de ninguna manera 'natural', algo que aparecerá y se desarrollará una vez que los estudiantes haya madurado bastante. El pensamiento algebraico es un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que fue refinado sucesivamente a lo largo de siglos antes que alcanzara su forma actual". No basta con elaborar propuestas curriculares (por ejemplo, NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos. Es necesario que los maestros participen de la visión ampliada del álgebra que proponen diversas investigaciones y experiencias didácticas (Carpenter, Frankle y Levi, 2003; Molina, 2009; Cai y Knuth, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

La distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental que hemos descrito en este trabajo, junto con los ejemplos ilustrativos de los mismos, puede ser útil en la formación matemática de maestros de educación primaria. El estudio y discusión de ejemplos similares a los presentados en este trabajo puede permitir el desarrollo en los maestros de un *sentido algebraico,* al permitir reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Este sentido algebraico se puede entender, de acuerdo con el modelo presentado en este trabajo, como la capacidad de un sujeto para,

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
- Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

RECONOCIMIENTO

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLEA, P., BOSCH, M. Y GASCÓN, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (3), 247-304.

CAI, J. y KNUTH, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

CARPENTER, T. P., FRANKLE, M. L. y LEVI, L.(2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

CARPENTER, TH. P., LEVI, L., FRANKE, M. L. y ZERINGUE, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, 37 (1), 53-59.

CARRAHER, D. W. y SCHLIEMANN, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

CARRAHER, D. W., MARTÍNEZ, M. V. y SCHLIEMANN. A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

COOPER, T. J. y WARREN, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.

FILLOY, E., PUIG, L. y ROJANO, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach.* New York: Springer.

GASCÓN, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática,* 11(1), 77-88.

GASCÓN, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14* (2), 203-231.

GODINO, J. D., CASTRO, W., AKÉ, L. y WILHELMI, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26 (42B).*

GODINO, J. D. y FONT, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

GODINO, J. D., FONT, V., WILHELMI, M. R. y LURDUY, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.

KAPUT, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

KIERAN, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

MOLINA, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

MASON, J., y PIMM, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principios y estándares 2000*. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales), 2003.

PUIG, L., y ROJANO, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

RADFORD, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

RADFORD, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En, J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education.* (pp. 303-322). Berlin: Springer-Verlag.

RUIZ-MONZÓN, N., BOSCH, M., y GASCÓN, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

INFORMACIÓN SOBRE LOS AUTORES

JUAN D. GODINO. Catedrático de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Correo electrónico: jgodino@ugr.es

LILIA P. AKÉ. Becaria MAE-AECI. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Correo electrónico: lpake@ugr.es

MARGHERITA GONZATO. Becaria FPU. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Correo electrónico: mgonzato@ugr.es

MIGUEL R. WILHELMI. Profesor Contratado Doctor. Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra. Correo electrónico: miguelr.wilhelmi@unavarra.es