

INGENIERÍA DIDÁCTICA BASADA EN EL ENFOQUE ONTOLÓGICO – SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y DE LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS

Juan D. Godino^{*}, Hernán Rivas^{**}, Pedro Arteaga^{*}, Aitzol Lasa^{***} Miguel R. Wilhelmi^{***}

DIDACTIC ENGINEERING BASED ON THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND INSTRUCTION

Abstract – We develop a broad vision of didactic engineering, which is conceived of as a specific type of design – based research. As a research methodology, didactic engineering is intended to create knowledge about ways of building and communicating mathematical knowledge. This didactic knowledge is necessarily supported by a theoretical approach, which underlies the various phases of the methodology. Here, we analyze how each phase of didactic engineering maybe grounded on the onto – semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. The analysis of these phases (preliminary study, design, implementation and evaluation), according to the epistemic, cognitive and instructional dimensions is exemplified by a case study related to teaching statistics for prospective primary school teachers. The theoretical tools used serves to highlight *significant didactical facts* which, on the one hand, determine guidelines for determining suitable didactical trajectories for teaching the statistical topic and on the other hand, provide fundamentals to evaluate didactic engineering as a research methodology that can be extrapolated to different theoretical approaches.

Key words: instructional design, didactical analysis, teacher education, descriptive statistics, onto – semiotic approach

Resumen - En este artículo desarrollamos una visión ampliada de la ingeniería didáctica, entendida como una clase específica de investigación basada en el diseño. Como método de investigación, la ingeniería didáctica busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico. Se propone aquí un desarrollo de las fases de la ingeniería didáctica fundamentadas en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. Estas fases (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), analizadas según las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional se ejemplifican en un estudio de caso sobre enseñanza de la estadística para la formación inicial de profesorado de Educación Primaria. Las herramientas teóricas utilizadas permiten revelar *hechos didácticos significativos*, que determinan, por un lado, pautas para la determinación de trayectorias didácticas idóneas para la enseñanza del tópico estadístico y, por otro lado, fundamentos para valorar la ingeniería didáctica como una metodología de la investigación extrapolable a distintos enfoques teóricos.

Palabras claves: diseño instruccional, análisis didáctico, formación de profesores, estadística descriptiva, enfoque ontológico-semiótico

* Universidad de Granada.

** Pontificia Universidad Católica de Chile, Sede Regional de Villarica.

***Universidad Pública de Navarra.

INGÉNIERIE DIDACTIQUE FONDÉE SUR L'APPROCHE ONTOLOGIQUE – SÉMIOTIQUE SUR LA CONNAISSANCE ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Résumé – Cet article développe un sens élargi de l'ingénierie didactique, comme un type spécifique de *design research*. En tant que méthode de recherche, l'ingénierie didactique vise des nouvelles connaissances sur la façon de construire et communiquer les savoirs mathématiques. Ces connaissances didactiques sont nécessairement mises en rapport avec une approche théorique, qui soutient les différentes phases méthodologiques. L'approche choisie ici est l'approche onto – sémiotique de l'apprentissage et de l'enseignement mathématiques. Les phases (étude préliminaire, conception, mise en œuvre et évaluation) sont analysées selon les dimensions épistémologique, cognitive et d'enseignant. L'ingénierie est illustrée par une étude sur l'enseignement de la statistique en formation initiale des enseignants d'école élémentaire. Les outils théoriques utilisés permettent identifier des *faits didactiques significatifs* qui servent à la détermination des règles de fonctionnement des parcours didactiques propres aux thèmes statistiques. Ces faits permettent aussi mettre en valeur l'ingénierie didactique comme méthodologie de recherche dans le cadre de différentes approches théoriques.

Mots clefs: *design research*, analyse didactique, formation des maîtres, statistique descriptive, approche onto – sémiotique.

1. INTRODUCCIÓN

La *investigación basada en el diseño* (también denominada *investigación de diseño* o *experimentos de diseño*) es una familia de aproximaciones metodológicas en el estudio del aprendizaje que tiene lugar en contextos naturales de clase. Utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales; así, la investigación incluye, en ciclos sucesivos, tanto el diseño como la implementación en contextos de clase y la evaluación de resultados.

El interés reciente en la literatura anglosajona por las investigaciones basadas en el diseño y su reflejo en educación matemática se añade al ya tradicional sobre *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989; 2011), la cual, apoyada en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), viene desarrollando importantes contribuciones desde la década de los 80. En Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013) se estudian las concordancias y complementariedades de estas aproximaciones metodológicas y se propone una visión generalizada de la ingeniería didáctica que incluye a las investigaciones orientadas hacia el diseño instruccional.

En este trabajo describimos una metodología de investigación de diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008) fundamentada en el empleo de herramientas del Enfoque Ontológico – Semiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007); en particular, aplicando las nociones de configuración

de objetos y procesos matemáticos, configuración y trayectoria didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica.

Abordaremos el problema del diseño instruccional en un curso de formación matemática de futuros maestros de Educación Primaria, concretamente en el diseño, implementación y evaluación del tema de introducción a la estadística y probabilidad. La experiencia formativa se realiza en las condiciones habituales, dentro de una asignatura focalizada en sentar las bases matemáticas para la enseñanza. Se destina pues a la formación estadística un tiempo limitado.

Este artículo tiene una doble finalidad. Por una parte, se trata de explorar las posibilidades ofrecidas por el marco teórico del EOS como base para la investigación orientada al diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje, esto es, para el desarrollo de *ingenierías didácticas* (Godino et al., 2013). Por otra parte, se trata de aportar conocimientos específicos sobre la formación en estadística de los futuros maestros, problemática actual de investigación como se pone de manifiesto en diversos trabajos (Batanero, Burril y Reading, 2011).

El artículo queda organizado en las siguientes secciones: en la sección 2, se describe brevemente el marco teórico, los antecedentes y el problema de investigación; en la sección 3, se presenta el enfoque metodológico, el contexto (población y muestra), las fases y facetas de la investigación, así como los instrumentos de recogida de datos; en la sección 4, se incluyen algunos elementos básicos de la fase de estudio preliminar, focalizada en la reconstrucción de un significado de referencia para el contenido de la estadística descriptiva elemental; en la sección 5, se presenta el diseño del proceso de instrucción, realizando el análisis *a priori* de uno de los tres proyectos de análisis de datos sobre los cuales se basó el proceso formativo, aplicando las nociones de *práctica y configuración de objetos y procesos*; en la sección 6, se hace la descripción de la implementación, destacando los hechos didácticos significativos ocurridos en la realización de uno de los proyectos; en la sección 7, se aborda el análisis retrospectivo del proceso de estudio diseñado comparando los hechos didácticos con el análisis *a priori* y aplicando las nociones de dimensión normativa e idoneidad didáctica; finalmente, en la sección 8, se incluyen una síntesis e implicaciones del proceso metodológico aplicado.

2. MARCO TEÓRICO, ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las nociones de *sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos* (Godino, et al., 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) permiten abordar los análisis epistemológicos y cognitivos en didáctica de las matemáticas según el marco del EOS. En particular, permiten formular el problema *epistémico* (caracterización de los conocimientos institucionales) y *cognitivo* (conocimientos personales) en los siguientes términos:

- ¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objetos y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (*Significado institucional de referencia*).
- ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (*Significado personal*).
- ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? (*Competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del sujeto*)

Una vez que se dispone de herramientas para abordar las cuestiones epistémicas y cognitivas se puede intentar responder cuestiones de diseño instruccional, relativas al proceso pretendido y a las reglas que condicionan su desarrollo:

- ¿Qué tipos de interacciones didácticas (entre las personas y los recursos) se deberían implementar en los procesos instruccionales que sean idóneas para promover los aprendizajes matemáticos?
- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?

Estas cuestiones, que tienen un carácter *prospectivo* (previo a la puesta en marcha), se completan con otras que siguen a la implementación (carácter *retrospectivo*), que de manera genérica podrían enunciarse en los siguientes términos: ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación de un proceso de estudio matemático para mejorar el aprendizaje? Este análisis retrospectivo es común a toda ingeniería y, más en general, a todo proyecto educativo, que tienen un carácter cíclico: la mejora se basa tanto en la fundamentación teórica como en el contraste experimental.

Para proponer cambios fundamentados en un proceso instruccional es necesario explicitar los principios didácticos que sirven de fundamento, los cuales son introducidos en el EOS mediante la noción de *idoneidad didáctica* (Godino, Contreras y Font, 2006). Dicha idoneidad se concibe como el criterio global de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico es el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados. La idoneidad supone la articulación coherente y equilibrada de las siguientes idoneidades parciales: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

El reconocimiento de las normas que condicionan y hacen posible los procesos de estudio matemático han sido objeto de diversas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Tal es el caso de la noción de *contrato didáctico* (Brousseau, 1998), y de otras nociones basadas en el *interaccionismo simbólico* (Blumer, 1969), como *patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas* (Cobb y Bauersfeld, 1995). Se trata

de tener en cuenta las reglas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como “microsociedad”, que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes.

El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos. En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva unificada del conocimiento y la instrucción matemática que proporciona el EOS, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa que proponen Godino et al (2009) – epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva, instruccional (interaccional y mediacional) – permiten:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.
- Sugerir posibles cambios en las normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

Como ya se ha indicado, este trabajo tiene una orientación teórica – metodológica ya que se aplican y desarrollan aspectos del EOS relacionados con las ingenierías didácticas. No obstante, también se identifican algunos fenómenos específicos del campo de formación de profesores en el área de la educación estadística, ocurridos en un contexto formativo caracterizado por las restricciones impuestas por el diseño curricular del curso en que tiene lugar el proceso de instrucción analizado.

3. METODOLOGÍA

En las investigaciones basadas en el diseño se consideran tres fases (Cobb y Gravemeijer, 2008): 1) planificación del experimento, 2) experimentación y 3) análisis retrospectivo de los datos generados en el experimento. Estos experimentos complementan a otros métodos empíricos, tales como los estudios etnográficos, la investigación clínica, los estudios experimentales y cuasi – experimentales en los que se evalúan los efectos de variables independientes sobre variables dependientes.

En nuestro caso distinguimos cuatro fases en la investigación¹:

- *Estudio preliminar* de las dimensiones epistémico – ecológica, cognitiva – afectiva e instruccional.
- *Diseño* de la trayectoria didáctica, selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes y de la planificación de intervenciones controladas del docente.
- *Implementación* de la trayectoria didáctica; observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.
- *Evaluación o análisis retrospectivo*, que se sigue de un contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación. También se reflexiona sobre las normas que condicionan el proceso instruccional y sobre la idoneidad didáctica.

Dimensiones de análisis

En cada una de las fases (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación) se deben tener en cuenta las dimensiones epistémico – ecológica, cognitiva – afectiva e instruccional.

- *Epistémica – ecológica*. Se determinan los *significados institucionales* puestos en juego en cada una de las fases del proceso; tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.
- *Cognitivo – afectiva*. Se describen los *significados personales* de los estudiantes en los distintos momentos del proceso de estudio, en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos. Además se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Instruccional*. Se analizan los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuencia, orientada a la fijación y negociación de significados.

¹ Las fases de la investigación tienen una relación directa con las de la Ingeniería Didáctica propuestas en el seno de la TSD. El *diseño* se corresponde con el análisis *a priori* y la concepción global de la ingeniería; la *implementación* con la experimentación; y, por último, la *evaluación o análisis retrospectivo* con el análisis *a posteriori*. Asimismo, se prevé un *estudio preliminar* en las diferentes dimensiones involucradas. El uso de una denominación diferenciada se debe a la orientación, fundamentación y desarrollo de las fases según los presupuestos ontológicos, semióticos, pragmáticos y antropológicos propios del EOS.

Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.

En la fase de diseño la noción de idoneidad epistémica de un proceso instruccional pone el acento en la “representatividad” de las situaciones – problema seleccionadas. Esta cualidad se valora en relación con el significado de referencia global del contenido matemático en cuestión, de las prácticas que se estima debe generar y de los objetos que deben ser puestos en juego.

El análisis de la implementación del diseño instruccional se realiza usando las nociones de configuración didáctica. Una *configuración didáctica*² es un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación – problema diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea. La situación – problema sobre la cual se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtarefas cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración.

El análisis detallado de un proceso de estudio matemático requiere dividir la crónica del mismo en unidades de análisis, siendo útil para ello la noción de configuración y subconfiguración. No obstante, en el transcurso de una subconfiguración didáctica pueden ocurrir *hechos didácticos* que interesa analizar. En (Wilhelmi, Font y Godino, 2005) se define un *hecho didáctico* como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los hechos que implican una cierta *regularidad explicable* en el marco de una teoría constituyen un *fenómeno*; pero también pueden carecer de esa regularidad en cuyo caso se tiene un fenómeno singular (dan pie a “teoremas de existencia y a contraejemplos”).

En este trabajo vamos a considerar que un *hecho didáctico* es *significativo* (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional. Se pueden asimilar a fenómenos singulares ya que la interpretación se hace siempre desde una cierta teoría.

² La noción de configuración didáctica en la *teoría de la génesis instrumental* hace referencia a las disposiciones particulares de los artefactos del entorno, correspondientes a cada fase de una situación. La orquestación instrumental incluye las configuraciones didácticas, sus modos de explotación y su articulación (Trouche, 2004). El foco de atención no es la situación problema, sino los artefactos usados y los modos en que se usan y articulan.

4. ESTUDIO PRELIMINAR. RECONSTRUCCIÓN DE UN SIGNIFICADO DE REFERENCIA

El estudio o análisis preliminar del contenido cuya enseñanza se pretende se realiza en el EOS guiado por la noción de “significado de referencia”: sistema de prácticas operativas y discursivas que se usan como referencia para elaborar el significado pretendido en el proceso de instrucción. Las prácticas matemáticas son entendidas como cualquier actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Por tanto, el punto central en la elaboración del significado de referencia será la caracterización de las situaciones – problema que permitan poner en juego los contenidos cuyo aprendizaje se pretende. Este planteamiento es concordante con aspectos de otras teorías, tales como la búsqueda de situaciones fundamentales de la teoría de situaciones (Brousseau, 1998), o con la elaboración de una “praxeología de referencia” en el marco de la TAD (Chevallard, 1999). De hecho, el estudio de las matemáticas basado en la resolución de problemas, en un sentido no restrictivo de un enfoque teórico, se puede considerar actualmente como un postulado general de la didáctica de las matemáticas.

Para el caso de la educación estadística estos problemas adoptan la modalidad de proyectos de análisis de datos mediante los cuales los estudiantes se involucran en la resolución de un caso práctico con el que se pretende dar sentido a las prácticas operativas y discursivas de la estadística.

“En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado” (Batanero et al., 2011, p. 15).

En nuestro caso, para realizar la selección de los proyectos de análisis de datos sobre los cuales basar el estudio de la estadística, y tener en cuenta resultados relevantes de investigaciones previas en educación estadística, hemos tenido en cuenta el texto de síntesis de conocimientos didáctico – estadísticos de (Batanero, 2001) y el modelo de razonamiento estadístico propuesto por (Wild y Pfannkuch, 1999), el cual sintetiza los componentes fundamentales del trabajo de análisis de datos:

- 1) *Reconocimiento de la necesidad de los datos.* El reconocimiento de las carencias de las experiencias personales y la evidencia anecdótica lleva al deseo de basar las decisiones sobre la recogida deliberada de datos.

- 2) *Transnumeración*. La idea más importante en el aprendizaje de la estadística es la adquisición del proceso dinámico de cambio de las representaciones de los datos numéricos para facilitar la comprensión.
- 3) *Variación*. El pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omnipresente variación.
- 4) *Uso de un conjunto de modelos*. La principal contribución de la estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto de modelos específicos, esto es, marcos para pensar sobre determinados fenómenos que incluyen componentes aleatorios.
- 5) *Conocimiento estadístico relacionado con el contexto*. El material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, comprensiones y conjeturas.

Asimismo, hemos tenido en cuenta las recomendaciones de diversos autores sobre la enseñanza de la estadística basada en el uso de proyectos de análisis de datos (Nolan y Speed, 1999; Batanero, et al., 2011; Batanero y Díaz, 2011), y algunas propuestas curriculares (Franklin et al., 2005). Forma parte también de la fase de estudio preliminar la sistematización de las investigaciones previas sobre aspectos cognitivos e instruccionales del tema; en nuestro caso lo hemos basado en (Batanero, 2001; Díaz, Batanero y Wilhelmi, 2008).

5. DISEÑO DEL PROCESO DE INSTRUCCIÓN

En el anexo I se describen los componentes del diseño general de la unidad temática desarrollada en el proceso de instrucción. Los contenidos abordados son: Estadística y sus usos; población, muestra y variables estadísticas; tablas y gráficos; medidas de posición central y de dispersión; fenómenos aleatorios; concepto de probabilidad y diferentes aproximaciones a la misma; la Estadística como conocimiento cultural.

Para desarrollar estos contenidos, el proceso de estudio se estructura en torno a tres grandes proyectos:

- 1) *Alumno típico* (4,5h, 3 sesiones): recogida, representación e interpretación de datos de características de los estudiantes de la clase, para la descripción de un perfil representativo de alumno.
- 2) *Lanzamiento de dos dados* (3h, 2 sesiones), centrado en el estudio de nociones probabilísticas elementales.
- 3) *Eficacia entrenamiento deportivo* (1,5h, 1 sesión), centrado en el estudio de nociones estadísticas elementales de comparación de distribuciones de frecuencias.

El desarrollo de estos tres proyectos de análisis de datos es complementado con: a) el uso de un texto (Batanero y Godino, 2003); b) una colección de ejercicios resueltos como material complementario; y, por último, c) un tablón virtual de docencia, que se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

El significado personal aprendido por los estudiantes es evaluado mediante la resolución de una situación – problema que precise de la aplicación de las nociones y procedimientos estadísticos y probabilísticos estudiados en las sesiones de clase. La evaluación tendrá también en cuenta la asistencia y participación en las sesiones de clases prácticas, así como la calidad de los informes solicitados en los correspondientes *Cuadernos de trabajo* en equipo.

A título de ejemplo mostramos a continuación el diseño del proyecto “Alumno típico”. Por razones de espacio omitimos una descripción similar para los otros dos proyectos implementados.

La elección del proyecto “Alumno típico” como situación introductoria al tema de estudio, aunque tenga un cierto carácter “artificial” (¿qué necesidad se tiene de elegir un sujeto típico de un grupo?), tiene algunas ventajas desde el punto de vista del proceso formativo de futuros maestros: facilidad de recogida de datos en clase, posibilidad de incluir otras variables estadísticas (altura, longitud de brazos extendidos, etc.). Además, es un ejemplo de proyecto aplicable de manera directa en Educación Primaria, permitiendo contextualizar el estudio de distintos tipos de variables estadísticas (nominales, ordinales, cuantitativas discretas y continuas) y “motivar” la emergencia de las nociones y técnicas estadísticas elementales.

5.1. Análisis a priori del proyecto “Alumno típico”

En este proyecto se trata de recoger datos de los alumnos de la clase sobre las variables: género, intensidad con la que se practica deporte, número de hermanos, peso y cantidad de dinero que se tiene en el bolsillo en un momento dado. Se proponen las siguientes cuestiones iniciales, las cuales permiten motivar el uso de los estadísticos de posición central y de dispersión, así como la comparación de distribuciones de frecuencias. Así se responden a preguntas del tipo: ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase? ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase? ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

Se incluye a continuación un análisis de las prácticas estadísticas que se deben implementar para responder a las cuestiones y la *configuración de objetos y procesos* (Godino, et al., 2007) puestos en juego, distinguiendo aquellos que se pueden suponer conocidos por los estudiantes de los que constituyen nuevos objetivos de aprendizaje. Asimismo, se hacen algunas conjeturas sobre posibles conflictos potenciales en el desarrollo del proyecto, basadas en resultados de investigaciones previas y en la experiencia docente acumulada.

Tipo de problema y prácticas estadísticas

El enunciado del problema tiene un carácter abierto, ya que plantea cuestiones que pueden ser interpretadas de diversas maneras. No se sugiere la aplicación directa de una técnica estadística, sobre todo en la segunda cuestión sobre la representatividad del alumno típico. Se pretende motivar el proceso de reducción de los datos estadísticos, identificando las variables, sus valores y frecuencias para construir la correspondiente distribución de frecuencias. Posteriormente, se requiere describir tal distribución mediante estadísticos de posición central, dispersión y forma para elegir un valor ideal que “represente” al conjunto de datos.

La determinación de las diferencias estadísticas entre las dos submuestras (chicos y chicas) motiva la comparación de distribuciones de frecuencias y, por tanto, la indagación de la significatividad de las diferencias entre los promedios y dispersiones. Permite motivar, asimismo, la pertinencia de una comparación gráfica (por ejemplo, mediante diagramas adosados) de los pares de distribuciones.

El enunciado de esta situación – problema se puede generalizar de diversas maneras, como se muestra en (Batanero y Díaz 2011, pp. 73-95).

En nuestro caso se espera que los estudiantes realicen las prácticas estadísticas siguientes:

- Construir las distribuciones de frecuencias de las cinco variables, identificando las variables, sus respectivos valores, recontar las frecuencias absolutas de cada valor, y representar estos resultados en una disposición tabular adecuadamente rotulada.
- Calcular promedios (moda, mediana y media, discriminando su uso según el tipo de variable y la forma de la distribución).
- Calcular dispersiones (máximo, mínimo, recorrido, cuartiles, recorrido intercuartílico, desviación típica, discriminando su uso según el tipo de variable y la forma de la distribución); valorar la representatividad de los promedios según el tamaño relativo de las dispersiones.
- Comparar numéricamente (promedios y dispersiones) y gráficamente (diagramas adosados) las distribuciones de frecuencias de las dos submuestras (chicos y chicas).
- Valorar la importancia relativa de las diferencias entre los estadísticos resumen de las distribuciones de frecuencias en las submuestras.

Se prevé que la reducción tabular, numérica y gráfica de los datos estadísticos haya sido estudiada previamente por la mayoría de los estudiantes, por lo que las cuestiones 1) y 2) tendrían la consideración de aplicación de conocimientos previos. Como objetos y

procesos emergentes que se proponen como conocimiento ampliado del contenido para los maestros en formación es preciso destacar:

- Discriminación del uso de los promedios moda, media, mediana según el tipo de variable estadística y la forma de la distribución de frecuencias.
- Carácter ideal de los promedios (no tienen que corresponder a un dato) y su uso como representante de la colección de datos (muestra o población).
- Grado de representatividad de los promedios dependiendo de la mayor o menor dispersión de los datos.
- Comparación de distribuciones de frecuencias; significatividad de las diferencias de promedios y dispersiones.

La realización de estas prácticas estadísticas conlleva la intervención de una compleja configuración de objetos y procesos matemáticos cuyos elementos esenciales indicamos a continuación.

Elementos lingüísticos

Muy posiblemente el profesor deberá compartir con la clase el significado institucional pretendido de expresiones lingüísticas tales como: “características de un estudiante típico o representativo de la clase”, “¿cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?”, “diferencias entre chicos y chicas”, etc.

Se puede suponer que los estudiantes están familiarizados, por sus estudios previos en Secundaria, con la mayor parte de los términos y expresiones lingüísticas propias de la estadística descriptiva (frecuencia absoluta, tabla de frecuencias, moda, media, mediana, máximo, mínimo, recorrido, diagrama de barras, histograma).

Sin embargo, teniendo en cuenta las investigaciones previas (Díaz et al., 2008) se puede prever dificultades en la rotulación de las tablas de frecuencias y de los diagramas de barras adosadas o del gráfico de cajas. Asimismo, los estudiantes no familiarizados con el uso de la hoja de cálculo tendrán dificultades importantes con la manera de representar los datos (colección de datos dispuestos en columnas), las variables estadísticas y el lenguaje funcional específico de la hoja (conjunto de datos, regla de cálculo, resultado)³.

³ El problema de la integración del uso de la hoja de cálculo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido estudiado según diversas aproximaciones teóricas. Destacamos el trabajo de Haspekian (2005), apoyada en el marco de la teoría de la génesis instrumental, y el de Lagrange y Erdogan (2009), basado en la aproximación cultural del desarrollo cognitivo de Saxe y la consideración de nociones didácticas específicas como *milieu* y *técnica instrumentada*.

Elementos conceptuales

Los siguientes conceptos de la estadística descriptiva son a menudo escasamente estudiados y reconocidos por los estudiantes, pero son esenciales para comprender el sistema de prácticas operativas y discursivas de la estadística:

- Concepto de dato estadístico (rasgo o información contextualizada, individuo estadístico); colección de datos (muestra, población).
- Variación del rasgo entre los individuos.
- Variable estadística (rasgo de los individuos estadísticos que puede tomar diferentes valores en una colección de datos).

La resolución de las tareas pedidas requiere poner en juego conceptos con los que los estudiantes pueden estar familiarizados:

- Frecuencia absoluta y relativa; distribución de frecuencias, promedios (moda, mediana, media); dispersión (máximo, mínimo, recorrido; varianza, desviación típica).
- Diagramas de barras y de sectores.

Pueden estar menos familiarizados, y por tanto, ser ocasión de objetos emergentes de las prácticas que se requiere realizar:

- Histograma de frecuencias (intervalos y marcas de clase, criterios para su elección).
- Diagramas e histogramas adosados, interpretación y uso.
- Asimetría de una distribución de frecuencias, sesgo positivo y negativo; su relación con la elección del promedio que se debe usar para representar los datos.
- Percentiles, rango de percentiles, recorrido intercuartílico; gráfico de cajas.
- Significación de diferencias de medias y dispersiones.

Propiedades

Para el progreso en el proyecto son necesarias las propiedades siguientes, algunas de ellas utilizadas de manera implícita:

- Los promedios representan a una colección de datos porque indican la tendencia o posición central de las distribuciones de frecuencias correspondientes a dichos datos.

- La moda es el único promedio que se puede usar si la variable estadística es un atributo cualitativo; puede no ser un valor único.
- La mediana es más representativa que la media si la distribución es asimétrica; ambos estadísticos coinciden si la distribución es simétrica.
- Si la dispersión respecto de un promedio es alta (o baja) el promedio es menos (o más representativo) de la colección de datos.

Procedimientos

La elaboración de tablas de frecuencias, el cálculo de la moda, media, máximo, mínimo, recorrido, construcción de diagramas son procedimientos que, o bien, recuerdan los estudiantes o bien son fáciles de dominar. El cálculo de la mediana, la elaboración de tablas de frecuencias agrupadas en intervalos y la construcción del gráfico de cajas e histogramas requieren una atención especial. Algo similar ocurre con el cálculo de percentiles, el recorrido intercuartílico y la desviación típica.

Argumentos

Se espera que los estudiantes justifiquen las respuestas a las cuestiones planteadas elaborando argumentos deductivos tales como: “Teniendo en cuenta las definiciones y propiedades de los promedios y dispersiones el sujeto típico es una chica que hace poco deporte, que tiene 2,5 hermanos, pesa 60 Kg, y lleva en el bolsillo 6 €” (son los valores de las medianas ya que las distribuciones son asimétricas). “La elección de una chica para la variable, género, es muy representativa ya que el 68 % son chicas, mientras que los demás valores son menos representativos”...

Procesos

Un *proceso de idealización* que requerirá atención especial será el que da lugar al concepto de sujeto típico o representativo, que no tiene que corresponder con un valor de la variable. Así, la mediana del número de hermanos es de 2,5 que obviamente no corresponde a ningún valor posible de la variable. Igual atención requerirá el concepto de “grado de representatividad” de un promedio, dependiente de la cuantía de la dispersión correspondiente.

Los procedimientos y propiedades aplicados para dar respuesta a las cuestiones planteadas en la situación particular dada tienen un carácter general, lo cual deberá ser enfatizado por el profesor. El cálculo de la mediana, la determinación de percentiles y la representación de histogramas debe concluir con el enunciado de reglas generales aplicables a otras situaciones de análisis de datos.

5.2. Otros recursos instruccionales

El proceso de estudio planificado contempla, además de la realización de tres proyectos (el primero es el que se ha descrito), los siguientes recursos instruccionales:

- Colección de ejercicios resueltos.
- Texto de estudio. Se trata de la monografía de (Batanero y Godino, 2003), *Estocástica para maestros*, donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.
- Tablón virtual de docencia; se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

La elección de los dispositivos de ayuda al cálculo estadístico y la representación gráfica es determinante para el desarrollo de la trayectoria didáctica por sus interacciones con las trayectorias epistémica, docente, discente, así como con las trayectorias cognitivas de los estudiantes. El uso de la hoja de cálculo es una de las opciones posibles, dada su potencial utilidad para temas diversos, su disponibilidad en todos los ordenadores y ser sugerida por los currículos oficiales. En el primer seminario de trabajo práctico relativo al proyecto “Alumno típico” se contemplan actividades de introducción (o recuerdo) del uso de la hoja de cálculo.

La enseñanza de la estadística por el “método de proyectos”, como aquí se propone, permite implementar *trayectorias didácticas* en las que predominan las configuraciones de tipo personal y de trabajo cooperativo, esto es, con un nivel mayor de autonomía en el aprendizaje matemático.

No obstante, cada *configuración didáctica* (ligada al desarrollo de una configuración epistémica específica) debe contemplar los momentos de regulación (procesos de definición, enunciación, fijación de procedimientos y justificaciones) en los que el docente fije los significados institucionales que serán compartidos por la clase.

En nuestro caso, se trata de atribuir significado a la “comparación de distribuciones de frecuencias” teniendo en cuenta no solo los promedios, sino también las dispersiones y características de forma de las mismas (simetrías, valores atípicos,...). El debate de la “significatividad” de las diferencias puede abrir las puertas a la inferencia estadística.

Como instrumentos de recogida de datos se utilizan los siguientes: Guía docente del curso; grabaciones audiovisuales de las sesiones de clase; protocolos de trabajo en equipos; prueba de evaluación final, donde se solicita responder a 6 cuestiones relacionadas con una parte de los contenidos desarrollados en el curso (espacio muestral, asignación de probabilidades, comparación de distribuciones de frecuencias y de probabilidades, ley de los grandes números).

5.3. Diseño de las interacciones didácticas

En los diseños didácticos basados en la TSD se busca la determinación de situaciones fundamentales para la introducción con sentido de nociones o procedimientos matemáticos. Las interacciones docente – discentes están orientadas hacia la construcción del conocimiento por los estudiantes mediante la dialéctica entre las situaciones adidácticas y didácticas. Por su parte, en el EOS, la gestión de las interacciones docente – discentes atribuye un énfasis menor a los momentos adidácticos, considerando que las situaciones de institucionalización pueden tener lugar en cualquier fase del proceso de estudio. El EOS establece que los momentos de institucionalización son densos en el proceso instruccional, pues cumplen una función regulativa o de control. Esto es así por la adopción de un postulado ontosemiótico sobre los objetos matemáticos conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos según el cual dichos objetos tienen una naturaleza regulativa, siguiendo los planteamientos socio – antropológicos de la filosofía de Wittgenstein (Font, et al., 2013). Las interacciones docente – discentes se diseñan y explican asumiendo que los objetos matemáticos son esencialmente reglas que es necesario conocer, identificar las circunstancias de su uso y saber aplicarlas. De hecho, en el diseño particular objeto de este trabajo, se constata que, a pesar de que los estudiantes habían estudiado estadística en Secundaria, la mayoría tienen problemas para identificar las circunstancias de uso de las nociones y técnicas estadísticas elementales, por lo que las intervenciones del profesor en los momentos de bloqueo del proceso de estudio se consideran necesarias para recordar o compartir las reglas y circunstancias de uso correspondientes.

6. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

La aplicación de las nociones de *configuración* y *trayectoria didáctica* (Godino, et al., 2006) permite realizar análisis detallados de: a) el progresivo despliegue de los significados institucionales implementados; b) de los aprendizajes y de su dependencia de los formatos de interacción que efectivamente tienen lugar; y, finalmente, c) del uso de los recursos y del tiempo asignado.

En este tipo de análisis el foco de atención es la descripción de:

- El contenido efectivamente tratado.
- Los patrones de interacción docente – discentes.
- El reconocimiento de los conflictos cognitivos e interaccionales que tienen lugar y la forma en que éstos son abordados por el docente y los estudiantes.

El análisis de estos aspectos da cuenta de la gestión de los conocimientos efectivamente puestos en juego y de la progresión de los aprendizajes. El número de estudiantes inscritos, en los dos cursos académicos en que se ha realizado la experiencia, ha sido de 58 y 75, respectivamente.

En el siguiente apartado describimos la implementación del proyecto “Alumno típico”, intercalando segmentos de transcripción correspondientes a una muestra de *hechos didácticos significativos* (HDS). Usamos la noción de HDS como criterio de delimitación de configuraciones didácticas, las cuales pueden ser ligadas a problemas, subproblemas, o a la manifestación de otros componentes epistémicos, cognitivos o instruccionales que caracterizan el proceso de estudio correspondiente. Los HDS aportan indicadores locales de idoneidad didáctica en algunos aspectos de las facetas y componentes que caracterizan el proceso de estudio.

Un HDS puede contribuir al desarrollo de un proceso de estudio o bloquearlo, dificultar su evolución o limitar el funcionamiento del sistema didáctico. La “significatividad” de un hecho no se refiere entonces exclusivamente a su adecuación al desarrollo de significados de los estudiantes, sino a su importancia para la comprensión del proceso de estudio en sí mismo.

6.1. Trayectoria didáctica generada mediante el proyecto “Alumno típico”

Sesión de clase 1 (2 horas)

Una vez presentados los objetivos del tema el profesor presenta a la clase el proyecto de recogida y análisis de datos que va a usar para contextualizar las principales nociones y técnicas estadísticas.

Destacamos un primer hecho didáctico significativo (HDS) en el que el profesor *explica* la tarea y *recuerda* conocimientos previos (variable estadística, recogida de datos mediante una encuesta, tipos de variables):

HDS₁: *Interacción magistral. Explicación de la tarea y de conocimientos previos*

P: [...] Vamos a tratar de elaborar un perfil de los alumnos fijándonos en una serie de características. Las características van a ser, por ejemplo, si se hace más o menos deporte; esa sería una variable que vamos a tener en cuenta [...]

[...] Estas son variables de tipo estadístico, porque cuando se observan individuos particulares los valores cambian [...]

[...] El problema que planteamos es si tuviéramos que elegir un alumno representativo, en estas variables, de la clase ¿cómo lo elegiríamos? ¿Qué alumno elegiríamos? Para tomar una decisión hay que recoger los datos y analizarlos. [...]

[...] Durante el proyecto, primero vamos a hacer una fase de recogida de datos, vamos a aplicar una encuesta. Luego, trabajando en equipos, van a analizar qué habría que hacer para elegir al alumno típico [...]

[...] Hemos tomado estas variables. La primera es una variable con dos valores: hombre – mujer; una variable dicotómica. La siguiente es una variable cualitativa ordinal, hay un orden; en este caso con tres valores: nada, poco, mucho. La siguiente es una variable cuantitativa, ¿cuántos hermanos tienes?, una variable cuantitativa discreta, discreta porque son valores aislados, involucra números enteros. La que sigue, variable peso, es una variable cuantitativa que se mide con números reales. La última, la variable dinero, es una variable una tanto especial, ¿cuántos euros tienes?, puede ser considerada una variable cuantitativa discreta [...]

Esta actuación docente se puede relacionar con el criterio de idoneidad epistémica: “Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado”. Se pretende “acercar” la tarea a los estudiantes recordándoles algunos conocimientos previos (tipos de variables), lo que puede facilitar que los estudiantes se involucren en la resolución (acto de *devolución*). La interacción magistral resta autonomía a los estudiantes, quienes reciben pasivamente la información, aunque permite economizar tiempo.

Transcurridos aproximadamente 9 minutos de la presentación el profesor interroga a los estudiantes acerca de otras variables que pudieran ser consideradas en el marco de este proyecto. Las respuestas de los alumnos ponen de manifiesto la ausencia de conflictos para identificar nuevas variables.

HDS₂: *Interacción dialógica. Formulación de problemas por los estudiantes*

P: [...] En el contexto de este proyecto, ¿en qué otras variables podemos pensar?

E1: Color preferido.

E2: Lleva o no lleva gafas.

E3: La estatura de cada estudiante.

E4: Llevan o no vaqueros.

E5: Color de los ojos.

P: Bien vemos que es posible elegir distintas variables [...]

Este hecho didáctico se considera significativo porque atiende a uno de los criterios de idoneidad epistémica: “Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)”. Es un indicador de idoneidad interaccional por el formato dialógico implementado, de hecho, las respuestas de los estudiantes sirven al profesor de validación del proceso. También es un indicador positivo de idoneidad cognitiva – afectiva ya que los estudiantes proponen variables estadísticas que tienen para ellos sentido e interés.

Asimismo, los maestros toman conciencia de que se tiene cierta libertad en la elección de variables, aunque dicha elección puede influir en el desarrollo de una situación en el aula de Primaria. Así, esta primera fase tiene una función formativa de la competencia didáctica de los futuros maestros. La didáctica es introducida “en acción” (Artigue,

1995), esto es, las nociones fundamentales de la didáctica y sus aplicaciones surgen en tensión con y al ritmo de las necesidades concretas que los estudiantes en formación tienen.

Seguidamente, el profesor entrega a los estudiantes una hoja de recogida de datos y les pide que completen la información solicitada en cada variable: género (hombre, mujer); ¿haces deporte? (nada, poco, mucho); número de hermanos (incluyendo al propio estudiante, o sea, número de hijos en la familia); peso (Kg.); y dinero que lleva en el bolsillo (cantidad de euros).

Los estudiantes realizan la actividad colocando en una misma fila los datos para cada variable. Una vez que el primer estudiante ha completado la hoja con sus propios datos, la pasa al segundo; éste al tercero y así sucesivamente. Transcurridos algunos minutos, el profesor interviene de la siguiente manera:

HDS₃: *Tiempo requerido para preparar los propios datos. Conflicto mediacional (temporal) y afectivo.*

P: [...] Trabajar de esta manera tiene algunos inconvenientes; uno de ellos es el tiempo y el otro es que una vez que se recojan los datos hay que juntarlos y hacer fotocopias para cada estudiante. Por ello, les voy a dar los datos recogidos de un grupo de 60 estudiantes del curso pasado, estos no son los datos de ustedes pero dan el mismo efecto para el problema que queremos resolver [...]

La actuación del docente está motivada por la gestión del tiempo⁴; se espera que de este modo el tiempo disponible se dedique a otros aspectos del proceso de estudio más relevantes. Al mismo tiempo los estudiantes pueden estar menos motivados para implicarse en el análisis de datos que no son los propios; se rebaja con ello la idoneidad afectiva. Desde el punto de vista epistémico – ecológico el cambio de los datos es irrelevante ya que corresponde a una muestra extraída de una población con características similares (estudiantes del curso anterior).

Con los datos proporcionados se pide a los estudiantes que, organizados en parejas, continúen el trabajo centrándose en responder las preguntas:

— ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?

— ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?

⁴ En la modalidad de ingeniería didáctica que se describe el profesor no se concibe como el “maestro de obra” que debe seguir las pautas marcadas en el proyecto del “ingeniero diseñador”; de hecho, son determinantes las estrategias regulativas que el docente pone en marcha atendiendo al funcionamiento del sistema didáctico. Por diversas razones el profesor, en la implementación observada, optó por entregar a los estudiantes unos datos que correspondían a estudiantes del curso anterior.

A partir de este momento (minuto 16) y por un espacio de aproximadamente 15 minutos los estudiantes trabajan intentando dar respuesta a las cuestiones planteadas. Durante el desarrollo de la actividad el profesor va guiando el trabajo de los grupos; evaluando sus avances, entregando orientaciones y atendiendo dudas específicas.

En la interacción del profesor con los alumnos se manifiestan algunos conflictos cuando los estudiantes tienen que dar respuesta a la primera pregunta.

HDS₄: *Interacción dialógica. Conflicto con el significado de “alumno típico”*

E6: [...] Para elegir un alumno típico ¿Qué elegiríamos?

P: Tienes que comprobar cuántas mujeres y hombres hay, y, luego... si hay más mujeres, sería más representativo tomar una mujer.

E6: Y luego, ¿se hace esto en todas?

P: Para las otras variables, por ejemplo el deporte, hay que ver cuántas personas hacen nada, poco y mucho deporte. Luego ver cuál de estos valores es más representativo...

La actuación docente está motivada por la observación de que algunos estudiantes no atribuyen significado a la expresión “alumno típico”; se reconoce un conflicto semiótico porque se está implementando un formato dialógico de interacción (lo cual es un indicador positivo de idoneidad interaccional). Pero el docente da la solución a la cuestión lo que es negativo desde el punto de vista de la idoneidad cognitiva (se evita que el estudiante indague por sí mismo el significado de alumno típico). En cuanto a la dimensión epistémica – ecológica destaca positivamente el planteamiento de un conflicto entre significados de una expresión en lenguaje cotidiano frente al significado estadístico.

Los hechos didácticos descritos y sus interpretaciones ilustran algunos rasgos principales del modelo instruccional implementado y la utilidad de las nociones didácticas desarrolladas. Se ha realizado un análisis similar para las distintas sesiones presenciales del curso. Por razones de espacio, no se incluye en este artículo el detalle del resto de la trayectoria didáctica implementada.

6.2. Síntesis de hechos didácticos significativos

En este apartado incluimos una síntesis de los principales hechos didácticos identificados en la implementación del proyecto “Alumno típico”, clasificados según las facetas epistémica – ecológica, cognitiva – afectiva, instruccional (interaccional y mediacional). Un análisis similar se ha realizado para los proyectos “Lanzamiento de dos dados” y “Eficacia de un entrenamiento deportivo”, pero por limitaciones de espacio no es posible incluir en este artículo una información similar a la dada para el proyecto “Alumno típico”.

Faceta epistémica – ecológica (objetos y procesos)

- El estudio estadístico se desarrolla centrado en el análisis de los datos del proyecto “Alumno típico”; los estudiantes mencionan otros posibles proyectos que involucran otras variables estadísticas, pero no son abordados.
- El profesor menciona el proceso de recogida de datos mediante una encuesta; se procede a la recogida de datos en la clase. Pero finalmente, aduciendo falta de tiempo, se analizan 60 datos que corresponden a estudiantes de cursos anteriores
- Las *representaciones de uso convencional* en estadística (tablas, gráficos, fórmulas y símbolos) son recordadas por el profesor y utilizadas por los estudiantes durante el desarrollo del proyecto. Durante la sesión práctica los estudiantes tienen también oportunidad de explorar las posibilidades que brindan las tecnologías (Hoja Excel) para construir tablas y gráficos.
- Se proponen *procesos de traducción* entre distintas representaciones: representación de las características de los individuos como medidas (datos), representación de los datos en tablas y gráficos, y comunicación del significado que surge de los datos con lenguaje natural.
- Los *conceptos y definiciones básicas* de la estadística son recordados por el profesor (población, muestra, encuesta, variable, variable discreta, variable continua, variable cualitativa ordinal, promedios: media, mediana, moda; mínimo, máximo, recorrido, dispersión, varianza, desviación típica, distribución de frecuencias, tabla de frecuencias, gráfico de barras, histograma, polígono de frecuencias, gráfico de dispersión, gráfico de cajas, ...).
- Los *procedimientos fundamentales* del tema (cálculo de promedios y dispersiones, construcción de tablas y gráficos) son empleados por los estudiantes para dar respuesta a las cuestiones planteadas.
- El profesor explica cuándo usar la media o la mediana según la forma de la distribución (variable peso).
- El profesor explica *el uso de promedios* según el *tipo de variable* frente a dudas y respuestas erróneas de los estudiantes; se refuerza este contenido a través de una explicación general de la técnica para comparar dos distribuciones.
- Se promueve el desarrollo de argumentos basados en datos pidiendo a los estudiantes que justifiquen sus respuestas y también a través de las justificaciones dadas por el profesor

Faceta instruccional (interaccional – mediacional)

- En las fases de trabajo en equipo se ponen de manifiesto diversas dificultades; algunos alumnos no entienden que quiere decir el alumno típico y cómo determinarlo. Ante el bloqueo el profesor sugiere la solución, rebajando la demanda cognitiva inicial del proyecto.
- En los procesos de institucionalización, distribuidos a lo largo del tiempo presencial, el profesor no sistematiza ni establece significados claros para los siguientes conceptos y técnicas estadísticas: significatividad de las diferencias entre los estadísticos y carácter ideal de los promedios.
- El uso de la hoja Excel ha sido conflictivo para: determinar el rango de datos al momento de hacer los cálculos, calcular la frecuencia relativa y en la construcción de gráficos.

Faceta cognitiva – afectiva (aprendizajes)

Se identificaron como relevantes los siguientes conflictos:

- Significado de “alumno típico”; el profesor ejemplifica esa noción con el caso de la variable, N° de hermanos.
- Un alumno calcula la media del número de hermanos, $165/60 = 2,75$. ¿Qué valor tomar 2 o 3? Conflicto cognitivo en la interpretación de la media mal resuelto por el profesor. Desvía la atención hacia la moda y su cálculo.
- Etiquetado de tablas de frecuencias. No se incluye título en la columna de valores/atributos y en la columna de frecuencias se coloca como título el nombre de la variable.
- Elaboración de tablas de frecuencias para variables continuas; no se determinan intervalos. Uso y notación de intervalos. En un primer momento no se incluye la notación de intervalo y luego hay dificultades para determinar los valores que marcan el límite inferior y superior de la clase
- Tratamiento de variables cualitativas; un estudiante propone el uso de códigos numéricos para representar valores cualitativos y hacer cálculos.
- Cálculo de la media en datos agrupados en intervalos; se insiste en aplicar la fórmula a las marcas de clase, aun cuando se dispone de medios (calculadora) para hacer el cálculo sin agrupar los datos.
- Interpretación de los promedios y la desviación típica para determinar la representatividad del sujeto típico.

La secuencia de los HDS relacionados con la faceta epistémica – ecológica, junto con los relativos a la faceta instruccional, forman la trayectoria epistémica–instruccional implementada, la cual permite explicar parcialmente la progresión de los aprendizajes, descritos a su vez por la secuencia de HDS relativos a la faceta cognitiva – afectiva (trayectoria cognitiva – afectiva). Es necesario tener en cuenta que los HDS descritos se refieren a la fase presencial del proceso de estudio, careciéndose de información de la fase de estudio personal que se supone debe realizar cada estudiante, apoyado en los recursos mencionados en el diseño.

El profesor ha procurado institucionalizar a lo largo del proceso las nociones y procedimientos propios de la estadística descriptiva (aunque con algunas lagunas), apoyado en el uso de la hoja EXCEL y presionado por la disponibilidad de un tiempo escaso. Determinar si finalmente los conflictos de aprendizaje que se han ido identificando han sido finalmente superados requiere aplicar técnicas de evaluación sumativa que por limitaciones de espacio no es posible describir en este artículo.

7. ANÁLISIS RETROSPECTIVO

En esta sección se compara, en primer lugar, el diseño del proyecto “Alumno típico” con los hechos didácticos significativos observados. Seguidamente, se determina y se discute la trama de normas que han condicionado tanto el diseño como la implementación. Finalmente, se valora la idoneidad didáctica y se proponen posibles mejoras.

7.1. Comparación del diseño con los hechos didácticos observados

Tipo de problema y prácticas estadísticas

Las prácticas estadísticas operativas y discursivas realizadas en la resolución del problema fueron concordantes con las contempladas en el diseño. En la cuestión 1, los estudiantes reducen los datos en tablas de frecuencias y calculan promedios (media, mediana y moda) utilizando principalmente la moda para identificar el alumno típico, aunque hay también alumnos que emplean la media. El uso de los promedios de acuerdo al tipo de variables, y de la media o la mediana según la forma de la distribución fue explicado por el profesor. Para determinar la representatividad del alumno típico se utiliza el tamaño de las frecuencias relativas en las variables género y deporte; en las otras tres variables, no se llega a analizar la representatividad de los promedios según el tamaño relativo de las dispersiones.

En la cuestión 2, los estudiantes calcularon promedios y dispersiones y construyeron diagramas adosados de las dos submuestras (chicos y chicas). El profesor complementó las prácticas realizadas con el uso de gráficos de cajas y diagramas de barras contrapuestas (gráficos de barras e histogramas) como otra forma de comparación estadística de las dos distribuciones.

Elementos lingüísticos

En concordancia con lo señalado en el diseño, la mayoría de los estudiantes no atribuye significado inmediato a las siguientes expresiones lingüísticas relativas a qué es un estudiante tipo.

Esta situación, fue abordada por el profesor a través de explicaciones magistrales (explicaciones para toda la clase) y puntuales (dirigidas a estudiantes o grupos específicos) que permitieron dar el significado esperado a dichas expresiones.

Las dificultades previstas en la rotulación de las tablas de frecuencias y gráficos se produjeron de manera reiterada y requirieron una atención especial por parte del docente. Lo mismo sucedió con el lenguaje de símbolos y fórmulas asociados a conceptos y procedimientos estadísticos relativos a promedios y dispersiones.

Una situación similar a la anterior, sucedió con el lenguaje asociado al uso de la hoja Excel y su funcionamiento. La mayoría de los estudiantes no manejaba el lenguaje técnico de la herramienta y se manifestaron dificultades en la manera de representar e interpretar los datos.

Elementos conceptuales

Los conceptos estadísticos elementales son introducidos por el profesor al inicio de la primera clase constituyéndose en elementos esenciales para comprender y realizar las prácticas operativas y discursivas de la estadística estudiada. Hubo conceptos con los que se esperaba que los estudiantes estuvieran familiarizados que resultaron conflictivos; específicamente, los conceptos de frecuencia relativa, mediana, dispersión, y desviación típica debieron ser explícitamente tratados porque no eran recordados o estaban insuficientemente comprendidos.

El significado de la media, mediana y moda, como valores representativos de un conjunto de datos, resultaron conflictivos. El profesor debió abordar dichos conceptos a través de explicaciones magistrales y reforzarlos en las actividades de trabajo en equipo.

Propiedades

Las propiedades descritas en el diseño no fueron utilizadas implícitamente sino que fueron explicadas por el profesor como una forma de orientar el trabajo de los estudiantes. La propiedad “si la dispersión respecto de un promedio es alta (o baja) el promedio es menos (o más representativo) de la colección de datos” presentó una dificultad particular para los estudiantes al momento de determinar la representatividad del alumno típico.

Procedimientos

Entre los procedimientos considerados conocidos por los estudiantes en el diseño, el cálculo de las frecuencias relativas y la construcción de diagramas mediante la hoja Excel resultaron particularmente conflictivos.

Los demás procedimientos, tal como ha sido señalado en el diseño, son contenidos no recordados por los estudiantes y por lo tanto tuvieron carácter de contenidos emergentes.

Argumentos

En la cuestión 1, para justificar las características de un estudiante típico o representativo de la clase, los argumentos empleados por los estudiantes para las dos primeras variables (género y deporte) son concordantes con lo señalado en el diseño. En el resto de las variables (número de hermanos, peso y dinero), en lugar de utilizarse la mediana como se plantea en el diseño, se utilizó principalmente la media sin tener en cuenta la forma de la distribución de los datos.

En la cuestión 2, para establecer las diferencias entre chicos y chicas la mayoría de los grupos realizan los cálculos esperados en el diseño (media, mediana, moda, rango, desviación típica); sin embargo, la realización de dichos cálculos es motivada por el profesor y no siempre son bien utilizados por los estudiantes para justificar sus respuestas.

Procesos

Los dos procesos de idealización considerados particularmente “complejos” en el diseño (el sujeto típico no siempre corresponde al valor de la variable y el grado de representatividad depende de la cuantía de la dispersión) no fueron abordados durante las sesiones presenciales con la atención esperada.

Los procedimientos y propiedades aplicados para dar respuesta a las cuestiones planteadas, fueron generalizados de acuerdo a lo planteado en el diseño. El profesor enfatizó en estos dos procesos vistos como “reglas” generales aplicables a otras situaciones.

En síntesis, el contraste del diseño con los HDS da cuenta que se han “puesto en juego” los objetos y procesos previstos en el diseño. Desde el punto de vista cognitivo se han manifestado la mayoría de los conflictos previstos y algunos otros. Desde el punto de vista instruccional se ha constatado que los estudiantes han sido “excesivamente guiados” por el profesor; han tenido “poca autonomía” para dar respuesta por sí mismos a las cuestiones planteadas. Esto ha sido así por decisión del profesor ante los frecuentes bloqueos de los estudiantes y el tiempo limitado para impartir los contenidos. Se ha revelado que pretender que los estudiantes, en su primer encuentro con el tema, movilicen los objetos estadísticos, tablas de frecuencias, medidas de tendencia central y

dispersión para comparar dos distribuciones de frecuencias, a partir de las consignas dadas en el planteamiento del proyecto es bastante ilusorio.

7.2. Dimensión normativa. Condicionamientos del proceso de estudio

La implementación de los proyectos de análisis de datos en el caso que se analiza en este artículo, se ajustó al desarrollo del bloque “tratamiento de la información” del currículo oficial. La Estadística es una parte de los currículos de matemáticas de Educación Primaria y Secundaria en España incluyéndose en las nuevas propuestas curriculares (MEC, 2006) un módulo sobre “tratamiento de la información, azar y probabilidad” desde el primer ciclo de primaria (6-8 años).

La recogida y análisis de datos de encuestas, experimentos y observaciones y el uso de un conjunto de técnicas (incluyendo tablas de doble entrada) son recomendadas para el segundo ciclo (8-10 años), mientras que para el ciclo final (10-12 años) se mencionan la media, la moda, el rango, así como la aleatoriedad y la probabilidad. El uso de recursos tecnológicos es también reclamado por la normativa curricular.

La didáctica de las matemáticas “recomienda” el uso del método de proyecto (Nolan y Speed, 1999; Connor, Davies y Holmes, 2006; Batanero y Díaz, 2011) para abordar el desarrollo de las competencias estadística de los estudiantes, como medio de lograr que los estudiantes atribuyan significado a las técnicas y el discurso estadístico, y favorecer los procesos de personalización de los conocimientos.

Se trata pues de una norma externa al aula que condiciona y orienta el trabajo del profesor. Esta norma ecológica-cognitiva puede entrar en conflicto con la práctica habitual en el estudio de las matemáticas, según la cual se presentan primero los conceptos y procedimientos, ilustrados con ejemplos sencillos, para después se aplicarlos a otras situaciones más realistas. También es usual no tener en cuenta las distintas fases de los procesos de modelización matemática.

Una orientación socio-constructivista del aprendizaje, que valora positivamente la autonomía y el trabajo cooperativo es una fuente de normas para el docente: “Planifica e implementa las actividades de modo que los alumnos tengan una “estrategia de base” para abordar las tareas, bien individualmente y trabajando en equipo y que “construyan” los conocimientos de manera autónoma”. Pero en la evolución de las trayectorias cognitivas de los estudiantes pueden aparecer bloqueos y conflictos que obligan al profesor a modificar esas reglas iniciales socio-constructivistas, implementando configuraciones de tipo magistral. Esta circunstancia aumenta considerablemente la responsabilidad del profesor, al menos al principio de implementar este sistema, aunque con la práctica los tipos de conflictos de los estudiantes (que se repiten curso a curso) serán familiares al profesor, que dispondrá pues de indicadores para el control y mejora del funcionamiento del sistema didáctico.

Una norma meta-epistémica puesta de manifiesto en la realización del proyecto “Eficacia de un entrenamiento deportivo”: La respuesta a la pregunta, “¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?”, requiere aplicar las normas epistémicas de la estadística. Cuando esta cuestión se aborda en secundaria obligatoria rige otra norma: “las diferencias entre distribuciones se comprueban mediante técnicas descriptivas y son referidas a las muestras usadas, no a las poblaciones de donde provienen”. Como se dijo anteriormente, esta “debilidad” subjetiva en cuanto a la importancia relativa de las diferencias estadísticas también afecta a las técnicas inferenciales donde es necesario adoptar un nivel de significación en los contrastes de hipótesis que depende de factores contextuales, en cierto modo subjetivos.

Una norma meta-instruccional a tener en cuenta en el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje: La norma instruccional, “El análisis de datos debe realizarse usando recursos tecnológicos de cálculo y representación gráfica”, debe ser complementada con esta otra: “El uso de recursos tecnológicos debe evitar el fenómeno de deslizamiento metadidáctico (Brousseau, 1998) (en este caso, sería aprender la tecnología, en lugar de desarrollar competencia estadística)”.

7.3. Idoneidad del proceso de estudio. Identificación de posibles mejoras

En el caso que se analiza en este artículo los elementos de referencia para valorar la idoneidad epistémica del proceso implementado deben ser los correspondientes al significado institucional pretendido por el docente. En cambio, para la idoneidad epistémica de la planificación habrá que indagar los elementos del significado del análisis elemental de datos en textos e investigaciones publicadas relativas a su estudio en niveles educativos similares. Los elementos de referencia para las restantes dimensiones o facetas (cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) deberán indagarse en los textos y publicaciones de investigaciones didácticas sobre dichos aspectos. Trabajos de síntesis como los de Batanero (2001) pueden ser de gran ayuda en la reconstrucción de los significados de referencia a usar en una investigación particular.

7.3.1. Facetas epistémica y ecológica

La idoneidad epistémica del proceso de estudio completo se puede considerar como alta, tanto en la fase de diseño como de implementación⁵. Esta valoración la basamos en

⁵ El juicio sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio tiene un carácter ordinal, y se aplica a cada faceta. Se valora como alta, media, baja, según la presencia o ausencia de un conjunto de indicadores empíricos de idoneidad incluidos en una pauta o guía elaborada en trabajos previos (Godino, 2011), lo cual permite atribuir una cierta objetividad a la valoración. Tales indicadores reflejan “principios didáctico-matemáticos” sobre los cuales existe un cierto consenso en la comunidad de educación matemática. La valoración ordinal de la idoneidad didáctica no es relevante. Lo importante es la identificación de aspectos específicos del diseño o de la implementación que podrían ser cambiados de una manera fundamentada en próximos ciclos de estudio realizados en circunstancias similares.

que la realización de los tres proyectos seleccionados, complementados con los documentos para el autoestudio (texto y colección de ejercicios), ponen en juego los conocimientos sobre estocástica elemental necesarios para su enseñanza en Educación Primaria y primer ciclo de secundaria⁶.

La situación – problema creada en torno a la pregunta, *¿Ha sido efectivo el entrenamiento deportivo en el conjunto de la clase?*⁷ permite contextualizar y poner en juego los “contenidos” de estadística descriptiva abordables en Educación Secundaria obligatoria. También se puede orientar hacia la estadística inferencial propia de niveles superiores, test de hipótesis, intervalos de confianza, análisis de varianza. La inclusión de variables adicionales, como peso y altura de los sujetos permite ampliar el estudio hacia los temas de correlación y regresión, tanto desde un punto de vista descriptivo como inferencial. Se han puesto en juego diversos modos de representación de los datos, sus traducciones y tratamientos (tablas, gráficos, lenguaje ordinario) que apoyan la argumentación estadística de las conclusiones sobre el efecto de las variables (tratamiento y sexo). Emergen nuevos conocimientos estadísticos referidos a la comparación de distribuciones de frecuencias, apoyados en los conceptos, propiedades y procedimientos previos (medidas de posición central, dispersión y forma).

Se debe reconocer que el proyecto 1 (alumno típico) tiene un carácter “artificial”, de escaso interés práctico. Su principal ventaja es que los datos se pueden recoger en la propia clase y permite incluir variables de diverso tipo, poniendo en juego las diversas técnicas estadísticas, tanto descriptivas como inferenciales. Una variante de la situación introductoria podría ser plantear a los estudiantes una cuestión más abierta que permitiera plantear la búsqueda de variables de interés para los alumnos de primaria y el enunciado de consignas que motiven el proceso de recogida y análisis de datos (generación de problemas). Este cambio podría inducir una mejora en el componente afectivo del proceso de estudio (utilidad de la estadística en la vida cotidiana y profesional).

7.3.2. Facetas cognitiva y afectiva

La idoneidad cognitiva *a priori* se puede considerar también alta; se trata de estudiantes universitarios que se han inscrito en un programa de formación de maestros, quienes han estudiado previamente los contenidos de estadística y probabilidad en las etapas de Educación Primaria y Secundaria. Es razonable suponer que los objetivos de aprendizaje se pueden alcanzar con los medios disponibles. Sin embargo, durante el

⁶ El Plan de Estudios que siguen los maestros en formación inicial que participan en esta experiencia contempla una asignatura orientada a la formación matemática de los estudiantes (Bases matemáticas para la educación primaria). La ingeniería didáctica descrita en este artículo se refiere a esta asignatura impartida en el primer año. La formación didáctica sobre los distintos bloques de contenido matemático se contempla en otras asignaturas impartidas en cursos posteriores.

⁷ En (Rivas, Godino, Arteaga y Estepa 2013) se describe la implementación de este proyecto y resultados obtenidos en la experiencia descrita en este artículo.

proceso de estudio implementado, y principalmente en los informes elaborados sobre el proyecto “eficacia de un entrenamiento deportivo” y la prueba sumativa final (Godino, Arteaga, Estepa y Rivas 2013), se han revelado dificultades que indican que la idoneidad cognitiva *a posteriori* del proceso de estudio ha sido baja. ¿Qué explicaciones se pueden dar para estos resultados? ¿Cómo mejorar el aprendizaje?

Se tiene constancia de que algunos estudiantes no asistieron a las sesiones de clase presenciales, y muy pocos hicieron uso de las tutorías individuales. Esto puede indicar una falta de compromiso personal con el proceso de estudio. Posiblemente un porcentaje de estudiantes relativamente elevado se han inscrito en la carrera de magisterio por motivos ajenos a la profesión de maestro. Incluso encontramos estudiantes que en ocasiones manifiestan una cierta fobia a las matemáticas.

En cuanto a las adaptaciones curriculares se puede contemplar el enunciado de alguna consigna más abierta para los estudiantes con mayor capacidad. Por ejemplo, en el proyecto “eficacia de un entrenamiento deportivo” se puede pedir la inclusión de variables adicionales, como peso y altura de los sujetos, lo cual permite ampliar el estudio hacia los temas de correlación y regresión, tanto desde un punto de vista descriptivo como inferencial.

El instrumento de evaluación sumativa final se puede mejorar incluyendo cuestiones relacionadas con la comprensión de los distintos contenidos estudiados, en particular, los promedios y dispersiones.

7.3.3. Faceta instruccional (*interaccional y mediacional*)

El formato de interacción principal que se ha implementado en las clases presenciales se puede describir como “Interacción dialógica y trabajo cooperativo”. Hay un predominio de las explicaciones del profesor de conceptos y procedimientos, apoyadas con el uso de diapositivas. Las explicaciones del profesor son precedidas por el trabajo de los estudiantes con una situación – problema (proyectos y ejercicios) abordada cooperativamente por los estudiantes, algunos de los cuales presentan sus soluciones al grupo clase. No se pretende que los estudiantes “construyan/ reinventen” los conocimientos pretendidos, sino crear un contexto que permita al profesor dar sentido a tales conocimientos. Con la realización del proyecto “entrenamiento deportivo”, en un formato de interacción con predominio de trabajo personal y cooperativo se pretende que los estudiantes *apliquen* los conocimientos previamente introducidos en las sesiones de gran grupo.

El grado de autonomía de los estudiantes para la realización del proyecto “entrenamiento deportivo” fue alta ya que una vez presentado el problema tenían libertad para enfocar la solución, la cual se iniciaba en una clase presencial, pero debía ser completada durante la semana de manera autónoma. En los proyectos “alumno típico” y “lanzamiento de dos dados”, el profesor tomó una actitud más directiva,

aunque había momentos, más bien breves, en los que los estudiantes debían buscar sus propias soluciones, presentarlas en clase y discutirlos. Sería deseable diseñar procedimientos que mejoren la autonomía y responsabilidad matemática de los estudiantes. En la primera experimentación del diseño instruccional realizada en el curso 2011-12 los estudiantes entregaron sus informes del proyecto “entrenamiento deportivo” sin que éstos fueran presentados y discutidos en clase. Fueron usados por el profesor como evaluación final de una parte de los contenidos del curso. En el curso 2012-13 algunos de estos informes fueron presentados y discutidos en clase permitiendo crear una situación de comunicación y validación de sus respuestas. Este cambio mejoró la idoneidad interaccional del proceso.

El número excesivo de alumnos por clase (58 en la primera experimentación, 75 en la segunda) hace difícil el seguimiento individualizado del progreso del aprendizaje de cada estudiante. Se realizó más bien un seguimiento de cada equipo (3-4 estudiantes), evaluando el funcionamiento de los equipos y sobre todo el informe colectivo del trabajo práctico (proyecto “entrenamiento deportivo”). El uso de la hoja de cálculo Excel es una herramienta imprescindible para el análisis de datos; asimismo, el uso del simulador del lanzamiento de dos dados permite justificar de manera intuitiva y visual la ley de los grandes números. Ambos recursos, especialmente la hoja Excel requiere, no obstante, una planificación más detallada y más tiempo para lograr convertirla en un instrumento de trabajo en manos del estudiante. También el simulador fue usado por el profesor como un dispositivo de presentación, y no como una herramienta de exploración por los propios estudiantes.

7.3.4. *Idoneidad didáctica y efecto Topaze*

En la implementación del proceso de estudio hemos identificado con relativa frecuencia subconfiguraciones didácticas (*hechos didácticos significativos*) que en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas reflejan un comportamiento tipo “Topaze” por parte del profesor⁸. Usando la noción de idoneidad podemos decir que de ese modo se rebajan los objetivos de aprendizaje, por lo que se disminuye la idoneidad epistémica de la actividad matemática pretendida. También se disminuye la idoneidad interaccional al suprimir o disminuir la autonomía del estudiante. Sin embargo, aumenta la idoneidad cognitiva: frente a no aprender nada, algo se aprende, aunque sea sólo la ejercitación de determinadas rutinas. También se aumenta la idoneidad afectiva: se evita la frustración y el abandono del estudiante.

Parece necesario pensar en la idoneidad didáctica en términos globales, para el proceso de estudio desarrollado por una clase en su conjunto, y en términos personales, para el proceso de estudio que realiza cada aprendiz. El formato de trabajo cooperativo mediante la organización de equipos de estudiantes que abordan la resolución de un

⁸ Voigt (1985) y Bauersfeld (1988) describen un tipo de patrón de interacción que denominan del “embudo” (funnel pattern) que tiene similitudes con el efecto Topaze.

problema da lugar a múltiples momentos de efecto Topaze: los alumnos más aventajados responden a las preguntas y bloqueos de los estudiantes menos capaces, quienes con frecuencia se limitarán a imitar lo que hacen los compañeros. Las explicaciones y cambios en la tarea son dadas dentro de un grupo, o bien por el profesor cuando es interpelado por un equipo, o un estudiante individual. Estas intervenciones (institucionalizaciones puntuales) pueden no afectar a otros estudiantes, los cuales tienen aún oportunidad de desarrollar un trabajo autónomo con mayor idoneidad epistémica. Los comportamientos tipo Topaze del profesor, o de los estudiantes que actúan como tales en un equipo, pueden ser consecuencia de un saber intuitivo que les permite optimizar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio, tanto individuales como grupales.

Nuestro análisis ha revelado que los momentos de institucionalización, entendidos como momentos de regulación, esto es, segmentos de actividad didáctica en los cuales se recuerdan o fijan normas sociomatemáticas (convenciones aceptadas en la comunidad matemática correspondiente) y reglas epistémicas (que requieren una justificación lógica), son densos por doquier en los procesos de instrucción matemática. Pueden tener lugar en las fases de devolución colectiva de las tareas, con el fin de que los estudiantes puedan entenderlas y asumirlas (el profesor recuerda convenciones lingüísticas, conceptos, procedimientos o propiedades supuestas conocidas). También pueden ocurrir en las fases de trabajo exploratorio (realizado de manera individual o en equipo) en las que el profesor recuerda, aclara o introduce normas a un estudiante o a un grupo reducido que está bloqueado para progresar en la actividad matemática solicitada. Estos momentos puntuales de institucionalización, aunque con frecuencia supone un claro efecto Topaze (se rebajan las expectativas de aprendizaje) tratan de mejorar la idoneidad cognitiva, afectiva y temporal del proceso de instrucción.

8. SÍNTESIS DE RESULTADOS E IMPLICACIONES

En cada una de las fases metodológicas de la ingeniería didáctica el EOS aporta herramientas propias que permiten hacer análisis complementarios respecto a los realizados con otros marcos teóricos. Así, en la fase de estudio preliminar la noción de significado de referencia da una orientación específica a la epistemología del contenido cuyo aprendizaje se pretende. Ello es así por la manera pragmatista – antropológica en que se interpreta el significado institucional de los objetos matemáticos. En la fase de diseño, una vez seleccionada una muestra representativa de situaciones – problemas, nos propone prever de manera sistemática la trama de objetos y procesos que la resolución de tales situaciones pone en juego, a fin de identificar posibles conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación. En la fase de implementación las distintos tipos de configuraciones didácticas, procesos didácticos y la noción de conflicto semiótico interaccional ayudan a identificar hechos didácticos significativos que orientan la evaluación formativa y la optimización del aprendizaje. En la fase de evaluación o análisis retrospectivo, la noción de idoneidad didáctica aporta vías para la reflexión sistemática sobre las distintas

facetas del proceso de estudio e identificar potenciales decisiones que mejoren dicho proceso en nuevas implementaciones.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemático, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales y la identificación de conflictos semióticos potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles. El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica.

Queda pendiente de hacer una comparación sistemática entre las diferentes modalidades de ingeniería didáctica: todas guardan un cierto “aire de familia”, al tiempo que se distinguen por los instrumentos conceptuales que aplican y los resultados que permiten desvelar. Pero realizar esta comparación no es el objetivo de este artículo.

Los informes de los equipos sobre el proyecto “Eficacia de un entrenamiento deportivo” (Rivas, et al., 2013) mostraron que el cálculo de la media y desviación típica de las distribuciones mediante el uso de la hoja de cálculo fue logrado por los estudiantes, y tales estadísticos fueron aplicados para decidir sobre la efectividad del tratamiento. Sin embargo, aspectos más avanzados del razonamiento estadístico, como es la comparación de las dispersiones, la identificación de valores atípicos y su interpretación, así como la realización de histogramas de frecuencias adosadas ha supuesto tareas con alto grado de dificultad para los estudiantes que han participado en esta acción formativa.

Como conclusión de los análisis realizados resaltamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones – problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. De esta manera, además, se hacen posibles los momentos exploratorios de la actividad matemática por parte de los estudiantes. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Font, et al., 2013), los cuales deben ser reconocidos por el profesor para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento y competencia. El estudio de tales objetos matemáticos y sus respectivos procesos asociados debe ser planificado por el docente organizando los correspondientes procesos didácticos de validación, institucionalización y ejercitación.

Nuestro análisis ha revelado varios desafíos del profesor de matemáticas/ estadística para el logro de una enseñanza idónea de los contenidos estadístico: 1) tomar conciencia de la naturaleza compleja del razonamiento estadístico, lo que requiere el uso de proyectos de análisis de datos; 2) reconocer las configuraciones de objetos y procesos estadísticos que se ponen en juego en la resolución de los proyectos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos); 3) implementar procesos de estudio que contemplen procesos didácticos de exploración, formulación/ comunicación, validación, ejercitación y evaluación.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el diseño e implementación de procesos de estudio con alta idoneidad didáctica requiere el concurso de factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el caso del factor tiempo asignado al estudio. El proceso de estudio analizado en este trabajo tuvo lugar en tres semanas (a razón de 4,5 horas presenciales semanales), durante las cuales se supone que los estudiantes deberán dedicar un tiempo adicional de estudio personal (aproximadamente, 30 horas de trabajo individual y en equipo). Un cuarto desafío se presenta al profesor referido a cómo motivar a los estudiantes para que se comprometan en el estudio de las fuentes documentales proporcionadas y utilicen los espacios (virtuales y presenciales) puestos a su disposición.

Es propio de las investigaciones orientadas al diseño instruccional la aplicación de varios ciclos de investigación mediante los cuales los medios y estrategias que se diseñan e implementan se van mejorando progresivamente. En cierto modo, la investigación realizada en el primer ciclo puede no ser del todo adecuada, a pesar de que sea precedida de un estudio preliminar y de un análisis a priori. El análisis retrospectivo es esencial entonces para poder introducir cambios fundamentados en los sucesivos ciclos, que permitan progresivamente obtener ingenierías más idóneas y ajustadas a las restricciones normativas. Así, la noción de idoneidad didáctica (en sus diversas componentes e indicadores) y el desarrollo de la dimensión normativa basados en el EOS se revelan especialmente útiles en la fase de análisis retrospectivo, puesto que orientan el reconocimiento de puntos de mejora en el siguiente ciclo de rediseño y experimentación.

Anexo I: Diseño general de la unidad temática “Estadística y probabilidad”

COMPONENTE	DESCRIPCIÓN
<i>Motivación curricular</i>	La estadística es hoy una parte de la educación general deseable para los ciudadanos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación.
<i>Objetivos generales</i>	<ul style="list-style-type: none"> – Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo. – Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

	– Mostrar a los estudiantes aplicaciones de la Estadística para resolver problemas reales.
<i>Competencias transversales genéricas</i>	Capacidades de resolución de problemas, comunicación, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo.
<i>Contenidos</i>	La Estadística y sus usos. Población, muestra y variables estadísticas. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos aleatorios. Concepto de probabilidad y diferentes aproximaciones a la misma. Asignación de probabilidad: regla de Laplace. La Estadística como conocimiento cultural.
<i>Metodología:</i>	
Módulo 1 (proyecto “Alumno típico”)	Sesión 1 (2 horas) y sesión 2 (1 hora): Presencial, gran grupo. Interacción magistral, dialógica y trabajo cooperativo Sesión 3 (1,5 horas): Seminario de prácticas; presencial, clase dividida en tres subgrupos. Interacción dialógica y trabajo cooperativo.
Módulo 2 (proyecto “Lanzamiento de dos dados”)	Sesión 4 (2 horas) y sesión 5 (1 hora): Presencial, gran grupo. Interacción magistral, dialógica y trabajo cooperativo.
Módulo 3 (proyecto “Eficacia entrenamiento deportivo”)	Sesión 6 (1,5 horas): Seminario de prácticas; presencial, clase dividida en tres subgrupos. Interacción dialógica y trabajo cooperativo.
<i>Evaluación</i>	El componente teórico será evaluado mediante la realización de un examen escrito en el que el estudiante deberá resolver una situación-problema que implique la aplicación de las nociones y procedimientos estadísticos – probabilísticos estudiados en las sesiones de clase. La evaluación tendrá también en cuenta la asistencia y participación en las sesiones de clases prácticas, así como la calidad de los informes solicitados en los correspondientes Cuadernos de trabajo en equipo.
<i>Bibliografía y recursos</i>	Batanero y Godino (2002); Colección de ejercicios resueltos; colección de diapositivas. Ordenadores personales (hoja Excel)

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS

- ARTIGUE M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9 (3), 281-308.
- ARTIGUE M. (1995) El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 7-23). Bogotá: Una empresa docente.
- ARTIGUE M. (2011) L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F.

- Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BATANERO C. (2001) *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>
- BATANERO C., BURRILL G., & READING C. (2011) (Eds). Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study. Berlin: Springer.
- BATANERO C. & DÍAZ C. (Eds.). (2011) *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/batanero/publicaciones%20index.htm>
- BATANERO C. & GODINO J. D. (2003) *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- BAUERSFELD, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Coony y D. Grows (Eds.), *Effective Mathematics Teaching* (p. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/ Erlbaum.
- BLUMER, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].
- BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- COBB, P. Y BAUERSFELD, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- COBB P., & GRAVEMEIJER K. (2008) Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- CONNOR D., DAVIES N. & HOLMES P. (2006). Using real data and technology to develop statistical thinking. En G. Burrill (Ed.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 185- 194). NCTM, 68 Yearbook.
- DÍAZ C., BATANERO C., WILHELMI M. R. (2008) Errores frecuentes en el análisis de datos en Educación y Psicología. *Publicaciones*, 38, 9-23.
- FONT V., GODINO J. D. & GALLARDO J. (2013) The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82:97–124.
- FRANKLIN C., KADER G., MEWBORN D., MORENO J., PECK R. PERRY M. & SCHEAFFER, R. (2005) *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE)*

- report: *A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/.
- GODINO J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.
- GODINO, J. D. (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- GODINO J. D., ARTEAGA P., ESTEPA A. & RIVAS H. (2013) Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 173-180). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en, <http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/2%20Comunicacion%2014.pdf>
- GODINO J. D. & BATANERO C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- GODINO J. D., BATANERO C. & FONT V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- GODINO J. D., BATANERO C., CONTRERAS A., ESTEPA A. LACASTA E. & WILHELMI M.R. (2013) Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8*, Turquía.
- GODINO J. D., CONTRERAS A. & FONT V. (2006) Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- GODINO J. D., FONT V., WILHELMI M. R. & CASTRO C. (2009) Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- HASPEKIAN M. (2005). An „instrumental approach“ to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109-141.
- KELLY A. E., LESH R. A. & BAEK J. Y. (Eds.) (2008) *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.
- LAGRANGE J. B. & ERDOGAN E. O. (2009) Teachers' emergent goals in spreadsheet-based lessons: analyzing the complexity of technology integration. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 65-84.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria*. Madrid: MEC.
- NOLAN D. & SPEED T.P. (1999) Teaching statistics theory through applications. *American Statistician*, 53, 370-375.
- RIVAS H., GODINO J. D., ARTEAGA P. & ESTEPA A. (2013) Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. En A. Berciano, G.

- Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 467-474). Bilbao: SEIEM.
- TROUCHE L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307.
- VOIGT, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), 69-118.
- WILD C. & PFANNKUCH M. (1999) Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- WILHELMI M. R., FONT V. & GODINO J. D. (2005) Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques : Réflexions sur la théorie des situations didactiques et l'approche ontologique et sémiotique. *Colloque International «Didactiques: quelles références épistemologiques»*. Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education. IUFM d'Aquitaine (Bordeaux, France).