

# ARTICULACIÓN DE LA INDAGACIÓN Y TRANSMISIÓN DE CONOCIMIENTOS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES<sup>1</sup>

Juan D. Godino, Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas y José M. Contreras

Universidad de Granada

**RESUMEN.** Diversas teorías postulan que el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias experimentales debe estar basado en una pedagogía constructivista, orientada hacia la indagación de situaciones problemas por parte de los estudiantes, y asignando al profesor un papel de facilitador. En un extremo opuesto se sitúan otras teorías que defienden un papel más protagonista por parte del profesor, que implicaría la transmisión explícita del conocimiento y la recepción activa de los estudiantes. En este trabajo, basándonos en una síntesis de estas posiciones instruccionales, razonamos que la optimización del aprendizaje requiere adoptar una posición intermedia entre ambos extremos, reconociendo la dialéctica compleja entre indagación por parte del estudiante y transmisión del conocimiento por parte del profesor. Nos fundamentamos en la asunción de presupuestos antropológicos y semióticos sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y científicos, así como en supuestos relativos a la estructura de la cognición humana.

**Palabras claves:** teorías de la instrucción, aprendizaje constructivista, transmisión de conocimientos, enfoque ontosemiótico, conocimiento matemático.

**ABSTRACT.** Different theories assume that the learning mathematics and sciences should be based on constructivist methods, where the students inquire problem - situations and assign a facilitator role to the teacher. From a contrasting view, other theories advocate for giving a more central role to the teacher, which involves explicit transmission of knowledge and the students' active reception. In this paper we reason that the optimization of learning requires adopting an intermediate position between these two extremes models, because of the complex dialectic between the students' inquiry and the teacher's transmission of knowledge. We base our position on a model with anthropological and semiotic assumptions about the nature of mathematical and scientific objects, as well as on the structure of human cognition.

---

<sup>1</sup> Versión revisada y ampliada de la comunicación presentada en la *Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CEME9, 4-8 February 2015)*, Prague, Czech Republic. (Versión en inglés publicada en, *Acta Scientiae*, 18(4), Edição Especial, 2016.

**Key words:** theories of instruction, inquiry learning, knowledge transmission, onto-semiotic approach, scientific and mathematical knowledge

## 1. INTRODUCCIÓN

El debate entre los modelos de escuela que “transmite conocimientos” y de escuela en la que “se construye conocimientos” parece inclinarse actualmente a favor del segundo. Esta preferencia se puede observar en las orientaciones curriculares de diversos países, que adoptan marcos teóricos de tipo constructivista o socio-constructiva.

Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de sus aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso. Cuando son desafiados con tareas elegidas de manera apropiada, los estudiantes adquieren confianza en su habilidad para abordar problemas difíciles, desean resolver las cosas por sí mismos, muestran flexibilidad al explorar ideas matemáticas e intentar vías de solución alternativas, y disposición para perseverar (NCTM, 2000, p. 20).

En la educación matemática y las ciencias experimentales, tanto para el aprendizaje del alumno, como para el desarrollo profesional del profesor, los puntos de vista constructivistas desplazan el centro de atención hacia los *procesos* propios de la disciplina, el trabajo práctico, la realización de proyectos y resolución de problemas, en lugar de priorizar el estudio de los hechos, leyes, principios y teorías que constituyen los cuerpos de *conocimientos* de dichas disciplinas.

Este debate está ocultando que los alumnos difieren en capacidades y conocimientos, y que la mayoría necesita una gran cantidad de guía para aprender; aunque también es cierto que algunos estudiantes tienen altas capacidades y conocimientos, por lo que pueden aprender mucho con poca o ninguna ayuda. Asimismo, se soslaya la cuestión de que el tipo de ayuda puede depender de la naturaleza de lo que se pretende construir o transmitir. Ante esta situación, se plantea la pregunta del apoyo que debería dar un profesor ante una clase usualmente heterogénea, cuando se desea conseguir el aprendizaje de conocimientos, comprensiones y competencias matemáticas y científicas.

La familia de teorías instruccionales denominadas “Inquiry-Based Education” (IBE), “Inquiry-Based Learning” (IBL) y “Problem-Based Learning” (PBL), que postulan el aprendizaje basado en la indagación con poca guía por parte del profesor parecen no tener en cuenta la heterogeneidad de las clases y diversidad de conocimientos que se pretenden estudiar. Estos modelos pueden ser idóneos para una élite de alumnos, pero posiblemente no para la mayoría, pues el soporte que puede dar el profesor puede influir significativamente en el aprendizaje, incluso en estudiantes con altas capacidades.

En este trabajo argumentamos la necesidad de implementar modelos instruccionales mixtos que articulen la construcción/ indagación con la transmisión de conocimientos, para lograr

una instrucción que optimice localmente el aprendizaje. El supuesto básico es que los momentos en los que puede tener lugar transmisión y construcción de conocimientos son *densos por doquier* en el proceso de instrucción. La optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica y compleja entre los roles del profesor como instructor (transmisor) y facilitador (gestor) y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo de información significativa:

Debido a que el rango de objetivos que pueden ser incluidos en una única lección, y casi con seguridad en una secuencia de lecciones, el mejor o más efectivo método de enseñanza puede ser una mezcla de métodos, con una oportuna y ágil selección entre ellos (Hiebert & Grouws, 2007, p. 374).

La discusión planteada sobre los modelos instruccionales indagatorios y transmisivos se puede relacionar con el debate entre constructivismo y objetivismo (Jonassen, 1991), así como con la distinción entre los modelos de enseñanza centrados en el aprendiz o en el profesor, respectivamente (Stephan, 2014). Las distintas variedades de constructivismo comparten, entre otros, los supuestos de que el aprendizaje es un proceso activo, que el conocimiento es construido en lugar de innato o pasivamente absorbido y que para lograr un aprendizaje efectivo es necesario el planteamiento a los estudiantes de problemas significativos, abiertos y desafiantes (Fox, 2001). Para el objetivismo, en particular en su versión conductista, el conocimiento es públicamente observable y el aprendizaje consiste en la adquisición de ese conocimiento mediante la interacción entre estímulos y respuestas. Con frecuencia, la forma de condicionamiento usado para lograr conductas verbales deseables es mediante la instrucción directa o una pedagogía basada en lecciones magistrales (Boghossian, 2006).

A continuación resumimos, en primer lugar las principales características de los modelos que proponen una instrucción basada en la indagación y la resolución de problemas y, en segundo lugar, las correspondientes a los que atribuyen un papel clave a la transmisión del conocimiento. Seguidamente presentamos las razones a favor de un modelo mixto que combine de forma dialéctica la indagación y la transmisión, basándonos en los presupuestos epistemológicos y didácticos del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo mixto es ejemplificado haciendo referencia a una investigación relacionada con un proceso de formación de futuros maestros sobre estadística. Finalmente incluimos algunas reflexiones e implicaciones complementarias.

## **2. APRENDIZAJE BASADO EN LA INDAGACIÓN Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

Como hemos indicado con las siglas IBE, IBL, PBL, se designan modelos teóricos de instrucción, desarrollados desde diversas disciplinas curriculares, que tienen su

correspondiente versión para la enseñanza de las ciencias experimentales (IBSE) y las matemáticas (IBME). En ellos se atribuye un papel clave a la resolución de problemas “auténticos”, bajo un planteamiento constructivista. En algunas aplicaciones al campo de la educación matemática se propone que los estudiantes construyan conocimiento siguiendo las pautas de trabajo de los propios profesionales matemáticos y científicos. El matemático se enfrenta a problemas no rutinarios, explora, busca información, hace conjeturas, justifica y comunica sus resultados a la comunidad científica; el estudio de las matemáticas debería seguir unas pautas similares: “aprender ciencia y tecnología es aprender a participar en las comunidades de prácticas de científicos y tecnólogos respectivamente” (Murphy y McCormick, 1997, p.465).

En estas teorías se considera esencial el uso de situaciones – problemas (aplicaciones a la vida cotidiana, a otros campos del saber, o problemas internos a la propia disciplina) para que los estudiantes puedan dar sentido a las estructuras conceptuales que configuran la matemática o la ciencia como una realidad cultural. Estos problemas constituyen el punto de partida de la práctica matemática y científica, por lo que la actividad de resolución de problema, su formulación, comunicación y justificación son claves en el desarrollo de la capacidad de afrontar la solución de problemas no rutinarios. Este es el objetivo principal de la tradición denominada “problem solving” (Schoenfeld, 1992), cuyo énfasis se centra en la identificación de heurísticas y estrategias metacognitivas; también de otros modelos teóricos como la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2002), y la Realistic Mathematics Education (RME) (Freudenthal, 1973; 1991).

### **Resolución de problemas**

La importancia que se da a la resolución de problemas en los currículos y en la investigación educativa es el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas y las ciencias experimentales que considera que esta actividad es precisamente su esencia. El trabajo seminal de Polya sobre cómo resolver problemas proporcionó el impulso inicial para una gran cantidad de investigaciones que tuvieron lugar en las siguientes décadas, incluyendo cuestiones como la resolución de problemas simulada con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias y heurísticas de resolución de problemas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas. Artigue y Blomhoj (2013) relacionan la tradición del “problem solving” con la IBL:

Los estudiantes tienen que desarrollar sus propias estrategias y técnicas cuando se enfrentan a problemas no rutinarios; tienen que explorar, conjeturar, experimentar y evaluar; se les da responsabilidades matemáticas sustanciales y generalmente son estimulados para que generen cuestiones por ellos mismos y para prever posibles generalizaciones de los resultados que obtienen (p. 802).

English y Sriraman (2010) informan de diversas reflexiones y evaluaciones sobre la eficacia de las investigaciones en resolución de problemas concluyendo sobre su escasa relevancia para la práctica escolar. Estos autores consideran que “Desafortunadamente, faltan estudios que aborden el desarrollo conceptual basado en resolución de problemas en interacción con el desarrollo de competencias de resolución de problemas” (English y Sriraman, 2010, p. 267).

### **Teoría de situaciones didácticas (TSD)**

En la TSD (Brousseau, 2002) los problemas se deben seleccionar de modo que permitan optimizar la dimensión adaptativa del aprendizaje y la autonomía de los estudiantes. El conocimiento matemático pretendido debería aparecer como la solución óptima al problema planteado; se espera que, mediante la interacción con un medio apropiado, los estudiantes lo construyan progresivamente de manera colectiva, rechazando o adaptando sus estrategias iniciales si fuera necesario.

El trabajo intelectual del alumno debe ser, en ciertos momentos, comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas, no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos; sabemos que hacer matemáticas implica ocuparse de problemas. (...) Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le son útiles, etc. (Brousseau, 2002, p. 22).

Para hacer posible una actividad de este tipo, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones, en las que ellos puedan interesarse. La noción de *devolución* se relaciona con la necesidad de lograr que los estudiantes consideren los problemas que se les proponen como objetivo de aprendizaje como si fueran propios y acepten la responsabilidad de resolverlos. La TSD asume un fuerte compromiso con la epistemología matemática, como se pone de manifiesto en el significado atribuido a la noción de *situación fundamental*: “una situación que muestra con claridad la razón de ser del conocimiento matemático pretendido” (Artigue & Blomhoj, 2013, p. 803).

Otra característica importante de la TSD es la distinción que hace entre diferentes dialécticas: de acción, formulación y validación, que reflejan importantes especificidades del conocimiento matemático; se trata de herramientas que nos ayudan a actuar sobre nuestro entorno, pero cuyo poder depende altamente de los lenguajes específicos que crea, y cuya validación obedece a formas específicas que llevan a enunciados necesariamente verdaderos o falsos.

### **Educación Matemática Realista (RME)**

En la RME se asumen principios que claramente se corresponden con presupuestos de IBME. Así, según el *principio de actividad*, en lugar de ser receptores de matemáticas ya elaboradas, los estudiantes deben ser como participantes activos en el proceso educativo, en el cual ellos mismos desarrollan todo tipo de herramientas matemáticas y comprensiones. Según Freudenthal (1973), un currículo científicamente estructurado en el que los estudiantes son confrontados con unas matemáticas elaboradas, es una ‘inversión anti-didáctica’. Se basa en una falsa hipótesis de que los resultados del pensamiento matemático, colocados en el marco de una asignatura, se pueden transferir directamente a los estudiantes. (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

El principio de realidad se orienta en la misma dirección. Como en la mayoría de las aproximaciones a educación matemática, la RME pretende capacitar a los estudiantes para que usen su comprensión y herramientas matemáticas para resolver problemas. En lugar de comenzar con abstracciones específicas o definiciones que deben ser aplicadas después, se debe comenzar con contextos ricos que demanden una organización matemática; en otras palabras, contextos que puedan ser matematizados. De esta manera, mientras trabajan con problemas contextualizados, los estudiantes pueden desarrollar herramientas y comprensión matemáticas. Uno de los principios claves para la educación matemática de Freudenthal (1991) es que se debe dar a los estudiantes una oportunidad “guiada” para “re-inventar” las matemáticas. Esto implica que, en la RME, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel crucial en cómo los estudiantes adquieren el conocimiento. “RME es por tanto una aproximación a la enseñanza y el aprendizaje del tipo “problem-solving” que ofrece constructos importantes y experiencia para conceptualizar IBME” (Artigue & Blomhoj, 2013, p. 804).

### **3. APRENDIZAJE BASADO EN LA TRANSMISIÓN**

Consideramos como modelos basados en la transmisión del conocimiento las diversas formas de intervención educativa en las cuales prima la instrucción directa y explícita. El uso de ejemplos resueltos constituye un rasgo característico de la instrucción fuertemente guiada, mientras que el descubrimiento de la solución a un problema en un entorno rico en información constituye similarmente el compendio del aprendizaje por descubrimiento mínimamente guiado.

Durante varias décadas se viene considerando a estos modelos como inferiores e indeseables respecto al aprendizaje de tipo constructivista (aprendizaje con distintos grados de guía, apoyo o *scaffolding*), como se muestra en las iniciativas tomadas en diferentes proyectos internacionales para promover las diversas modalidades de IBSE e IBME (Dorier & García, 2013; proyecto PRIMAS). La transmisión del conocimiento mediante la presentación de ejemplos de problemas resueltos y de las estructuras conceptuales de la disciplina es descartada por teorías didácticas con fuerte predicamento en educación matemática, como hemos indicado en el apartado anterior.

La adopción acrítica de modelos pedagógicos constructivistas puede estar motivada por la observación de la gran cantidad de conocimientos y competencias que el sujeto aprende por descubrimiento o inmersión en un contexto, en particular los conceptos de la vida cotidiana. Sin embargo, Sweller, Kirschner y Clark (2007, p. 121) afirman que,

No hay ninguna razón para suponer o evidencia empírica que apoye la noción de que los procedimientos de la enseñanza constructivista basados en la manera en que los humanos adquieren información biológicamente primaria serán efectivos para adquirir la información biológicamente secundaria requerida por los ciudadanos de una sociedad intelectualmente avanzada. Esa información requiere instrucción directa y explícita.

Esta posición concuerda con la tesis sostenida por Vygotsky, que los conceptos científicos no se desarrollan de la misma manera que los conceptos cotidianos (Vygotsky, 1934). Los autores citados consideran que proporcionar a los estudiantes un ejemplo completamente resuelto de un problema o tarea, y la información relativa al proceso usado para alcanzar la solución, es necesario para el diseño de tareas de aprendizaje idóneas. “Debemos aprender soluciones específicas del dominio para problemas específicos y la mejor manera de adquirir estrategias de resolución de problemas específicas de un dominio es dar el problema con su solución, no dejando ningún papel a la IL”. (Sweller, Kirschner y Clark, 2007, p. 118). Estos autores afirman que la investigación empírica del último medio siglo sobre este problema proporciona una abrumadora y clara evidencia de que una mínima guía durante la instrucción es significativamente menos efectiva y eficiente que una guía específicamente diseñada para apoyar el procesamiento cognitivo necesario para el aprendizaje. Resultados similares se reflejan en el meta-análisis de Alfieri, Brooks, Aldrich y Tenenbaum (2011).

Según Kirschner, Sweller y Clark (2006), tenemos destreza en un área porque nuestra memoria a largo plazo contiene cantidades enormes de información relativa al área. Esa información nos permite reconocer rápidamente las características de una situación y nos indica, a menudo inconscientemente, qué hacer y cuando hacerlo (p. 76).

En la Tabla 1 se resumen los principales rasgos de las perspectivas objetivistas y constructivistas que consideramos en este trabajo como extremas cuando se aplican en el diseño instruccional como alternativas ideales. Están agrupadas en tres dimensiones: epistémica (naturaleza del conocimiento objeto de instrucción), cognitiva (aprendizaje de los conocimientos, destrezas y disposiciones), e instruccional (medios y modos de interacción). Estos rasgos han sido elaborados a partir de los trabajos de diversos autores (Jonassen, 1991; Ernest, 1994; Murphy, 1997; Boghossian, 2006; Andrew, 2007).

Tabla 1. Rasgos del objetivismo y constructivismo como fundamentos de la instrucción

Dimensiones	Objetivismo	Constructivismo
<i>Epistémica</i> (Naturaleza del conocimiento objeto de instrucción)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El conocimiento tiene una existencia externa al sujeto.</li> <li>-La estructura del conocimiento viene determinada por entidades, propiedades y relaciones</li> <li>- El significado corresponde a entidades y categorías del mundo, independiente de la comprensión de cualquier organismo</li> <li>- Los símbolos representan la realidad</li> </ul>	<p>El conocimiento depende de la actividad mental del sujeto.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La estructura depende de las experiencias e interpretaciones personales.</li> <li>- El significado no está basado en una correspondencia con el mundo; depende de la comprensión personal</li> <li>- Los símbolos son herramientas para construir la realidad</li> </ul>
<i>Cognitiva</i> (Aprendizaje de los conocimientos, destrezas y disposiciones)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La mente es un procesador de símbolos y refleja la realidad</li> <li>- Los conocimientos previos de los estudiantes y las respuestas que proporcionan durante el proceso son aceptadas si concuerdan con el conocimiento objetivo sustentado por el profesor</li> </ul> <p>La reflexión por parte de los estudiantes se considera irrelevante e innecesaria</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La mente es un constructor de símbolos y un sistema conceptual que construye una realidad</li> <li>- El pensamiento se basa en la percepción y crece a partir de la experiencia física, corporal y social</li> <li>- Se intenta comprender cada uno de los marcos conceptuales de los estudiantes y se modifica la instrucción en consecuencia.</li> <li>-Se anima a los estudiantes a explorar la situación planteada para que ellos mismos encuentren la solución.</li> </ul>
<i>Instruccional</i> (Medios y modos de interacción)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se enfatiza la reproducción del conocimiento.</li> <li>- Los errores se usan como ocasión para reforzar la conducta</li> <li>- El profesor es finalmente la fuente del conocimiento objeto de enseñanza</li> <li>- No se estimula el aprendizaje cooperativo y en colaboración</li> <li>- No se considera necesaria la exploración por parte del estudiante y por tanto no se estimula ni promueve.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se estructuran las tareas de aprendizaje dentro de entornos realistas y relevantes.</li> <li>- La actividad instruccional está orientada a la resolución de problemas.</li> <li>- Se estimulan las interacciones entre los propios estudiantes dentro y fuera de la clase</li> <li>-El profesor actúa como coach.</li> <li>- Los estudiantes asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje</li> </ul>

#### 4. UN MODELO DIDÁCTICO BASADO EN LA INDAGACIÓN Y TRANSMISIÓN

En los apartados anteriores hemos descrito algunas características básicas de dos modelos extremos de organización de los procesos de instrucción: aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje basado en la recepción de conocimientos. En este apartado vamos a describir las características de un modelo instruccional que trata de conjugar estos dos modelos: la indagación de situaciones problemas por parte de los estudiantes con la



enseñanza explícita de conocimientos en momentos críticos del proceso de estudio por parte del “sistema docente”<sup>2</sup>. Se trata de reconocer y abordar la compleja dialéctica entre indagación y transmisión de conocimientos en el aprendizaje matemático y en las ciencias experimentales. En esta dialéctica, el diálogo<sup>3</sup> y la cooperación entre el profesor y los estudiantes (y entre los propios estudiantes), a propósito de la situación – problema que se trata de resolver y el contenido que se debe poner en juego, pueden desempeñar un papel clave. En estas fases de diálogo y cooperación necesariamente tienen lugar momentos de transmisión de conocimientos.

#### **4.1. Complejidad ontosemiótica del conocimiento**

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas, el cual ha sido ampliado y sistematizado en trabajos posteriores (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012; Font, Godino y Gallardo, 2013) dando lugar al Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

En la Figura 1 se sintetizan como elementos claves de la modelización epistemológica y cognitiva del conocimiento matemático que propone el EOS las nociones de práctica, objeto, proceso (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y función semiótica (noción mediante la cual se relacionan las diversas entidades de manera referencial y operatoria). Las prácticas operativas, discursivas y normativas son realizadas ante las situaciones de resolución de determinados problemas, los cuales pueden tener carácter matemático o extra-matemático (problemas propios de las ciencias experimentales), por lo que se considera que la modelización ontosemiótica del conocimiento puede ser aplicada no sólo a las matemáticas sino también a otras disciplinas.

En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein 1953). De esta manera se conjugan y articulan presupuestos de los enfoques objetivistas sobre el conocimiento (prácticas, objetos y significados institucionales) y de los enfoques constructivistas (sistemas de prácticas, objetos y significados personales).

El EOS sirve de base para un modelo instruccional que reconoce un papel clave tanto a la indagación como a la transmisión de conocimientos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias experimentales. Se trata de tener en cuenta la

---

<sup>2</sup> Este sistema puede ser un docente individual, un sistema virtual experto, o la intervención del estudiante “leader” dentro de un equipo de trabajo en un formato de aprendizaje colaborativo.

<sup>3</sup> “‘Diálogo’ es un constructo que mira a ambos lados – hacia procesos individuales de pensamiento y reflexión, como también hacia la constitución de prácticas culturales y comunidades en momentos históricos particulares” (Renshaw, 2004, p. 2).

naturaleza de los objetos matemáticos y científicos implicados en las prácticas cuya realización competente por los estudiantes se pretende.

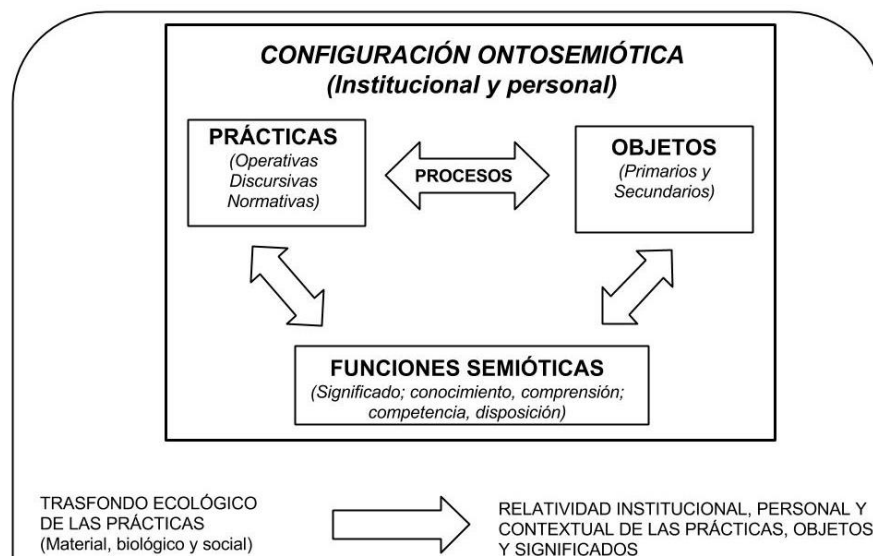


Figura 1. Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS

El cómo se aprende algo depende de qué se tiene que aprender. Según el EOS el estudiante se debe apropiarse (aprender) de las configuraciones ontosemióticas institucionales implicadas en la resolución de las situaciones - problemas que se propone resolver. Se asume el paradigma del “cuestionamiento del mundo” que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2013), y en general la familia de modelos IBE, de modo que el punto de partida debe ser la selección e indagación de “buenas situaciones – problemas”.

La noción clave del EOS para modelizar los conocimientos es la de configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos matemáticos), en la doble versión institucional (epistémica) y personal (cognitiva). En un proceso de instrucción, la realización por el alumno de las prácticas matemáticas ligadas a la solución de ciertas tareas problemáticas, operativas y discursivas, pone en juego un conglomerado de objetos y procesos cuya naturaleza, desde el punto de vista institucional es esencialmente normativa (regulativa)<sup>4</sup> (Font, Godino, y Gallardo, 2013). Cuando el alumno realiza prácticas no pertinentes, el ‘sistema docente’ debe guiarlo hacia las esperadas desde el punto de vista

<sup>4</sup> Esta visión del conocimiento matemático es concordante con la defendida por la teoría de la objetivación desarrollada por Radford. “Conocimiento, he argumentado, es trabajo cristalizado – formas culturalmente codificadas de hacer, pensar y reflexionar. Conocer es, me gustaría sugerir, la particularización o actualización del conocimiento (Radford, 2013, p.16). Objetivación es precisamente el proceso de reconocimiento de aquello que nos objetiva – sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc. (p. 23). En nuestro caso, tales formas cristalizadas de trabajo son concebidas como “reglas” culturales que fijan las maneras de hacer, pensar y de decir ante las situaciones – problemas que reclaman una respuesta adaptativa.

institucional. Por ello, cada tipo de objeto (conceptos, lenguajes, etc.) o proceso (definición, expresión, generalización, etc.) requiere un foco de atención, un momento, en el proceso de estudio. En particular los momentos regulativos (institucionalización) son densos por doquier en la actividad matemática y en el proceso de estudio, como también los momentos de formulación/ comunicación y justificación.

La realización de las prácticas matemáticas supone la intervención de objetos previos para comprender las demandas de la situación - problema y poder implementar una estrategia de partida. Tales objetos, sus reglas y condiciones de aplicación, deben estar disponibles en la memoria de trabajo del sujeto. Aunque sea posible buscar tales conocimientos por sí mismo en el “espacio de trabajo”, no siempre hay suficiente tiempo o el alumno no lo logra; por ello el profesor y los compañeros pueden prestar un apoyo inestimable para evitar la frustración y el abandono. Se trata de los momentos del recuerdo y activación de los conocimientos previos, los cuales son generalmente necesarios a lo largo del proceso de estudio. Dichos momentos pueden tener lugar no solo en la fase exploratoria / investigativa, sino también en la fase de formulación, comunicación, procesamiento o cálculo y justificación de los resultados. Estos momentos se corresponden con actos de transmisión de conocimientos y pueden ser cruciales para la optimización del aprendizaje.

El resultado de las prácticas son nuevos objetos emergentes cuyo enunciado o definición tiene que ser compartidos y sancionados en el seno de la comunidad en el correspondiente momento de institucionalización a cargo del docente, los cuales son también actos de transmisión de conocimientos.

#### **4.2. Tipos de trayectorias didácticas**

En el marco del EOS, el diseño de procesos de estudio de los contenidos parte de la selección de situaciones - problemas cuya resolución permita dar significado o razón de ser a dichos contenidos y promover el aprendizaje de los mismos. El sistema de acciones que realiza el docente y los estudiantes para abordar la solución de los problemas, con los recursos disponibles y en el contexto fijado, constituye una *configuración didáctica*. La secuencia de configuraciones didácticas diseñadas para el estudio de un contenido, que usualmente no será un único problema, sino una muestra representativa del universo de posibles problemas en los cuales el objeto/contenido interviene, constituye la *trayectoria didáctica*.

A priori, no se propone un formato de interacción privilegiado, transmisivo o indagativo, para la gestión de las trayectorias didácticas, sino que se adopta como criterio orientativo de dicha gestión la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013). El logro de una alta idoneidad didáctica supone un balance equilibrado de seis idoneidades parciales en las facetas, epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Dependiendo del contenido, los estudiantes, los recursos disponibles y demás factores

condicionantes de los procesos instruccionales el logro de una alta idoneidad didáctica puede implicar la implementación de un modelo instruccional mixto donde se articulen momentos indagativos, transmisivos, y dialógicos/ cooperativos. Estos últimos momentos implican la aplicación de acciones indagativas y reflexivas, por parte de los estudiantes y acciones de transmisión de conocimientos por el docente, y tienen, por tanto, un carácter mixto.

Interesa distinguir cuatro tipos básicos de situaciones-problemas en función del rol diferente que pueden desempeñar en el proceso instruccional, y del patrón de interacción principal que se requiere implementar para optimizar el aprendizaje en cada caso:

- Situaciones introductorias del contenido, mediante las cuales los estudiantes tienen el “primer encuentro” con el mismo. Para conseguir que los estudiantes se involucren en el estudio el profesor deberá recordar o introducir la información básica necesaria para comprender el contexto y el enunciado de la tarea, predominando, por tanto, los formatos transmisivo y dialógico.
- Situaciones de ejercitación, focalizadas en el dominio de destrezas procedimentales y la retención de los conceptos, propiedades y justificaciones implicados en la resolución de las situaciones introductorias. Predomina el formato de interacción personal con eventuales refuerzos del docente.
- Situaciones de aplicación, mediante las cuales los estudiantes aplican de manera más autónoma los conocimientos aprendidos y exploran posibles extensiones. Predomina el formato indagativo y cooperativo, cuando el problema se aborda trabajando en equipos, sin descartar la participación del sistema docente para orientar y recordar la información necesaria.
- Situaciones de evaluación, mediante las cuales se obtiene información sistemática sobre el grado de logro de los aprendizajes de cada estudiante. El patrón de interacción es esencialmente individual; el estudiante responde de manera personal a una muestra de tareas representativas del contenido pretendido.

Estos tipos de situaciones dan lugar a los correspondientes tipos de configuraciones didácticas, las cuales estarán secuenciadas a lo largo de la trayectoria didáctica. Como se ha indicado en unas configuraciones predomina el diálogo y la transmisión del conocimiento, y en otras la indagación. El cambio de un formato a otro no está regulado a priori, sino que las circunstancias instruccionales (básicamente los conocimientos previos de los estudiantes, sus capacidades, los recursos temporales y materiales disponibles) pueden determinar dicho cambio, siendo el criterio básico la optimización de la idoneidad didáctica del proceso.

#### **4.3. Dinámica de las configuraciones didácticas**

Como se ha indicado, en el marco del EOS se han desarrollado otras herramientas teóricas que permiten describir y comprender la dinámica de los procesos de instrucción matemática. En particular, la noción de configuración didáctica focaliza la atención en los “segmentos de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendidos entre el inicio y finalización de una tarea o situación – problema.

La Figura 1 resume los componentes y dinámica interna de las configuraciones didácticas, las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y los principales procesos matemáticos ligados a la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011; Font, Godino y Gallardo, 2013). Dicha modelización, permite mostrar la complejidad de las relaciones que se establecen en el seno de cualquier configuración didáctica, no reducible a momentos indagatorios o de transmisión de conocimientos.

En la Figura 1, la flecha inferior, del aprendizaje a la enseñanza, quiere señalar que las relaciones no son lineales, sino cíclicas. En un momento de indagación, por ejemplo, el estudiante interacciona con la configuración epistémica sin intervención del docente (o con una influencia menor). Esta interacción condiciona las intervenciones docentes y, por lo tanto, deben estar previstas ya en la configuración instruccional, quizás no totalmente en su contenido, pero sí en su naturaleza, necesidad y utilidad. Esto, evidentemente, no es privativo de los momentos indagatorios. La trayectoria cognitiva produce ejemplos, significados, argumentos, etc., que condicionan el proceso de estudio y, en consecuencia, las configuraciones epistémica e instruccional, posibilitando o comprometiendo —en todo caso, condicionando—, el término del proyecto educativo previsto.

La situación – problema sobre la cual se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración. En toda configuración didáctica habrá una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales), una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales) y una configuración cognitiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales) mediante la cual se describe el aprendizaje.

Desde nuestro punto de vista, la teoría de los momentos didácticos propuesta en la TAD (Chevallard, 1999) da cuenta parcialmente de la dinámica interna de las configuraciones didácticas, descritas en su caso como praxeologías didácticas. La visión ontosemiótica del conocimiento matemático aporta criterios adicionales para complementar dicha teoría. Cada tipo de objeto/ proceso matemático desempeña un rol o función en el trabajo matemático, y por tanto requiere un foco de atención y su correspondiente momento en los procesos de estudio.

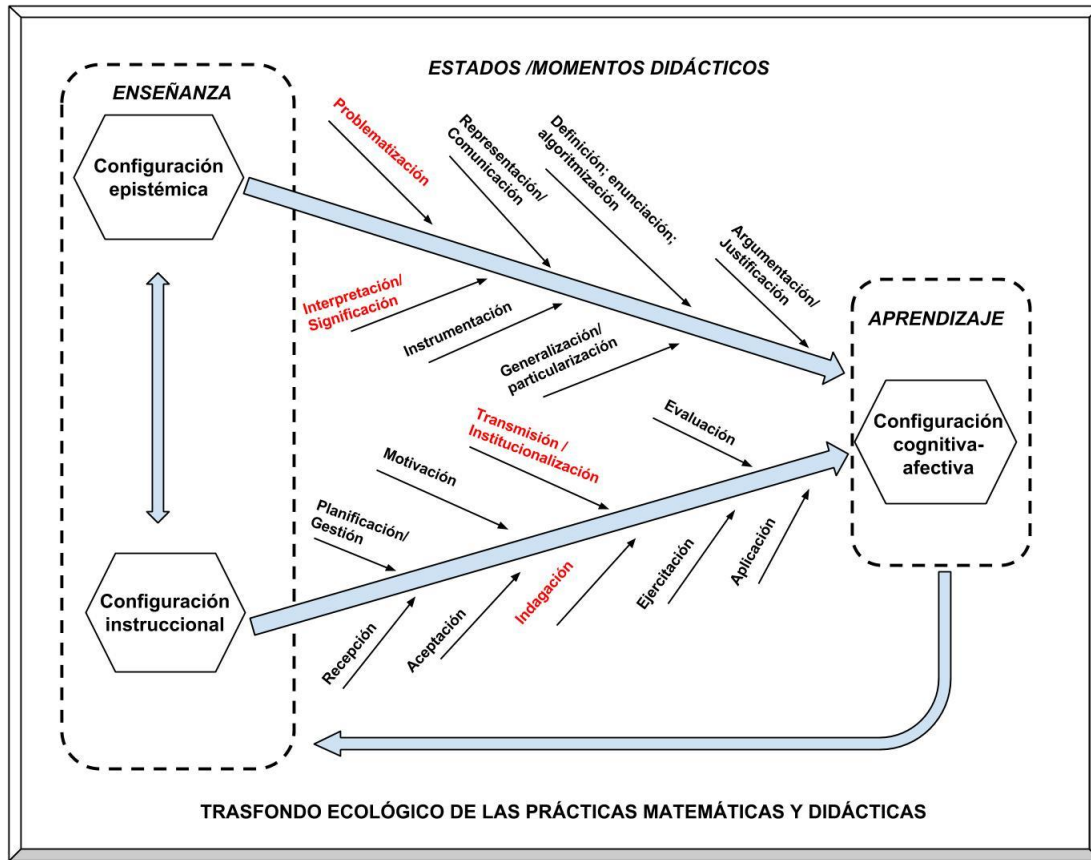


Figura 1. Componentes y dinámica interna de una configuración didáctica (Godino et al. 2015, p.2646).

Tales momentos se pueden ver como estados de las trayectorias de procesos estocásticos que hemos utilizado para modelizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en trabajos previos (Godino, Contreras y Font, 2006). Habrá estados o momentos de las definiciones conceptuales, enunciados proposicionales, rutinas procedimentales, argumentación justificativa; momentos de la representación, su tratamiento y conversión (Duval, 1995); momentos de la generalización, del establecimiento de relaciones y conexiones entre los distintos objetos. También hay momentos meta-matemáticos (D'Amore, Font, y Godino, 2007) de planificación, gestión y evaluación, tanto del estudiante de matemáticas (cómo resolver este problema o tarea), como del profesor ante el problema didáctico - matemático (qué y cómo enseñar). (Figura 1)

El problema no es tanto si se debe o no guiar la instrucción, ya que nadie discute que un cierto grado de guía puede ser necesario; la cuestión central es cuándo guiar y sobre qué., qué aspectos de la construcción del conocimiento se puede dejar bajo la responsabilidad de los estudiantes y para cuales es preferible la enseñanza directa. Sin duda, estas son

decisiones que debe tomar el profesor, dependiendo de los estados cognitivos - afectivos de sus estudiantes, a lo largo de la trayectoria didáctica correspondiente. De aquí se deduce que las recomendaciones generales sobre modelos investigativos o transmisivos son simplificaciones de una realidad extraordinariamente compleja.

La optimización del aprendizaje, esto es, el logro de procesos instruccionales de alta idoneidad didáctica en las distintas facetas, sobre todo la idoneidad interaccional - mediacional y cognitiva - afectiva tiene un carácter fuertemente localcx(Godino, 2013). “Experimentos controlados indican casi de manera uniforme que cuando se trata con información nueva, se debería mostrar a los aprendices qué hacer y cómo hacerlo” (Kirschner, Sweller & Clark, 2006, p. 79). La optimización de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático requiere un modelo de instrucción mixto indagativo - transmisivo de enseñanza - aprendizaje en el que tanto el estudiante como el profesor desempeñen roles protagonistas. “Para que lo general aparezca en lo singular tanto el estudiante como el profesor deberían trabajar juntos. El profesor y el estudiante tienen que comprometerse en un proceso de objetivación” (Radford, 2013, p. 35).

#### **4.4. Análisis de un caso: Un diseño instruccional para el estudio de la estadística con futuros maestros**

Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014) describen la aplicación del EOS en las distintas fases de una experiencia de formación en estadística y probabilidad elemental de futuros maestros de primaria. El diseño de la experiencia formativa está basado en el planteamiento y resolución de tres proyectos, dos de ellos sobre estadística descriptiva elemental y el tercero sobre probabilidad elemental. El estudio se realiza a lo largo de tres semanas, a razón de 4,5 horas semanales. En la primera semana se presenta y desarrolla en clase (una sesión de 2 horas en gran grupo; 60 estudiantes) el primer proyecto (determinación de las características estadísticas del “alumno típico”). El profesor lo presenta como un ejemplo completamente desarrollado pero con una dinámica mixta en la que trata de involucrar a los estudiantes en el recuerdo y aplicación de las nociones y técnicas estadísticas que han estudiado en secundaria. El análisis de la observación de la sesión pone de manifiesto que los momentos de indagación de los propios estudiantes para dar respuestas a las cuestiones planteadas son entrelazados por momentos claramente transmisivos del docente, bien para toda la clase, para grupos de estudiantes o estudiantes individuales.

En el mencionado proyecto, usando una colección de datos proporcionados, se pide a los estudiantes que, organizados en parejas, respondan a las cuestiones:

— ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?

— ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?

Inicialmente, y por un espacio de aproximadamente 15 minutos, los estudiantes trabajan intentando dar respuesta a las cuestiones planteadas. Durante el desarrollo de la actividad el profesor va guiando el trabajo de los grupos; evaluando sus avances, entregando orientaciones y atendiendo dudas específicas.

Pero en la interacción del profesor con los alumnos se manifiestan algunos conflictos cuando los estudiantes tienen que dar respuesta a la primera pregunta (conflicto con el significado de “alumno típico”):

E6: [...] Para elegir un alumno típico ¿Qué elegiríamos?

P: Tienes que comprobar cuántas mujeres y hombres hay, y, luego... si hay más mujeres, sería más representativo tomar una mujer.

E6: Y luego, ¿se hace esto en todas?

P: Para las otras variables, por ejemplo el deporte, hay que ver cuántas personas hacen nada, poco y mucho deporte. Luego ver cuál de estos valores es más representativo...

La actuación docente está motivada por la observación de que algunos estudiantes no atribuyen significado a la expresión “alumno típico”; se reconoce un conflicto semiótico porque se está implementando un formato dialógico de interacción (lo cual es un indicador positivo de idoneidad interaccional). Pero el docente da la solución a la cuestión lo que es negativo desde el punto de vista de la idoneidad cognitiva (se evita que el estudiante indague por sí mismo el significado de alumno típico). En cuanto a la dimensión epistémica – ecológica destaca positivamente el planteamiento de un conflicto entre significados de una expresión en lenguaje cotidiano frente al significado estadístico.

En el artículo citado se muestran otros hechos didácticos y sus interpretaciones que ilustran algunos rasgos del modelo instruccional implementado y, en particular, cómo dentro de una organización de la enseñanza basada en el análisis de proyectos de análisis de datos, es necesario contemplar la inclusión de momentos claramente transmisivos. Tales estados o momentos del proceso de estudio vienen determinados por la constatación de situaciones de bloqueo de los estudiantes que impiden la progresión del aprendizaje.

## **5. SÍNTESIS E IMPLICACIONES**

En este trabajo hemos argumentado que tanto los modelos instruccionales basados en la indagación como en la transmisión son simplificaciones de una realidad extraordinariamente compleja, como son los procesos de enseñanza y aprendizaje. “Las clases están llenas de una dinámica compleja, y muchos factores pueden ser responsables de incrementar el aprendizaje del estudiante. (...) Esta es una cuestión muy central y difícil de responder” (Hiebert & Grouws, 2007, p. 371).



Aunque es necesario establecer diseños instruccionales basados en el uso de situaciones – problemas ricos, que guíen el aprendizaje y la toma de decisiones a nivel global e intermedio, el funcionamiento local de los sistemas didácticos requiere una atención especial a la gestión de los conocimientos previos de los estudiantes necesarios para la solución de las situaciones, y a la sistematización de los conocimientos emergentes. Las decisiones sobre el tipo de ayuda que es necesario dar a los estudiantes tienen un componente esencialmente local y son responsabilidad del profesor, quién necesitará de guías que le orienten en la toma de decisiones para optimizar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio que debe gestionar.

Hudson, Miller & Butler (2006) justifican la implementación de modelos instruccionales mixtos que adapten y mezclen la instrucción explícita (centrada en el profesor) con la instrucción basada en la resolución de problemas (centrada en el aprendiz) por la necesidad de realizar adaptaciones curriculares ante la diversidad de capacidades de los estudiantes. A conclusiones similares llega Steele (2005), para quien, “La mejor enseñanza integrará ideas de los principios constructivistas y conductistas” (p. 3).

En este trabajo hemos complementado los argumentos cognitivos de Kirschner, Sweller y Clark (2006) a favor de modelos basados en la transmisión de conocimientos para el caso del aprendizaje matemático y científico, con razones de índole ontosemiótica: Lo que tienen que aprender los estudiantes son, en una gran dosis, reglas, las circunstancias de su aplicación y las condiciones requeridas para una aplicación pertinente. El aprendiz parte de reglas conocidas (conceptos, proposiciones, procedimientos) y produce otras, que deben ser compartidas y compatibles con las ya establecidas en la cultura matemática. Tales reglas (conocimientos) tienen que ser almacenadas en la memoria a largo plazo del sujeto y puestas a funcionar en el momento oportuno en la memoria a corto plazo.

La escasa difusión de los modelos IBE en las clases reales y la persistencia de modelos basados en la transmisión y recepción del conocimiento pueden explicarse, no tanto por la inercia y falta de preparación de los profesores, sino por su percepción o vivencia de que los modelos transmisivos pueden ser más idóneos ante las circunstancias específicas de sus clases. Ante la disyuntiva de que una mayoría de los alumnos no aprenda nada, se frustren y alboroten en la clase, puede ser razonable rebajar las expectativas y preferir que la mayoría de los alumnos aprendan algo, aunque sean posiblemente rutinas y algoritmos, y algunos ejemplos a imitar. Esta puede ser una razón para apoyar un modelo instruccional mixto que articule de manera coherente, local y dialéctica la indagación y la transmisión.

El profesor puede estar convencido que la enseñanza directa, la comunicación verbal, apoyada por la visualización colectiva en la pizarra de las notaciones matemáticas, es efectiva, siempre que vaya acompañada por una recepción activa por parte de los alumnos. ¿Podemos asegurar que está equivocado cuando una gran cantidad de conocimientos que aprendemos en nuestras vidas lo hacemos de esa manera? Ausubel (2002) insiste y razona

que el aprendizaje puede ser significativo aun cuando sea basado en la exposición verbal y la recepción.

Los alumnos deberían tener oportunidad de poner en práctica la actividad matemática, pero también de conocer y dominar los productos culturales matemáticos que otras personas han elaborado como resultado de su propia actividad. Además, el recuerdo e interpretación de reglas matemáticas ya asumidas forma parte de esa actividad matemática, y resulta imprescindible para que pueda tener lugar (Godino, Contreras y Font, 2006).

## Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

## REFERENCIAS

- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 1-18.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education* 45, 797–810.
- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognoscitiva*. Barcelona: Paidós
- Boghossian, P. (2006). Behaviorism, constructivism, and Socratic pedagogy. *Educational Philosophy and Theory*, 38(6), 713-722.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2013). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. *Lecture at the Twelfth International Congress of Mathematics Education*, Seoul. July 2012. Disponible en, [http://www.icme12.org/upload/submission/1985\\_F.pdf](http://www.icme12.org/upload/submission/1985_F.pdf)
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII(2), 49-77.
- Dorier, J. L., & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 45, 837–849.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Switzerland: Peter Lang.
- English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21<sup>st</sup> century. En B. Sriraman y L. English (Eds), *Theories of mathematics education* (pp. 263-289). Heidelberg: Springer-Verlag.

- Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.
- Fox, R. (2001). Constructivism examined. *Oxford Review of Education*, 27(1), 23-35.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.
- Hiebert, J. S., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En J. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Hudson, P., Miller, S. P., & Butler, F. (2006). Adapting and merging explicit instruction within reform based mathematics classrooms. *American Secondary Education*, 35(1), 19-32.
- Jonassen, D. H. (1991). Objectivism vs. constructivism: do we need a new philosophical paradigm? *Educational Technology Research & Development*, 39(3), 5-14.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41 (2), 75-86.
- Murphy, P. y McCormick, R. (1997). Problem solving in science and technology education. *Research in Science Education*, 27(3), 461-481.

- Renshaw, P. D. (2004). Dialogic learning, teaching and instruction. Theoretical roots and analytical frameworks. En J. van der Linden & Peter Renshaw (Eds.). *Dialogic learning shifting perspectives to learning, instruction, and teaching* (pp. 1-15). Dordrecht: Kluwer.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, meta-cognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan
- Steele, M. M. (2005). Teaching students with learning disabilities: Constructivism of behaviorism? *Current Issues in Education* 8(10). Disponible en: <http://cie.ed.asu.edu/coume8/number10/> .
- Stephan, M. (2014). Learner-centered teaching in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Sweller, J., Kirschner, P. A., & Clark, R. E. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist*, 42(2), 115-121.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute. CR-ROM for ICME9. Utrecht: Utrecht University. <http://www.fisme.science.uu.nl/en/rme/TOURdef+ref.pdf>
- Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.