MODELO PARA EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Vicenç Font, Universidad de Barcelona
Núria Planas, Universidad Autónoma de Barcelona
Juan D. Godino, Universidad de Granada

Resumen

La finalidad de este artículo es presentar la viabilidad de un modelo teórico para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho modelo contempla cinco niveles de análisis, los cuales son aplicados conjuntamente a un episodio de clase. Este modelo se ha elaborado para describir (¿qué ha ocurrido aquí?), explicar (¿por qué ha ocurrido?) y valorar (¿qué se podría mejorar?) procesos de instrucción en el aula de matemáticas. Nos basamos en una síntesis teórica de aspectos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, que venimos desarrollando desde hace una década. Aunque algunas partes del modelo son específicas de la actividad matemática, investigadores de otras áreas educativas pueden adaptarlas de modo que resulten eficaces en el análisis didáctico de otros tipos de prácticas escolares. El principal resultado esperado de la aplicación del modelo es llegar a una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

Palabras clave: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, enfoque ontosemiótico, prácticas de aula, objetos y procesos matemáticos, normas, conflictos semióticos, idoneidad didáctica.

Abstract

A model for the study of mathematics teaching and learning processes

The aim of this paper is to present the viability of a theoretical model for the analysis of processes of teaching and learning mathematics. It is a model with five levels of analysis that are jointly applied to a classroom episode. We have constructed the model in order to describe (what has happened here?), explain (why has it happened?) and value (what could be improved?) classroom mathematical instructional processes. We draw on the onto-semiotic approach to the mathematical knowledge and instruction. Although some parts of the model are related to the mathematical activity, researchers from other educational areas may effectively adapt them when doing a didactical analysis of other types of school practises. The main expected result from the application of the model is a grounded evaluation about the didactical sustainability of study processes that have been carried out in the mathematics classroom.

Key words: *Teaching and learning of mathematics, onto-semiotic approach, classroom practices, mathematical objects and processes, norms, semiotic conflicts, didactical suitability.*

1. INTRODUCCIÓN

En Coll y Sánchez (2008), se discuten aspectos básicos a tener en cuenta en el desarrollo de modelos para el análisis de la interacción y la práctica educativa en el aula. Hemos tenido en cuenta este trabajo en la organización del presente escrito sobre un modelo para el análisis de procesos de

[1] Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (en prensa). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2) (aceptado)

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de un modelo teórico, compuesto por cinco niveles, elaborado para describir, explicar y valorar procesos de instrucción matemática. La finalidad de este artículo es presentar la viabilidad de aplicar conjuntamente los cinco niveles de análisis, utilizando como contexto de reflexión un episodio de clase. En primer lugar, presentamos herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder “¿qué ha ocurrido aquí y por qué?”. En segundo lugar, presentamos herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder “¿qué se podría mejorar?”. Entendemos que el estudio de aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar valoraciones fundamentadas.

Nuestro marco teórico de referencia es básicamente el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (D’Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006; Ramos y Font, 2008). Este marco trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos (Bloor, 1983; Chevallard, 1992) y semióticos (Radford, Schubring y Seeger, 2008) sobre las matemáticas, adoptando principios didácticos de tipo socioconstructivista (Ernest, 1998) e interaccionista (Cobb y Bauersfeld, 1995) para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estructuramos el artículo en seis apartados, el primero de los cuales es esta introducción. En el segundo apartado introducimos los niveles de análisis didáctico. En el tercero presentamos la transcripción de un episodio breve de clase que vamos a utilizar para ejemplificar nuestro modelo. En el siguiente apartado aplicamos los niveles descriptivos y explicativos al análisis del episodio de clase. A continuación aplicamos el nivel valorativo y, por último, terminamos con algunas reflexiones sobre la aplicación del modelo de análisis propuesto en la formación de profesores de matemáticas. La reflexión de los profesores sobre su propia práctica docente es un requisito importante para la mejora efectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Schön, 1983). Dicha reflexión debe ser sistemática, teniendo en cuenta las diversas facetas implicadas y tipos de conocimientos requeridos (conocimiento profundo del contenido especializado, de los estudiantes y de las interacciones en el aula, entre otros). Las herramientas teóricas presentadas en este trabajo, convenientemente adaptadas, pueden ser usadas por el profesorado para fundamentar cambios y mejoras. Aunque algunas partes del modelo son específicas de la actividad matemática, investigadores de otras áreas educativas pueden adaptarlas de modo que resulten eficaces en el análisis didáctico de otros tipos de prácticas escolares.

2 ¿QUÉ ANALIZAMOS?

En diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (D’Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) se han propuesto cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática. Por ejemplo, el nivel 4 se propone para integrar aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática (Civil y Planas, 2004; Planas y Civil, 2009; Yackel y Cobb, 1996). Hasta el momento, desde el enfoque ontosemiótico se han realizado análisis didácticos a episodios de aula

pero no se han aplicado conjuntamente todos los niveles anteriores a un mismo proceso de instrucción. Por ejemplo, en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se han aplicado parcialmente los niveles 1 y 2 al estudio de una lección de un libro de texto sobre los conceptos de suma y resta. En Font, Godino y Contreras (2008) se han aplicado los niveles 1 y 2 al análisis de una tarea de aula para justificar la derivada de la función $f(x) = x^2$. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) se ha aplicado el nivel 5 a una sesión de clase para la enseñanza de la noción de función con estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería.
Los niveles de análisis propuestos por el enfoque ontosemiótico están pensados para el desarrollo de un análisis completo que permita describir, explicar y valorar procesos de instrucción. Sin embargo, la profundización en el análisis de algunos de los niveles está muy condicionada por el tipo de episodio. En cuanto al nivel 5, para valorar la idoneidad didáctica global de un proceso de instrucción (de acuerdo con la noción de idoneidad didáctica desarrollada en Godino, Bencomo *et al.*, 2006), se necesita disponer de un análisis longitudinal previo y amplio que el análisis de los niveles 1, 2, 3 y 4 aplicados a un episodio breve de aula no proporciona. Esto no excluye que sea posible realizar una valoración parcial de la idoneidad de un proceso de instrucción puntual, teniendo en cuenta por ejemplo la idoneidad de la interacción observada en la aplicación del nivel 3. En cuanto al nivel 4, puesto que las normas se infieren de regularidades observadas en el proceso de instrucción, su identificación en un episodio breve no deja de ser cuestionable por no informar sobre la recurrencia en el tiempo; a pesar de ello, se puede hacer una inferencia plausible de normas teniendo en cuenta datos obtenidos al aplicar los niveles 1, 2 y 3 y asumiendo el carácter local de estos datos.

En este artículo, proponemos mostrar la viabilidad de aplicar conjuntamente los cinco niveles utilizando como contexto de reflexión el análisis del episodio ya presentado. Para ello, adaptamos los niveles del enfoque ontosemiótico:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.
Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.
Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.
Nivel 4. Identificación de normas.
Nivel 5. Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción.

Para un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas. La realización de una práctica moviliza elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, es necesario considerar, entre otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas; de ello se encarga el nivel 2. La finalidad de este segundo nivel de análisis es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, así como de tipologías de unos y otros.
Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis didáctico debiera progresar desde la situación-problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1) a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2) y, de ahí, hacia el estudio de las interacciones entre profesor y alumnos. En nuestro caso y dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de instrucción, para el nivel 3 nos centramos en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico de fácil identificación, siguiendo el procedimiento usado en Planas e Iranzo (2009). En el nivel 4 consideramos que prácticas matemáticas e interacciones están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas.

Los cuatro niveles de análisis descritos son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa en tanto que sirven para comprender y responder a la pregunta '¿qué ha ocurrido aquí y por qué?'. Sin embargo, no evalúan la pertinencia del proceso de instrucción matemática ni determinan pautas para la mejora del diseño y de la implementación de este proceso. La didáctica de la matemática no debería limitarse a la mera descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de instrucción. Son necesarios, por tanto, criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora. El nivel 5 se ocupa de este análisis de tipo valorativo.

Las nociones teóricas mencionadas en la descripción de los distintos niveles de análisis serán introducidas en los siguientes apartados, aplicadas al caso de un episodio de clase perteneciente a un proceso de instrucción en el que un profesor interactúa con un grupo de estudiantes que resuelven un problema sobre proporcionalidad.

3. EL EPISODIO

El episodio de aula (ver su transcripción en la Tabla 1) tiene lugar en una clase de matemáticas con 21 estudiantes de 15 y 16 años (enseñanza obligatoria) de una escuela pública en Barcelona, España. Este mismo episodio ha sido analizado con otros objetivos en Planas y Civil (2002, 2004). El profesor tiene 19 años de experiencia docente, los tres últimos en la escuela actual, considerada por la Administración como centro de atención educativa preferente. Nuestro episodio, de 10 minutos aproximadamente, ocurre durante la segunda semana de clases al inicio del primer semestre del año escolar. Es la primera lección donde el profesor propone la dinámica de resolver un problema en pequeños grupos y llevar a cabo una puesta en común. El enunciado del problema (escrito en una hoja para cada grupo) menciona dos barrios de la ciudad, uno cercano a la escuela. En la Figura 1, por cuestiones de anonimato, sustituimos el nombre de los barrios por B1 y B2. El curso pasado, estos alumnos habían trabajado temas de proporcionalidad y de resolución de ecuaciones. Se supone, por tanto, que tienen los conocimientos y las habilidades matemáticas requeridas para resolver la tarea; disponen, además, de calculadoras.

Aquí tienes la población y el área de dos barrios de Barcelona.

Barrio 1 (B1)	*Barrio 2 (B2)*
65.075 habitantes	190.030 habitantes
7 km^2	5 km^2

(i) Discute en cuál de estos dos lugares se vive más espaciosamente.

(ii) Encuentra cuánta gente debería trasladarse de un barrio a otro para que en ambos se viviera igual de espaciosamente.

Figura 1. Enunciado del problema

El episodio se inicia después de que Alicia (A), Emilio (E) y Mateo (M), miembros de un grupo, le hayan dicho al profesor (P) que no han consensuado una solución común al problema. El episodio termina cuando el profesor deja de explorar las ideas de este grupo e interpela a otros grupos para que participen. Alicia, Emilio y Mateo se han agrupado libremente al inicio de la sesión y han estado trabajando juntos durante unos 30 minutos hasta el momento de la puesta en común, fase a la que pertenece el episodio.

Tabla 1. Transcripción del episodio

Representación escrita del discurso de la clase		
1	*A*:	Este problema es de densidades porque los datos son sobre densidades.
2	*P:*	De acuerdo. Decidle a Alicia que necesita explicarse mejor. [A Alicia] Sabemos que sabes mucho, pero…
3	*A*:	En B1 [dice el nombre del barrio] la densidad es menor que en B2 [dice el nombre del barrio]. Eso es todo.
4	*P:*	Emilio dice que no.
5	*E*:	¡Yo no lo entiendo! Hay algo que falta.
6	*P:*	[A Emilio] ¿Cómo lo has resuelto?
7	*E*:	Está claro que aquí [señala B2 en el papel] hay más personas y menos espacio. Yo he estado allí. Los pisos son muy pequeños.
8	P:	De acuerdo. Lo que tú dices está claro, pero entonces cómo respondes a la segunda pregunta.
9	*E*:	La segunda pregunta está mal.
10	*P:*	¿Por qué?
11	*E:*	Yo no me mudaría solo, lo haría con toda mi familia.
12	*P:*	¿A qué te refieres?
13	*E*:	Yo cambiaría la segunda pregunta.
14	*P:*	¡No empieces de nuevo, Emilio! Tú sabes que los problemas son como son.
15	*M*:	A mí no me importa cambiar la pregunta, pero si la cambias, no practicaremos las mates que el profesor quiere que practiquemos. Puedes hacerlo por ensayo y error, primero empieza con cincuenta mil personas.
16	*A*:	¡Eso no es matemático!
17	*E*:	¿Por qué no es matemático?
18	*P:*	Mejor que continuemos. Alicia, ¿cuál es tu opinión?
19	*A*:	Ya lo he dicho. Es un problema de densidades.
20	*P:*	Sabes de lo que hablas, pero no te cansas…
21	*A*:	¿Voy a la pizarra?
22	*P:*	[El profesor asiente]
23	*A*:	[En la pizarra] $\frac{65075}{7} \rightarrow \frac{65072}{7} = 9296 h/km^2$ en B1 $\frac{190030}{5} = 38006\ h/km^2$ en B2; 9296<38006
24	*P:*	De acuerdo. Necesitamos comparar los dos barrios. Estos números no significan nada si no los comparamos.
25	*A*:	Este número [señala 9296] es…
26	*E*:	Hemos colocado algunas personas aquí y otras allí.
27	*A*:	¡Déjame terminar! Nueve mil doscientos noventa y seis es más pequeño que este número [señala 38006]. Esto significa que en B1 [dice el nombre] se vive más espaciosamente.
28	*P:*	De acuerdo.
29	*A*:	Ahora veamos la ecuación. [En la pizarra] $\frac{190\,030 - x}{5} = \frac{65\,072 + x}{7}; 38\,006 - \frac{x}{5} = 9\,296 + \frac{x}{7};\ 38\,006 - 9\,296 = \frac{x}{5} + \frac{x}{7};$ $28710 = \frac{12x}{35}; x = \frac{28710 \cdot 35}{12}; x = 83737{,}5 \rightarrow 83737$ *personas*
30	*P:*	Alicia, tienes que explicar qué has hecho y por qué.
31	*E*:	Yo no entiendo por qué cambia sesenta y cinco mil setenta y cinco por sesenta y cinco mil setenta y dos.
32	*P:*	¿Alicia? ¿Por qué sustituyes este número?
33	*A*:	[Regresa a su sitio] Yo ya he explicado mi propuesta, ahora que hablen ellos.
34	*M*:	No creo que necesitemos hacer una ecuación. ¿Por qué no probamos con diferentes números? ¿No necesitamos ser exactos aquí, verdad?
35	*P:*	Veamos de nuevo la propuesta de Alicia. [A Emilio] ¿Aún quieres cambiar la segunda pregunta?
36	*E*:	Todos conocemos estos barrios, ¿no es extraño lo que ella dice?¿Por qué tenemos que usar densidades y ecuaciones?
37	*M*:	[Al profesor] ¿Por qué ha movido tres personas de aquí [señala 65072 en la pizarra]?
38	*P:*	Mateo, concentrémonos, olvídate ahora de las personas y piensa solo en la fracción. ¿Es sesenta y cinco mil setenta y cinco múltiplo de siete?

39	*M*:	No.
40	*P:*	¡De eso se trata! Sesenta y cinco mil setenta y dos es múltiplo de siete y sesenta y cinco mil setenta y cinco no. Ahora podemos hacer la división exacta [muestra la calculadora].
41	*M*:	¡Pero no se trata de múltiplos, son personas!
42	*E*:	En la última operación ella no ha mirado los múltiplos ¿verdad?
43	*A*:	Esto no es importante.
44	*P:*	¿Ves cómo ha resuelto la ecuación?
45	*M*:	Sí
46	*P:*	Esto es lo importante.
47	*M*:	¿Podemos dar una respuesta aproximada?
48	*A*:	Por favor, esto no es importante.
49	*M*:	¿Copiamos la ecuación?
50	*P:*	Ordenemos nuestras ideas primero. Necesitamos calcular las densidades y luego necesitamos que sean iguales. Esta es una propuesta. ¿Y vosotros qué [mirando a otro grupo]? ¿Cuál es vuestra solución?

4. ¿CÓMO ANALIZAMOS?

A continuación describimos brevemente aspectos teóricos de los cuatro primeros niveles de análisis y los aplicamos al episodio de clase.

4.1 Identificación de prácticas matemáticas

Suponemos que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, sobre todo, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Desde esta perspectiva, entendemos el discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar, en el estudiante, un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) que el profesor pueda considerar como matemática. De acuerdo con esto, consideramos la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

El primer nivel de análisis se orienta a identificar prácticas matemáticas realizadas en el episodio de clase. En dicho episodio se propone una situación-problema de contexto extramatemático cuya resolución implica, entre otros, el uso del concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades (ver Figura 1). La Tabla 2 recoge las prácticas matemáticas más relevantes.

Tabla 2. Identificación de prácticas matemáticas

Alicia - Lee y entiende el enunciado del problema - Resuelve el apartado (i) del problema aplicando el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades. - Resuelve el apartado (ii) del problema planteando y resolviendo una ecuación. - Contextualiza y da sentido a la solución hallada redondeando el resultado.
Emilio - Lee y entiende el enunciado del problema. Por otra parte, cuestiona el apartado (ii) - Resuelve el apartado (i) mediante un razonamiento de tipo intuitivo y vivencial usando su conocimiento de los barrios citados en el problema. - Sigue las explicaciones de Alicia y observa una contradicción entre la resolución de (i) y (ii).
Mateo - Lee y entiende el enunciado del problema - Propone una resolución por ensayo y error, aunque no aplica este método. - Propone la aceptación de soluciones aproximadas.

Profesor - Considera el papel del contexto extramatemático en matemáticas. - Valida la argumentación de Alicia e interviene para completar explicaciones de esta alumna sobre la sustitución de 65075 por 65072. - Reconduce propuestas de aproximación al problema de Emilio y Mateo.

Alicia realiza mayoritariamente las prácticas matemáticas del episodio. Esta alumna resuelve el apartado (i) del problema aplicando el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades y el apartado (ii) planteando y resolviendo una ecuación. A petición del profesor, contextualiza *a posteriori* el uso de los objetos anteriores en una situación extramatemática y, en base a ello, da sentido a la solución hallada, aunque sin ubicarse "dentro" de la situación, como sus compañeros de grupo.

Emilio realiza la práctica de resolver el apartado (i) con un razonamiento que puede considerarse intuitivo y vivencial al aplicar su "conocimiento del mundo" (en este caso su conocimiento de los barrios citados en el problema). Discrepa de la resolución que hace Alicia, pero se puede inferir que sigue sus explicaciones ya que le hace observar una contradicción entre las maneras como ha resuelto (i) y (ii) [42]. Por su parte, Mateo sugiere la posibilidad de resolver el problema por ensayo y error y de hallar respuestas aproximadas, sin llegar a aplicar este método ni aportar ninguna solución concreta.

El profesor interviene principalmente para gestionar los turnos de intervención. Desde el punto de vista de las prácticas matemáticas, sus intervenciones son sobre todo metamatemáticas (e.g., consideraciones sobre el papel del contexto extramatemático en el aula de matemáticas, validación de la argumentación de Alicia, rechazo de las propuestas de no exactitud de Mateo y de reformulación del problema de Emilio), aunque en una ocasión contribuye a completar una explicación de Alicia explicando el motivo por el cual esta alumna ha sustituido 65075 por 65072.

4.2. Identificación de objetos y procesos matemáticos

Objetos matemáticos

Para realizar una práctica matemática, el agente necesita conocimientos que son básicos tanto para su realización como para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el agente tenga para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema (e.g., primero plantear y después resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos que ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (e.g, solución, ecuación) y simbólico (e.g., x, =). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos (e.g., ecuación, solución), proposiciones (e.g., si se suma el mismo término a los dos miembros de la ecuación se obtiene una ecuación equivalente) y procedimientos (e.g., resolución por sustitución, por igualación) a utilizar en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias. Consideramos que cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos de los objetos citados anteriormente (o todos): situaciones-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos tipos de objetos se articulan formando la configuración de la Figura 2 (Font y Godino, 2006, p. 69). A continuación, aplicamos esta herramienta para conocer los objetos activados en la práctica matemática del episodio.

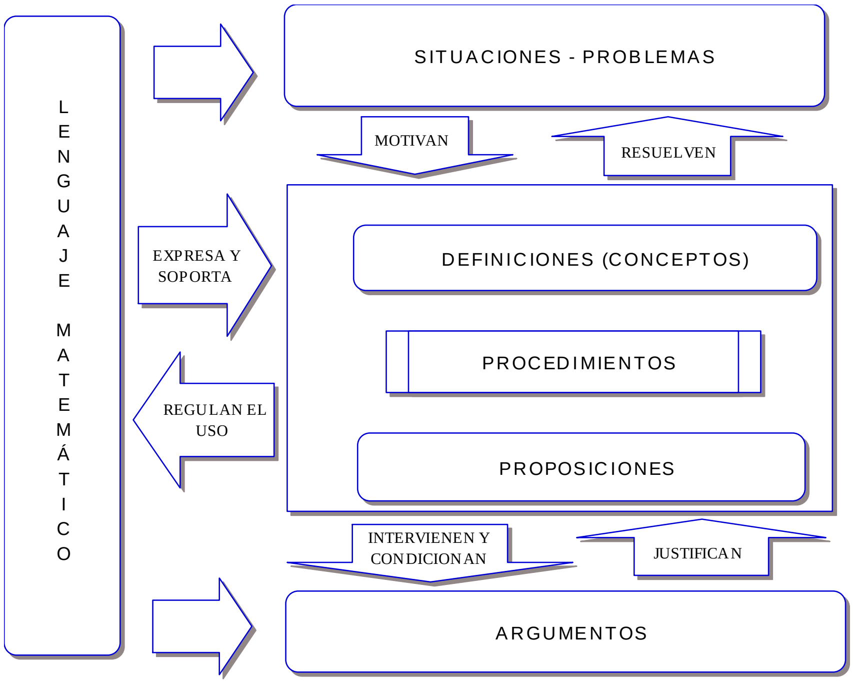

Figura 2. Configuración de objetos

Tabla 3. Identificación de objetos matemáticos

Lenguaje - A: (verbal) densidad, menor, ecuación, número, nueve mil doscientos noventa y seis; (simbólico) las fracciones, decimales, unidades de densidad, ecuaciones y desigualdades de la Tabla 1, →. - P: (verbal) múltiplo, división exacta, números, fracción, siete, sesenta y cinco mil setenta y cinco, sesenta y cinco mil setenta y dos, ecuación, calcular, iguales; (simbólico) 65075, 190030, 7, 5, km^2. - M: (verbal) cincuenta mil, ecuación, tres, múltiplos. - E: (verbal) más… menos, sesenta y cinco mil setenta y cinco, sesenta y cinco mil setenta y dos, densidades, ecuaciones, operación, múltiplos.
Conceptos - A: densidad, mayor y menor, fracción, decimal, incógnita, ecuación. - P: múltiplo, problema, número, fracción, múltiplo, división exacta, ecuación, densidad. - M: ecuación, solución exacta de una ecuación, respuesta aproximada a un problema, múltiplo. - E: densidades, ecuaciones, operación, múltiplos.
Proposiciones - A: es un problema de densidades; en B1 la densidad es menor que en B2; nueve mil doscientos noventa y seis es más pequeño que este número; esto significa que en B1 se vive más espaciosamente. - P: sesenta y cinco mil setenta y dos es múltiplo de siete y sesenta y cinco mil setenta y cinco no; ahora podemos hacer la división exacta; necesitamos comparar los dos barrios; necesitamos calcular las densidades y luego necesitamos que sean iguales - E: está claro que aquí hay más personas y menos espacio; hemos colocado algunas personas aquí y otras allí; en la última operación ella no ha mirado los múltiplos. - M: puedes hacerlo por ensayo y error, primero empieza con cincuenta mil personas; pero no se trata de múltiplos, son personas; no creo que necesitemos hacer una ecuación.

Procedimientos - A: dividir, redondeo de números, cálculo de densidades, comparación de números que representan densidades, resolución de ecuaciones, traducción de lenguaje verbal a algebraico, planteamiento de ecuaciones. - P: determinar si un número es múltiplo de otro. - M: ensayo y error (se cita pero no se aplica).
Argumentos A: Es un problema de densidades - En los problemas de densidades los datos son densidades. - En este problema los datos son densidades. En B1 la densidad es menor que en B2. - 65075 puede sustituirse por 65072. - Dividiendo el número de habitantes por el de km^2 se obtiene que la densidad en B1 es 9296 h/km^2. - Dividiendo el número de habitantes por el número de km^2 se obtiene que la densidad en B2 es 38006 h/km^2. - 9296 es menor que 38006. Esto significa que en B1 se vive más espaciosamente. - Si la densidad de un barrio es menor que la del otro, eso quiere decir que en el de menor densidad se vive más espaciosamente. - En B1 la densidad es menor que en B2. [Si se trasladan 83737 personas de B2 a B1 los dos tendrán la misma densidad]. - Planteamiento y resolución de una ecuación. E: Está claro que aquí hay más personas y menos espacio. - Yo he estado allí. Los pisos son muy pequeños.

Las Tablas 3 y 4 no pretenden recoger de forma exhaustiva los objetos y procesos matemáticos de la configuración asociada al episodio. Identificamos los objetos y procesos que consideramos más relevantes en el desarrollo del proceso de instrucción matemática, agrupándolos en función de quién (A, P, M, E) los introduce.

Procesos matemáticos

La configuración de la Figura 2 informa sobre la “anatomía” de la actividad matemática en un episodio de clase. Si además de la “estructura” interesa el “funcionamiento” (cómo interactúan los objetos) en una perspectiva temporal y dinámica conviene utilizar la tipología de procesos propuestos por el enfoque ontosemiótico para el conocimiento matemático. La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), como se observa en el hexágono de la Figura 3. Estos tipos de objetos pueden considerarse en base a cinco dimensiones duales (ver decágono de la Figura 3): personal/institucional, unitaria/sistémica expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva. Estas dimensiones duales pueden analizarse desde una perspectiva de producto-proceso.

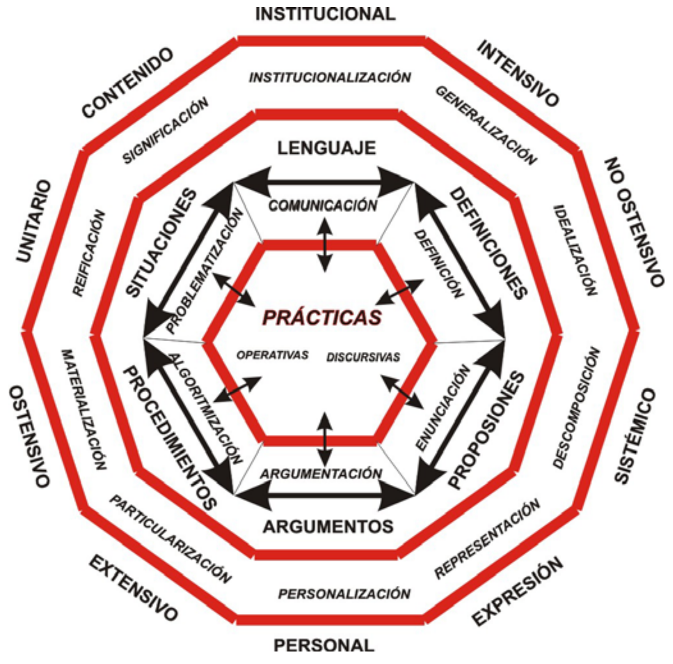

Figura 3. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático

En Font y Contreras (2008) y Font, Godino y Contreras (2008) se detallan los dieciséis procesos matemáticos de la Figura 3: procesos de generalización-particularización, institucionalización-personalización, representación-significación, descomposición-reificación, idealización-materialización (asociados a las cinco dimensiones duales) y procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización (asociados a los objetos matemáticos identificados en el proceso de instrucción que se analiza). Esta lista es una selección de procesos que consideramos relevantes en la actividad matemática. Otros procesos, igualmente relevantes, como los procesos de comprensión, de modelización o de resolución de problemas, pueden entenderse como mega-procesos que incluyen algunos de los tipos anteriores.

La Tabla 4 recoge procesos matemáticos identificados en el episodio. Se observa un proceso de institucionalización de la solución del problema que propone Alicia. En la trayectoria argumentativa que lleva a dicha institucionalización, alumnos y profesor adoptan tanto el papel de proponente como el de oponente. Alicia realiza un proceso de generalización al considerar el problema un caso particular de un problema más general [1, 19]. En [3] hace un proceso de enunciación de una proposición sin ninguna justificación. A instancias del profesor, realiza un proceso de argumentación [23, 27, 29]: en [23] escribe en la pizarra (proceso de representación y materialización) signos matemáticos que un observador experto puede interpretar como el uso del concepto de densidad y de procedimientos como son, entre otros, la división y la comparación de densidades; en [27] realiza un proceso de enunciación y comunicación de una proposición que un observador experto puede interpretar como la inferencia que se obtiene de aplicar el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades; en [29] vuelve a escribir en la pizarra (proceso de representación y materialización) signos matemáticos que un observador experto puede interpretar como (a) el planteamiento de una ecuación y (b) su resolución.

Tabla 4. Identificación de procesos matemáticos

Alicia - Proceso de *generalización* [1, 19] cuando considera que el problema es un caso particular de un problema más general. - Proceso de *enunciación* de una proposición [3]. - Proceso de *argumentación* [23, 27, 29].

- Proceso de *representación* y *materialización* [23] al escribir en la pizarra signos matemáticos interpretables como el uso del concepto de densidad y de procedimientos de comparación de densidades. - Proceso de *enunciación* y *comunicación* de una proposición [27] interpretable como la inferencia que se obtiene de aplicar el concepto de densidad y el procedimiento de comparaciones de densidades, y como un uso contextualizado y correcto de la solución. - Proceso de *representación* y *materialización* [29] al escribir signos matemáticos interpretables como el planteamiento y resolución de una ecuación.
Emilio - Proceso de *enunciación* de una proposición [7] sobre la interpretación del enunciado. - Proceso de *argumentación* [11, 16] basado en el conocimiento del contexto extramatemático del problema.
Mateo - Proceso de *comunicación* [15] al plantear la posibilidad de resolver el problema por el método de ensayo y error. - Proceso de *comunicación* [34] al plantear la posibilidad de buscar soluciones aproximadas al problema.
Profesor - Proceso de *institucionalización* [todas sus turnos y en especial la 50] de la solución del problema. - Proceso de *argumentación* [40] para resolver dudas de Emilio y Mateo. - Proceso de *idealización* [38] cuando pide prestar atención a las fracciones por delante de las personas.

Emilio hace un proceso de enunciación de una proposición [7] y después [11, 16] realiza procesos de argumentación basados en su conocimiento del contexto extramatemático del problema. Por su parte, Mateo hace dos procesos de comunicación [15, 34] cuando plantea, respectivamente, la posibilidad de resolver el problema por el método de ensayo y error y la de obtener soluciones aproximadas. En cuanto al profesor, en prácticamente todas sus intervenciones gestiona el proceso de institucionalización de la solución hallada, dedicando solo algún momento a procesos de argumentación para solventar dudas de alumnos. En la transcripción, profesor y alumnos llevan a cabo procesos de valoración [8, 9, 16, 20, 24, 46] que están sustentados por normas y metanormas. En el cuarto nivel de análisis realizamos el estudio de este tipo de procesos no incluido en la Figura 3.

4.3. Descripción de interacciones en torno a conflictos

Fijada una situación problema y haciendo uso de una tecnología, el profesor y los estudiantes emprenden una secuencia de actividades en interacción con el fin de lograr que los alumnos sean capaces de resolver esa situación y otras relacionadas. Llamamos configuración didáctica a la secuencia interactiva que tiene lugar a propósito de una situación problema. Una configuración didáctica se compone de una configuración epistémica, esto es, una situación problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien distribuirse entre ambos en interacción. El profesor puede desempeñar, por ejemplo, las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación y evaluación, mientras que el alumno puede desempeñar, entre otras, las funciones de exploración, comunicación, validación, recepción y autoevaluación.

Dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de instrucción, a veces conviene centrarse en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico. De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007) entendemos por conflicto semiótico cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones. En el episodio analizado, el primer y seguramente el principal conflicto semiótico se produce cuando el profesor crea un conflicto a Emilio y le dice [8] que el argumento que ha aplicado en (i) no le servirá para contestar (ii), esperando que dicho alumno cambie su argumentación, basada en su conocimiento del contexto extramatemático, por una argumentación “más matemática”. Es de suponer que la intención del profesor es crear una contradicción en el alumno acerca de las prácticas que ha realizado; puesto que la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto hablamos de conflicto semiótico de tipo cognitivo.

Emilio, en lugar de resolver el conflicto semiótico de tipo cognitivo de la manera que parece esperar el profesor, plantea un conflicto entre su “mundo de la vida” y la “clase de matemáticas” [9-14]. De algún modo, Emilio se hace portavoz de una manera válida de resolver el problema en el “mundo de la vida” que contrapone a la resolución válida en el aula de matemáticas cuyo portavoz en este caso es el profesor. Se trata de un conflicto interaccional entre personas, pero se puede interpretar que estas personas proponen prácticas válidas en instituciones diferentes: mundo de la vida y aula de matemáticas. Si la disparidad se produce entre prácticas propias de instituciones diferentes, hablamos de conflicto semiótico de tipo epistémico. La interacción en torno a este conflicto finaliza cuando el profesor apela al principio de autoridad [14]. Emilio, sin embargo, vuelve a manifestar este conflicto en [36].

También se produce un conflicto semiótico de tipo interaccional cuando Alicia y Mateo discrepan sobre si el procedimiento de ensayo y error se puede considerar “matemático” [16-17]. La intervención del profesor interrumpiendo la discusión deja este conflicto abierto [18], volviendo a aparecer posteriormente [34]. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas de dos sujetos diferentes en interacción social hablamos de conflicto semiótico de tipo interaccional. Los tipos de conflicto semiótico introducidos no son excluyentes puesto que un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro en función de la perspectiva que se adopte. Por ejemplo, el conflicto epistémico entre Emilio y el profesor también es un conflicto interaccional y los conflictos cognitivos de una persona a menudo son resultado de interacciones sociales generadoras de conflicto.

En [31] Emilio expresa un conflicto de tipo interaccional puesto que no entiende un paso de lo que ha escrito Alicia en la pizarra (el cambio de 65075 por 65072). Mateo vuelve a expresar este conflicto en [37], que el profesor pretende resolver en [38-40]. El intento de resolución por parte del profesor hace rebrotar los dos conflictos anteriores siendo ambos manifestados ahora por Mateo, el epistémico en [41] y el interaccional en torno al uso del ensayo y error y las soluciones aproximadas en [47]. Finalmente, en [42] Emilio contribuye a provocar un conflicto semiótico de tipo cognitivo en Alicia al hacerle observar que no ha sido coherente en la resolución de (i) y (ii). Alicia [43] y el profesor [44] niegan la importancia del conflicto señalado por Emilio.

4.4. Identificación de normas

La actividad matemática en el aula tiene una dimensión social ya que la clase es una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor. En consecuencia, el aprendizaje matemático está condicionado por metaconocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas sociomatemáticas (Planas y Setati, 2009; Yackel y Cobb, 1996) y las cláusulas del contrato didáctico (Brousseau, 1997). De acuerdo con D’Amore, Font y Godino (2007), hay diferentes criterios de clasificación de las normas: según el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), según el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional…), según su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad…), según el tipo y grado de coerción (social y disciplinar), etc.

Siguiendo a D’Amore, *et al.* (2007), entendemos por normas epistémicas las configuraciones de objetos (ver Figura 2) que regulan la práctica matemática en un marco institucional. Cada componente de la configuración de objetos está relacionado con normas metaepistémicas, denominadas normas sociomatemáticas. Si nos fijamos en las situaciones-problema, es necesario que el alumno pueda responder a preguntas del tipo: ¿qué es un problema?, ¿cuándo se ha resuelto? o ¿qué reglas conviene seguir para resolverlo? Lo mismo si nos fijamos en el componente “argumento” ya que el alumno necesita saber qué es un argumento en matemáticas, cuándo se considera válido, etc. Hemos detallado normas epistémicas al describir la configuración de objetos, pero en la transcripción del episodio se pueden inferir otros tipos de normas (ver Tabla 5): a) normas metaepistémicas (en el profesor, de N1 a N7; en Alicia, de N11 a N13; en Emilio, N14 y N15; en Mateo, N17 y N18); b) normas que regulan las interacciones (en el profesor, N8 y N9; en Emilio, N16; en Mateo, N19); y c) normas que regulan el uso de los materiales en el aula (en el profesor, N10; en Mateo, N20).

Tabla 5. Identificación de normas

Profesor - N1. No basta dar la solución de un problema, hay que justificar que la solución es correcta [4, 20, 24, 30]. - N2. Hay que interpretar el sentido de la solución en el contexto del problema [24] - N3. Los enunciados de los problemas no se pueden modificar [14]. - N4. Hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial del problema [38]. - N5. Hay elementos importantes en matemáticas, como las ecuaciones, a diferencia de otros como el método de ensayo y error [46, 50]. - N6. Los problemas se pueden resolver por diferentes métodos, no todos ellos igual de matemáticos [6, 50]. - N7. El profesor decide sobre la validez de una argumentación [28, 49]. - N8. El profesor interviene para resolver dificultades de los alumnos [38, 40]. - N9. El profesor tiene un papel determinante en el inicio, distribución y finalización de intervenciones [2, 6, 18, 22, 50]. - N10. Se puede usar la calculadora (por ejemplo, para comprobar que la división es exacta) [40].
Alicia - N11. Hay argumentaciones que no son válidas en matemáticas [16]. - N12. Hay aspectos que no son relevantes en matemáticas [43, 46]. - N13. Los problemas pertenecen a familias de problemas [1, 19].
Emilio - N14. En la resolución de un problema contextualizado hay que usar lo que se sabe del contexto [7, 36]. - N15. Las preguntas de los problemas contextualizados deben ser coherentes con el contexto propuesto [9, 11, 13]. - N16. Los alumnos intervienen cuando no entienden algo [31].
Mateo - N17. Los problemas tienen por objetivo la realización de prácticas matemáticas previamente planificadas por el profesor [15]. - N18. Los problemas se pueden resolver por diferentes métodos [15]. - N19. Los alumnos intervienen cuando no entienden algo [37]. - N20. Las soluciones correctas se tienen que copiar en el cuaderno de clase [49].

Las normas N2 y N4 pueden ocasionar conflictos a los alumnos ya que según cómo se interpreten pueden ser contradictorias. La práctica matemática conlleva la posibilidad de desprenderse del contexto extramatemático y volver a él cuando conviene. Para algunos alumnos puede ser difícil entrar en este “juego de lenguaje”. El análisis realizado en el apartado anterior muestra que dichos conflictos se han producido.

5. ¿PARA QUÉ ANALIZAMOS?

A continuación, aplicamos el quinto y último nivel de análisis al episodio de clase, centrado en la valoración de su idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, *et al*., 2006). Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de instrucción. De acuerdo con Godino, Bencomo, *et al.* (2006), como mínimo se pueden proponer seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática, a saber:

1. *Idoneidad epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”.

2. *Idoneidad cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.

3. *Idoneidad interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.

4. *Idoneidad mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

5. *Idoneidad emocional*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.

6. *Idoneidad ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

La identificación de estas seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción permite considerarlo un proceso “idóneo”. Conseguir una sola idoneidad parcial es relativamente fácil, pero es difícil conseguir una presencia equilibrada de las seis idoneidades parciales. En nuestro caso, por las características de la transcripción y por la información que tenemos del episodio, solo consideramos viable valorar la idoneidad interaccional. Esta idoneidad se puede conseguir si el profesor: a) presenta adecuadamente el tema, por ejemplo, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave; b) reconoce y resuelve conflictos de significado de los alumnos, por ejemplo, interpretando correctamente sus silencios, gestos y preguntas; c) promueve situaciones comunicativas en las que se llega a consensos convenciendo con argumentos; d) utiliza diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar a los alumnos; e) facilita su inclusión en la actividad matemática de la clase ; f) favorece el diálogo entre alumnos; g) contempla momentos en los que los alumnos asumen la responsabilidad del estudio por medio de la exploración, formulación y validación; etc.

Alicia realiza las prácticas matemáticamente importantes del episodio que, además, son validadas por el profesor. Las prácticas alternativas propuestas por Emilio y Mateo no son consideradas por el profesor. Sin embargo, las propuestas de Mateo de resolver el problema por ensayo y error y de buscar soluciones aproximadas eran viables si se tiene en cuenta que los alumnos tenían calculadoras y si se revisan las características del problema. El profesor en ningún momento ofrece contra-argumentos para descartar las propuestas de estos alumnos, a pesar de que establece pequeños diálogos con ellos.

En el episodio analizado, el profesor pretende realizar el proceso de institucionalización de la solución al problema de contexto extramatemático. Puesto que la práctica matemática de resolución de problemas de contexto extramatemático conlleva la posibilidad de desprenderse del contexto del problema cuando conviene y volver a él cuando interesa, el profesor realiza diferentes intervenciones [23-28] y [38-41] de las cuales se infieren dos normas que regulan dicha práctica:

N2. Hay que interpretar el sentido de la solución en el contexto del problema.

N4. Hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial del problema.

La práctica de resolución de problemas de contexto extramatemático está sustentada también en procesos de generalización-particularización y de materialización-idealización. Por ejemplo, el profesor pretende que Mateo realice un proceso de idealización y que se concentre en la fracción que, a su vez, se representa en la pizarra con la materialización 65075/7.

Alicia realiza un proceso de generalización cuando considera que el problema propuesto es un caso particular de una clase de problemas (problemas de densidades). En cambio, Emilio se resiste a realizar el proceso de generalización (descontextualización) al negarse a considerar que el problema cae bajo el dominio de los "problemas de densidades". Seguir las normas N2 y N4 no es tarea fácil para muchos alumnos. En el caso que nos ocupa sí lo es para Alicia, pero no para Mateo y Emilio, como se observa en los conflictos que se producen en el episodio.

El conflicto semiótico más importante se produce cuando el profesor pretende crear un conflicto de tipo cognitivo en Emilio y le dice que el argumento que ha aplicado en (i) no le servirá para contestar (ii), esperando que dicho alumno cambie su argumentación basada en su conocimiento del contexto extramatemático por una argumentación "más matemática". Emilio, en lugar de experimentar un conflicto cognitivo como consecuencia de las intervenciones del profesor, plantea un conflicto de tipo epistémico que confronta métodos de resolución de problemas contextualizados válidos en "la vida real" con métodos de resolución de problemas contextualizados en "la clase de matemáticas". El profesor apela al principio de autoridad y recuerda las normas metaepistémicas de la institución clase de matemáticas: "los problemas son como son". Sin embargo, Emilio y Mateo más tarde vuelven a manifestar el conflicto.

Hay indicadores de idoneidad interaccional que se cumplen. Por ejemplo, en el episodio el profesor promueve el diálogo al requerir la exposición oral de uno de los grupos de trabajo y hacer intervenir a los miembros de este grupo. Sin embargo, si se hace un estudio más detallado de la interacción y se utilizan para ello tres de los indicadores señalados anteriormente: b) reconoce y resuelve conflictos de significado de los alumnos; c) promueve situaciones comunicativas en las que se llega a consensos conveniendo con argumentos y e) facilita la inclusión de los alumnos en la actividad matemática de la clase, la valoración no es "buena". Con relación al indicador b, se observa que, si bien se resuelve algún conflicto, el principal conflicto semiótico no se resuelve correctamente. Con relación al indicador c, las tesis que se imponen son las que Alicia defiende, aunque no siempre con argumentos, desde el inicio del episodio; el profesor valida estas tesis y Emilio y Mateo las asumen copiándolas en su cuaderno aunque los indicios (la insistencia en la defensa de sus tesis, el cambio repentino, etc.) apuntan a una falta de convencimiento. Con relación al indicador e, se observa que la interacción excluye de la práctica matemática a Emilio y Mateo.

Nuestra valoración final sobre la interacción en el episodio es que puede mejorarse ya que el profesor no consigue incorporar ni a Mateo ni a Emilio a la "práctica matemática" que consiste en tener en cuenta o no el contexto extramatemático según convenga. Por otra parte, ni Alicia ni el profesor responden a Emilio y Mateo con contra-argumentos a las propuestas de aproximación al problema de estos alumnos.

6. CONSIDERACIONES FINALES

La valoración de la idoneidad del episodio que se ha realizado en el apartado anterior coincide en parte con la valoración que mayoritariamente suelen hacer los profesores con los que hemos trabajado en diversos seminarios de formación[2], donde hemos pedido que discutieran el episodio de clase aquí estudiado y otros similares. La diferencia entre nuestra valoración y la de los profesores, en primer lugar, está en la fundamentación de dicha valoración; contrariamente a lo que hicieron muchos profesores, en nuestro análisis hemos sido sistemáticos, teniendo en cuenta, por una parte, niveles de análisis y, por otra, relaciones entre ellos. En segundo lugar, hay una diferencia en la delimitación del tipo de valoración que se puede hacer con la información de que se dispone, a saber, sólo valoramos la idoneidad interaccional. Por ejemplo, algunos de los profesores valoraron la idoneidad emocional del episodio, lo cual en nuestra opinión no es posible con los datos de los que disponemos.

En nuestro caso, hemos aplicado un modelo que permite un análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. A diferencia del análisis realizado por los profesores de los seminarios, donde el énfasis estaba en responder a '¿qué se podría mejorar?', el tipo de análisis que se ha desarrollado ha respondido en primer lugar a '¿qué ha ocurrido aquí y por qué?'. Entendemos que el estudio exhaustivo de aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar valoraciones fundamentadas sobre esta situación. Nuestra noción de idoneidad didáctica y las herramientas para su análisis y valoración permiten establecer un puente entre una didáctica descriptiva-explicativa y su aplicación para la valoración de procesos de instrucción.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de instrucción, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales y la identificación de conflictos semióticos potenciales. La idoneidad interaccional y la mediacional requieren analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles y la identificación de conflictos semióticos que se han producido. El análisis de las normas ayuda a comprender, entre otros aspectos, los factores ecológicos que condicionan los procesos de instrucción, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica.

Nuestra conclusión es que el modelo de análisis didáctico aplicado en este trabajo es útil para la investigación sobre la práctica docente de los profesores de matemáticas. Basándonos en la experiencia positiva de seminarios de formación llevados a cabo, creemos que también puede ser útil para el colectivo de profesores interesados en reflexionar sobre su propia práctica. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. Para el diseño de estos programas son necesarias herramientas de análisis de la práctica docente como las que aquí se han propuesto.

Reconocemos que la realización de los tipos de análisis descritos en este trabajo presenta un nivel de complejidad elevado para que pueda ser directamente aplicado por los profesores en la reflexión sobre su práctica docente. Esta complejidad es en si misma una limitación que abre líneas de investigación. En el futuro, consideramos necesario identificar nuevos conocimientos y competencias implicadas en el uso del modelo que convendría desarrollar con los profesores, así como estudiar estrategias formativas adecuadas para el logro de este objetivo. Otra línea a continuar consistiría en relacionar el modelo presentado con investigaciones realizadas en el campo de formación de

[2] Este episodio ha sido discutido en cuatro cursos de maestría y en tres cursos de formación permanente de profesorado. Por limitaciones de espacio no aportamos datos concretos sobre el desarrollo de dichas experiencias de formación.

profesorado de matemáticas, de manera especial los trabajos sobre el "conocimiento pedagógico del contenido" (Hill, Ball y Schilling, 2008) y el "conocimiento matemático para la enseñanza" (Sullivan, 2008).

REFERENCIAS

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. Londres: The Macmillan Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Civil, M. & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics, 24* (1), 7-13.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Coll, C. & Sánchez, E. (2008). El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación, 346*, 15-32.

D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28* (2), 49-77.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Nueva York: SUNY.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8* (1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Contreras, C. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006), Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 9* (especial), 131-155.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias,* 27 (1), 59-76.

Hiebert, J., Morris, A. K. & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: an "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 66,* 201-222.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Planas, N. & Civil, M. (2002). The influence of social issues on the reconstruction of mathematical norms. En H. Chick & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME Conference* (vol. 2, pp. 71-80). Norwich: PME.
Planas, N. & Civil, M. (2004). Understanding interruptions in the mathematics classroom: implications for equity. *Mathematics Education Research Journal, 14* (2), 169-189.
Planas, N. & Civil, M. (2009). Working with immigrant students and mathematics teachers: an empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI: 10.1007/s10857-009-9116-1.
Planas, N. & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 12* (2).
Planas, N. & Setati, M. (2009). Bilingual students using their languages in the learning of mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21* (3).
Radford, L., Schubring, G. & Seeger, F. (Eds.) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture.* Rotterdam: Sense Publishers.
Ramos, A. B & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 11* (2), 233-265.
Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. Nueva York: Basic Books.
Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics: an introduction. En P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and development* (pp. 1-12). Rotterdam: Sense Publishers.
Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 458-477.