ISSN 0103-636X

Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria

Development of Knowledge for Teaching Proportionality in Prospective Elementary Teachers

Mauro A. Rivas*
Juan D. Godino**
Walter F. Castro***

Resumen

Este artículo informa sobre los resultados de un proceso instruccional en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas, cuyo objetivo es desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática en futuros maestros de primaria. Este proceso comprende: (a) la resolución de un problema de proporcionalidad, (b) el análisis de la resolución del problema haciendo uso de una herramienta de análisis epistémico, y (c) las valoraciones dadas por futuras maestras a tres tipos de respuestas del problema, elaboradas por alumnos de 6º curso de primaria. Los resultados indican que este proceso formativo promueve el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad. Para concluir se discuten algunas implicaciones de estos resultados para la formación de profesores.

* Máster Oficial en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Dirección postal: Avenida Alberto Carnevalli, Conjunto Residencial Campo Neblina, Segunda Etapa, Torre 4, Apto. 2-4-18. Mérida, Venezuela. *E-mail*: rmauro@ula.ve.

** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Catedrático de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (UGR), Granada, España. dirección postal: Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071. Granada, España. *E-mail*: jgodino@ugr.es.

*** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor de la Universidad de Antioquia, Medellin, Colombia. Dirección postal: Carrera 83 B numero 27 A 41, Barrio Belen - Los Alpes, Medellin, Colombia. *E-mail*: wcastro@ugr.es.

Palabras-clave: Formación de Profesores. Razonamiento Proporcional. Análisis Epistémico. Conocimiento del Profesor.

Abstract

This paper describes some outcomes of an educational process in a teacher mathematics education context. The main objective of the education process is to develop the mathematical knowledge necessary to teach at the elementary grade-level. This process involves: (a) the proportionality problem resolution, (b) analysis of the problem resolution using an epistemic analysis tool, and (c) prospective assessment of three types of sixth graders' responses to a proportionality problem. The results point out that the formative process fosters the development of mathematical knowledge for teaching. Finally, some implications for prospective teacher education are discussed.

Keywords: Teacher Education. Proportional Reasoning. Epistemic Analysis. Teacher Knowledge.

1 Introducción

Desde la propuesta inicial de Shulman (1986, 1987) sobre el conocimiento pedagógico del contenido, se ha observado un creciente interés por el estudio del conocimiento del profesor. En las últimas décadas, ese interés ha tenido una incidencia considerable en el campo de la Educación Matemática (ADLER, 2009; HILL; BALL, 2004). La producción académica y científica en torno al conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática ha mostrado un importante crecimiento (KOTSOPOULOS; LAVIGNE, 2008), observándose una profusa producción de artículos en revistas científicas.

Asimismo, el estudio de la proporcionalidad en el campo de la Educación Matemática se encuentra respaldado por una considerable producción científica y académica (BERK et al., 2009; KHOURY, 2002; LESH; POST; BEHR, 1988). Su importancia en el currículo escolar se encuentra refrendada por el papel que se le ha conferido para el desarrollo de buena parte de los contenidos curriculares de la matemática de todos los niveles educacionales (BERK et al., 2009; LAMON, 2005; LESH; POST; BEHR, 1988; NCTM, 2000). De acuerdo con los *Principios y Estándares* de la NCTM (2000, p. 217): "[…] la proporcionalidad es un elemento integrador importante que conecta muchos temas matemáticos estudiados en los grados 6-8". En este sentido, Lamon (2005, p. 3) considera el razonamiento proporcional como "[…] una medida de la comprensión de las ideas matemáticas elementales, y también es parte de la fundamentación de conceptos más complejos".

En relación con el estudio de la proporcionalidad en el ámbito de la formación de profesores, se observa un interés, cada vez más extendido, en el desarrollo de investigaciones dirigidas al estudio del conocimiento matemático y didáctico necesario para enseñar la proporcionalidad (GILBERT; GILBERT, 2009; LO, 2004; SOWDER et al., 1998; THOMPSON; THOMPSON, 1996). Situados en este contexto de investigación, nuestro estudio procura informar sobre los resultados obtenidos de la observación de las acciones de un grupo de futuras maestras, al resolver un problema de proporcionalidad, analizar su resolución y estudiar tres tipos de respuestas dadas a ese problema por alumnos de 6º curso de primaria.

Los tres tipos de respuestas consideradas coinciden con los niveles del razonamiento proporcional identificados por Karplus, Adi y Lawson (1980); Karplus, Karplus y Wollman (1972); Khoury (2002). El problema utilizado es ampliamente conocido en la literatura como: *Mr. Tall/Mr. Short*, el cual ha sido objeto de diversas investigaciones (HART, 1988; KARPLUS; PETERSON, 1970; KHOURY, 2002; LAMON, 2005).

El carácter instruccional que determina las acciones que tienen lugar en el desarrollo de esta investigación, la inscribe en el ámbito de la formación de profesores. En este sentido, estamos interesados en observar el desarrollo de tres de las formas del conocimiento del profesor, propuestas por Ball et al. (2005), a saber: El conocimiento común del contenido, el especializado y el conocimiento de los estudiantes y el contenido[1]. En función de este interés, en el ámbito de la formación inicial de profesores, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

- Analizar el *conocimiento común del contenido* sobre la proporcionalidad directa y simple, puesto en juego por futuras maestras, al resolver un problema relativo a ese contenido matemático.
- Fomentar el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* relativo a la enseñanza de la proporcionalidad de un grupo de futuras maestras, por medio de un análisis epistémico, haciendo uso de la *Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados* (GROS)[2]
- Fomentar el desarrollo del *conocimiento de los estudiantes y el contenido* relativo a la enseñanza de la proporcionalidad, de un grupo de futuras maestras, al analizar tres tipos de respuestas dadas a un

[1] Una breve descripción de estos tipos de conocimiento se presenta en el apartado siguiente.
[2] Un ejemplo del uso de esta herramienta puede verse en Godino et al. (2008).

problema de proporcionalidad por alumnos de 6º curso de primaria.

Esta contextualización, en un ambiente de formación, en la que se conjugan varias actividades para el estudio y desarrollo del conocimiento del profesor, especialmente del *conocimiento de los estudiantes y el contenido* (KCS)[3] es coherente con el planteamiento de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 375), quienes sostienen:

> […] el conocimiento de los estudiantes y el contenido es usado en tareas de enseñanza que involucran atender tanto al contenido específico como a algo particular sobre los aprendices, por ejemplo, cómo los estudiantes aprenden […] los errores y falsas ideas que comúnmente surgen durante este proceso.

2 Marco teórico

2.1 La proporcionalidad y la formación inicial de profesores

De acuerdo con Lesh, Post y Behr (1988, p. 97) el papel del razonamiento proporcional dentro del currículo escolar es esencial: "[…] como fundamento del álgebra y de otros niveles superiores en matemáticas […] como culminación de la aritmética, el número y los conceptos numéricos".

Desde esta perspectiva, se considera el razonamiento proporcional como una habilidad relevante para el trabajo apropiado con las matemáticas del nivel medio y avanzado del currículo escolar. No obstante, algunas investigaciones sostienen que buena parte de las personas no llegan a desarrollar esta forma de razonamiento de manera adecuada (LAMON, 2005; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). En su lugar, la escuela enseña reglas que permiten, de manera mecánica, resolver la mayoría de los tipos de tareas que comúnmente se presentan, tanto en el ámbito educativo, como en el desenvolvimiento social y profesional de las personas. Lamon (2007) señala que el uso de reglas (regla de tres, del producto cruzado etc.) permite evitar la puesta en juego de un razonamiento proporcional, dando lugar a respuestas correctas, pero sin la manifestación de este tipo de razonamiento (WEINBERG, 2002).

De acuerdo con Piaget y colaboradores, el razonamiento proporcional es uno de los ocho esquemas que caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona (INHELDER; PIAGET, 1996). El razonamiento proporcional es

[3] Corresponde al término en inglés *Knowledge Content and Student*

adquirido en el estadio de las operaciones formales, se requiere del uso de un razonamiento hipotético- deductivo, el cual le permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y, a partir de esta, deducir una segunda relación también matemática (proporción). El razonamiento proporcional es, en consecuencia, una relación entre relaciones.

Asimismo, estos autores reconocen como precursor del razonamiento proporcional el desarrollo de un razonamiento intuitivo, covariacional, de índole cualitativa (BEHR et al., 1992; LAMON, 2007; STREEFLAND, 1985), que debería dirigirse hacia formas más especializadas de conocimiento que pudiera servir de fundamento para el desarrollo del razonamiento proporcional. A la vez, el razonamiento proporcional constituye la base de conocimientos matemáticos más avanzados (proporcionalidad, funciones lineales, trigonometría, geometría, estudios de la pendiente, entre otros). En este sentido, es recomendable distinguir entre lo que es el razonamiento proporcional y la proporcionalidad; al respecto Lamon (2005, p. 3) sostiene:

> La proporcionalidad desempeña un rol en las aplicaciones dominadas por los principios físicos –temas tales como la ventaja mecánica, la fuerza, la óptica, la acústica, solo por mencionar algunos. El razonamiento proporcional, tal como es usado en este libro, es un prerrequisito para comprender contextos y aplicaciones basados en la proporcionalidad.

Desde la perspectiva teórica descrita, observamos la enseñanza de la proporcionalidad como una tarea compleja, que requiere que el profesor pueda ir más allá de la simple aplicación de reglas, y que razone proporcionalmente, además de iniciar una agenda de trabajo dirigida a lograr el desarrollo del razonamiento proporcional en sus alumnos.

En esta línea de ideas, consideramos que una alternativa para abordar esta problemática se encuentra en la formación inicial de profesores. Es conveniente proporcionar a los futuros maestros la formación requerida para que puedan afrontar, con pertinencia, la compleja tarea que les corresponde desempeñar.

Situados en el ámbito de la formación inicial de profesores y el razonamiento proporcional, observamos, de acuerdo con diversos estudios (BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008; GILBERT; GILBERT, 2009; LO, 2004; PERSON; BERENSON; GREENSPON, 2004; SOWDER et al., 1998; THOMPSON; THOMPSON, 1996), que los profesores en formación inicial, inclusive profesores en servicio, exhiben dificultades para comprender y enseñar los conceptos de razón y proporción. Person, Berenson y Greenspon (2004), en su estudio sobre el rol de los números en la comprensión del razonamiento proporcional, señalan las dificultades exhibidas por futuros profesores de bachillerato, para manejarse fluidamente entre las diferentes interpretaciones dadas a los números en problemas relativos a la proporcionalidad, quedando *atrapados* en el uso de procedimientos basados en fórmulas, casi impedidos para realizar y comprender el razonamiento proporcional involucrado.

Más aún, de acuerdo con el estudio de Thompson y Thompson (1996), no es suficiente comprender el concepto de razón para desarrollar una actividad de enseñanza pertinente sobre ese concepto. Resultados similares, referidos a la insuficiencia del conocimiento del contenido *per se* para lograr una enseñanza efectiva (HILL; BALL, 2004; RIBEIRO, 2009; SOWDER et al., 1998), apoyan la necesidad de desarrollar en los futuros profesores el conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

2.2 Herramientas del EOS y conocimiento del profesor

Desde la perspectiva del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007) han concebido y diseñado una herramienta de estudio denominada *análisis epistémico*[4], con el fin de identificar los elementos constituyentes y caracterizadores de las configuraciones puestas en juego durante el desarrollo de una práctica matemática. La puesta en práctica de esta herramienta de análisis ha dado lugar a la *Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados* (GROS), la cual comprende la identificación de los diferentes objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos), en correspondencia con sus respectivos significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático en un contexto instruccional.

Al considerar algunas de las propuestas para el estudio del conocimiento del profesor (GODINO, 2009; HILL; BALL; SCHILLING, 2008; SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008), se observa que la herramienta de análisis epistémico referida potencia el desarrollo de tres de los tipos de conocimientos propuestos por Ball y colaboradores (GODINO, 2009), a saber: (1) conocimiento

[4] Una aplicación de esta forma de análisis puede verse en Godino et al. (2008).

común del contenido, esto es, conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; (2) conocimiento especializado del contenido, relacionado con la elección y diseño de situaciones, modos diversos de representación y justificación de los contenidos curriculares; (3) conocimiento del contenido y de los estudiantes, esto es, el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido matemático específico. Estos tipos de conocimientos se inscriben en la forma de conocimiento denominada como *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT)[5], actualmente promovida por un amplio número de investigadores (ADLER, 2009; BALL et al., 2005; HILL; BALL; SCHILLING, 2008; RIBEIRO, 2009; SILVERMAN; THOMPSON, 2008; PETERSON; WILLIAMS, 2008).

Los efectos del desarrollo del MKT sobre la calidad de la instrucción en educación matemática han sido estudiados por Hill et al. (2008, p. 430), observándose que "[…] hay una asociación significativa, fuerte y positiva entre los niveles de MKT y la calidad de la instrucción matemática". En este orden de ideas, en este documento informamos sobre el desarrollo de tres de los niveles del MKT, en un grupo de maestros en formación inicial, al resolver un problema de proporcionalidad, analizar la resolución y valorar tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria.

2.3 Niveles del razonamiento proporcional

El problema *Mr. Tall/Mr. Short* (Cuadro 1), diseñado por Karplus (KARPLUS; PETERSON, 1970), es un problema de proporcionalidad, de valor faltante, del tipo "One-by-One (1x1) Category" (HAREL; BEHR, 1989, p. 83), cuyas unidades de medida, aunque diferentes, se encuentran en un mismo espacio de medida, y su índice de dificultad 4, corresponde con la estructura "P(R, i_b, N)" (HAREL; BEHR, 1989, p. 108). Su uso como problema en el presente estudio se ha inspirado en la idea de los niveles de razonamiento proporcional propuesta por Karplus, Adi y Lawson (1980); Karplus, Karplus y Wollman (1972); Khoury (2002) (Cuadro 1). En este sentido, los tres tipos de respuestas analizadas, que fueron dadas al problema por alumnos de 6º grado de primaria, coinciden con la propuesta de estos autores, al hablar de tres de los cuatro niveles del razonamiento proporcional. Una descripción de tales niveles se presenta en Cuadro 1.

[5] Corresponde al término en Inglés *Mathematical Knowledge for Teaching.*

Nivel I (Ilógico)	El estudiante no proporciona explicación, exhibe un cálculo ilógico o una adivinanza, o realiza una estimación general sobre la base de una observación descriptiva...
Nivel A (Aditivo)	El estudiante enfoca las diferencias entre 6 y 4 botones, y luego asume que la misma diferencia debe existir cuando se usan los clips…
Nivel TR (Transicional)	El estudiante usa un enfoque aditivo dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura… por cada dos botones hay un clip adicional…
Nivel R (Razón)	El estudiante usa una relación de razón constante o hace una comparación multiplicativa de las medidas de ambas figuras…
Problema *Mr. Tall/Mr. Short*: *La altura de señor bajito es 4 botones, mientras la altura de señor alto es 6 botones. Si usamos clips, la medida de señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de señor alto medida con clips?*	

Cuadro 1. Niveles del razonamiento proporcional en el problema *Mr. Tall/Mr. Short* (KHOURY, 2002, p. 100).

Se debe reconocer que existen muchas otras clasificaciones sobre los tipos de respuestas correctas e incorrectas asociadas a la resolución de problemas de proporcionalidad (BENANDER; CLEMENT, 1985; BERK et al., 2009; HART, 1988; OLIVEIRA, 2009; WEINBERG, 2002). No obstante, para efectos del problema particular aquí considerado, hemos estimado suficiente acogernos a los tres tipos de respuestas identificadas en una muestra de alumnos de 6º de primaria, coincidentes con la propuesta de los autores antes referidos.

3 Metodología

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación dirigido a la concepción de herramientas para el estudio y desarrollo del conocimiento del profesor, en el contexto de la formación inicial de profesores de primaria. La investigación es de carácter cualitativo-descriptivo, del tipo estudio de casos (PONTE, 2006). Su desarrollo contempla tres momentos: (a) resolución de un problema matemático de manera individual y supervisada por un asesor, (b) realización de un análisis de las resoluciones del problema, grupal y sin supervisión, y (c) debate grupal sobre tipos de respuestas del problema con la participación del asesor. Esta metodología se enmarca en la propuesta de una investigación, de corte naturalista (LINCOLN; GUBA, 1985), que involucra un proceso formativo.

3.1 Contexto de investigación y participantes

El contexto de esta investigación es el de la formación inicial de profesores de primaria, enmarcado en la asignatura *Currículo de Matemáticas en Educación Primaria,* correspondiente al segundo año de la carrera de magisterio. Las participantes conforman un grupo de trabajo integrado por cuatro futuras maestras, del segundo curso de magisterio. El primer autor actuó como asesor de este grupo para el desarrollo del trabajo del cual se informa en este artículo. Este grupo participó voluntariamente en el estudio. Los tres tipos de respuestas, dadas al problema considerado, fueron obtenidos a partir de su aplicación a una muestra de 23 alumnos de 6º curso de primaria, de un colegio concertado.

3.2 Recogida de datos: resolución – análisis – valoración de respuestas

El proceso de recogida de datos involucra información obtenida durante el desarrollo de tres sesiones distintas con el grupo de futuras maestras.

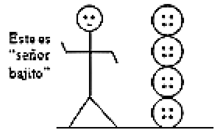
En la primera sesión se resolvió el problema *Mr. Tall/Mr. Short*, de manera individual, por cada maestra en formación inicial, en presencia del asesor. Los protocolos de las resoluciones elaboradas fueron recogidos al finalizar la actividad de resolución. En la segunda sesión, de carácter grupal, se realizó el análisis epistémico del problema y su resolución. Esta parte del trabajo se desarrolló sin ningún tipo de supervisión, el testimonio de su realización quedó plasmado en el protocolo producido y entregado por las participantes. En la tercera sesión se debatió, con la participación del asesor, sobre los análisis de los tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria. Estas sesiones fueron realizadas fuera de las clases regulares impartidas por el formador.

De manera que, las fuentes de datos fueron: a) las resoluciones del problema, b) el análisis epistémico de la resolución del problema, c) el análisis de tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria. Además de los protocolos escritos de cada una de estas actividades, se realizó un registro de audio de la tercera sesión.

Luego de resolver el problema (primera sesión), se solicitó a las futuras maestras realizar grupalmente el análisis epistémico correspondiente (segunda sesión). En preparación para esta segunda sesión, las futuras maestras realizaron con anterioridad un análisis similar en el aula de clase, sobre la resolución de otro problema de proporcionalidad, de valor faltante del tipo “One-by-Two (2x1) Category” (HAREL; BERH, 1989, p. 83). Adicionalmente, tuvieron acceso a dos análisis epistémicos: uno de un problema aritmético-algebraico y otro de proporcionalidad de valor faltante, del tipo referido. Estos análisis fueron elaborados por el formador encargado del curso en colaboración con los autores de este documento. Un ejemplo de este tipo de análisis puede verse en Godino et al. (2008). Como recurso de apoyo sobre el razonamiento proporcional, les fue recomendada a las futuras maestras la lectura del trabajo de Khoury (2002).

Para la tercera sesión se les propuso a las futuras maestras la realización de la tarea que se presenta en la Figura 1, constituye la *Cuestión 2* de un conjunto de seis cuestiones que forman parte de un trabajo práctico de la asignatura y curso referidos. En esta sesión se solicitó a las futuras maestras responder a la *Pregunta 2* (Figura 1). La descripción del contexto en el que se solicitó a las futuras maestras la realización de la tarea se observa en la siguiente consigna: *Las siguientes cuestiones corresponden a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de las razones y proporciones. Responde las preguntas que se plantean.*

Cuestión 2: *La altura de "señor bajito" es 4 botones, mientras la altura de "señor alto" es 6 botones. Si usamos clips, la medida de "señor bajito es de 6 clips. ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida con clips?*



Respuestas de los niños:
Nicolás: "señor alto" mide 10 clips, porque él es alto, por tanto 4 + 6 = 10.
Ruth: "señor alto" mide 8 clips, 6 – 4 = 2, y 6 + 2 = 8 clips.
Florencio: "señor alto" mide 9 clips. "Señor bajito" mide 6 clips, 2 más que 4. Por tanto, por cada dos botones hay un clip más. Lo mismo debería suceder con "señor alto" por lo que (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 9

Pregunta 2. Trata de precisar la causa del error de los niños que están equivocados.

Figura 1 - La tarea

Se observa, en la Figura 1, que las respuestas consideradas, dadas por tres alumnos de 6º curso de primaria (Nicolás, Ruth y Florencio), corresponden con los tres primeros niveles del razonamiento proporcional descritos en el Cuadro 1, donde se ha omitido el *Nivel R*. Esta omisión se debe a que las respuestas a ser analizadas fueron elaboradas por alumnos de 6º curso de primaria (11-13 años), para quienes, inicialmente, no es pertinente exigir ese nivel de razonamiento proporcional. Ese nivel de razonamiento podría ser el exhibido por las futuras maestras.

Para facilitar la referencia a las elaboraciones de las participantes utilizaremos una numeración en correspondencia con las soluciones dadas al problema. Así, por ejemplo, designamos a la Futura Maestra número 1, a quien dio la Solución 1 al problema (Figura 2), y la denotaremos por FM-1. De manera que FM-2 denota a la futura maestra que dio la Solución 2 (Figura 2), y así sucesivamente.

4 Resultados

4.1 Tipos de soluciones

En la Figura 2 se muestran los cuatro tipos de respuestas elaboradas por las futuras maestras. En la *Solución 1* se observa un uso correcto de la regla de tres. En la *Solución 2* se observa un uso de la regla de tres en la que se incluyen algunas rectificaciones. En la *Solución 3* se muestra el uso de la ecuación de proporcionalidad (igualdad entre dos razones). En la *Solución 4* se observa un razonamiento de tipo aditivo incorrecto, similar al mostrado por Ruth (Figura 1).

4.2 Análisis epistémico

El análisis epistémico se realiza para desarrollar aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido. Para la realización de este tipo de análisis se pone en juego la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS). El resultado del uso de esta herramienta por parte de las futuras maestras puede verse en la Figura 3.

Se observa, en la Figura 3, que las futuras maestras hacen una lista de los diferentes objetos: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y proposiciones. Los significados asignados a estos objetos son un tanto limitados. En la identificación que realizan de las *Proposiciones* se observa el reconocimiento de: (a) una relación cualitativa de covariación, relativa a una forma elemental de razonamiento proporcional (BEHR et al., 1992; LAMON, 2007; STREEFLAND, 1985), del tipo “más en A, más en B” (TIROSH; STAVY, 1999, p. 52), al enunciar: *Sr. Alto mide más que Sr. Bajo entonces Sr. alto mide más clips que Sr. bajo* (Figura 3); y (b) la relación *Por cada dos botones hay un clip más […]* (Figura 3), la cual debería conducir al reconocimiento de la razón *2 botones por 3 clips*, o a la comparación multiplicativa entre las alturas respectivas, pero ninguno de estos reconocimientos es exhibido por las futuras maestras.

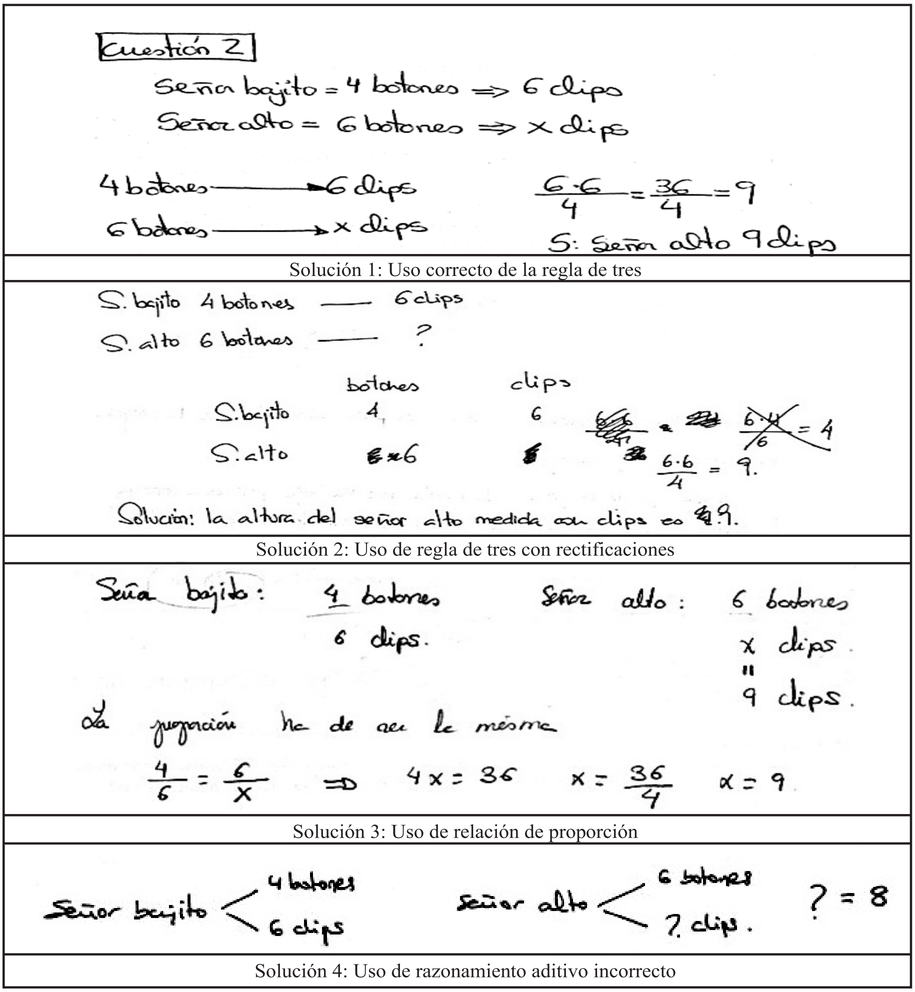


Figura 2 - Tipos de soluciones

Con respecto al objeto *Argumentos* (Figura 3), las futuras maestras exhiben un intento por explicar la existencia de esa relación (razón) constante, entre los botones y los clips, de las medidas del señor Bajo, para establecer esa misma relación entre las medidas-alturas del señor Alto, al afirmar:

Cuestión 2.

Tipos de objetos	Significados
▪ Elementos Lingüísticos.	
- 4 botones	Elementos de un conjunto cuyo cardinal es 4
- 6 "	" " 6
- 6 clips	" " 6
- "Señor bajito"	
- "Señor alto"	Dos alturas distintas
- ¿Cuál será la altura de "señor alto" medida en clips?	Cuestión a resolver
- Suma	Concepto de suma
- Resta	Concepto de resta
▪ Conceptos.	
- Cantidades	Nº de botones y clips (Sr. Bajito: 4 botones = 6 clips; Sr. alto: 6 botones = ? clips)
- Nº Natural	Cardinal de los conjuntos
- Sumar	Añadir, incrementar...
- Restar	Sustraer, quitar...
- Proporción	Comparación
- Razón	Relación
- Magnitud - altura	Medida de longitud

▪ Procedimientos.	
- Algoritmo de sumar y - Algoritmo de restar	Para hallar la altura del Sr. Alto en clips.
- Proporción	Búsqueda de la razón, la relación.
▪ Proposiciones.	
- "Señor alto" mide 10 clips - "Sr. alto" mide 8 clips - Por cada dos botones hay un clips más, por tanto, "Sr. alto" mide 9 clips. - "Sr. alto" mide más que "Sr. Bajo" Entonces "sr. alto" mide más clips que "Sr. bajo"	Respuestas al problema

▪ Argumentos.

- Hay una relación entre Sr. alto y Sr. bajo. Conocemos a lo que equivale la altura de Sr. Bajo en botones y clips. Entre estos dos elementos debe haber una relación, razón, que debe ser la misma entre los botones y clips del Sr. alto.

Figura 3 - Análisis epistémico de las futuras maestras (uso de la GROS)

Hay una relación entre Sr. alto y Sr. bajo. Conocemos a lo que equivale la altura de Sr. Bajo en botones y en clips. Entre estos dos elementos debe haber una relación, razón, que debe ser la misma entre los botones y los clips del Sr. alto. (Figura 3).

No obstante, no llegan a enunciar de manera específica los términos de esa relación, ni los valores de esa razón (2 botones por 3 clips). Esta observación coloca el razonamiento proporcional exhibido por las futuras maestras en el *Nivel TR (Transicional)* (Cuadro 1), puesto que no muestran el reconocimiento de la razón constante o una comparación multiplicativa precisa entre los botones y los clips y, finalmente, una relación (igualdad) entre las razones referidas a las alturas respectivas.

4.3 Valoraciones de las respuestas por parte de las futuras maestras

Los tres tipos de respuestas dadas al problema por alumnos de 6º curso de primaria (Nicolás, Ruth y Florencio, Figura 1), fueron analizadas en un debate por las cuatro futuras maestras, con la participación del asesor. Además de las respuestas de los alumnos, les fue entregado, a las futuras maestras, un folio en el que se describían los diferentes niveles del razonamiento proporcional mostrados en el Cuadro 1. A partir de la *Pregunta 2. Trata de precisar la causa del error de los niños que están equivocados* (Figura 1), las futuras maestras opinaban voluntariamente sobre sus percepciones al respecto. El debate correspondiente fue grabado en audio.

A continuación, se presenta un fragmento de una transcripción del audio del debate en relación con la valoración de la respuesta de Ruth. Como se ha indicado antes, se utilizará FM-1 para designar a la futura maestra quien dio la Solución 1 al problema, FM-2 para la futura maestra que dio la Solución 2, y así sucesivamente. La letra I designa al investigador.

FM-4: Pero entonces no tiene por qué ser proporcional... jum… y en este caso realmente no lo es.
FM-2: Eso lo que te he dicho yo
FM-3: ¿Cómo?
FM-2: Yo no me he planteado eso, yo que me he hecho la regla de tres
FM-1: Yo también he hecho la regla de tres
FM-2: De toda la vida de Dios…
FM-4: Yo he pensado primero y he dicho cuatro aumenta aquí dos… (Inaudible)…

FM-2: Yo lo he hecho automáticamente

I: ¿Automáticamente?

FM-2: Es que me sale

FM-1: Es que debe haber alguna otra forma pero…vamos…

FM-2: Es que yo me lo he planteado cuando ella [FM-4] me lo ha dicho, si no yo no me lo planteo.

Se observa en este fragmento del debate que a las futuras maestras les resulta difícil, inicialmente, comprender y explicar la respuesta dada por Ruth. La FM-4 ha considerado inicialmente que la respuesta dada por Ruth puede ser correcta, pues coincide con la solución que ella dio al problema en una primera oportunidad. Lo cual la lleva a dudar sobre si el problema involucra una situación de proporcionalidad o no. Expone su duda a las demás participantes; dos de ellas (FM-1 y FM-2), apoyadas en la resolución utilizando la regla de tres, simplemente valoran como errónea la respuesta y no estiman necesario hacer otras consideraciones sobre el procedimiento utilizado por Ruth.

A partir del intercambio de opiniones, sobre cada respuesta, cada una de las futuras maestras redactó un texto con el fin de sintetizar el resultado del debate. En este orden de ideas, se presentan en la Figura 4 y Figura 5, dos de las síntesis más representativas, elaboradas por dos de las futuras maestras: FM-2 y FM-3. Las valoraciones de las otras dos futuras maestras están comprendidas en estas dos valoraciones.

Nicolás: no piensa en razonar matemáticamente el problema, sino que directamente escoge los números más altos, y a partir de aquí suma ambos números, y de ahí ~~da~~ tiene la medida del señor alto.

Ruth: intenta igualar ambas medidas, de forma que hace que éstas aumente en la misma cantidad. Pero sin embargo, observamos como el resultado que obtiene no es el correcto.

Florencio: en este caso sí se lleva a cabo la resolución del problema de forma correcta.

Figura 4 - Valoración de respuestas de la futura maestra Nº 2 (FM-2)

En relación con las valoraciones realizadas a la respuesta de Nicolás, se observa (Figura 4 y Figura 5) que las futuras maestras se aproximan a la caracterización de esta forma de respuesta de acuerdo con el *Nivel I (Ilógico)* descrito en Cuadro 1. De hecho, la FM-3 cita este nivel del razonamiento proporcional en su valoración (Figura 5).

En las valoraciones dadas a la respuesta de Ruth, se observa que FM-2 parece dar crédito a que el procedimiento utilizado por Ruth podría conducir a un resultado correcto, al afirmar: *Intenta igualar ambas medidas, de forma que hace que éstas aumente en la misma cantidad.* (Figura 4). No parece identificar que tal aumento se basa en un razonamiento aditivo incorrecto, más aún si observamos que su valoración: *Pero sin embargo, observamos cómo el resultado que obtiene no es el correcto*, se basa en que el resultado obtenido por Ruth no es el mismo que ella ha obtenido utilizando la regla de tres.

Respuesta Nicolás:
sólo suma los 4 botones y los 6 clips. (Nivel 1 ilógico)
Respuesta Ruth:
- resta los botones del señor alto y del señor bajo (6-4)
- esa diferencia (2) se la suma a los 6 clips del señor bajo.
ha buscado la diferencia entre los botones. Esa misma diferencia se la ha sumado a los clips. Piensa que debe haber la misma.
Respuesta Florencio:
- busca la relación entre botones y clips. del señor bajito y concluye que por cada dos botones hay un clips más. Considera que esta relación, o proporción. debe mantenerse con el señor alto. Como este es 6 botones, descompone 6 : 2, 2, 2. Como por cada 2 . 1 clips +
(2+1) + (2+1) + (2+1) = 9.

Figura 5 - Valoración de respuestas de la futura maestra Nº 3 (FM-3)

La FM-3 realiza una valoración diferente de la respuesta de Ruth, al afirmar: *Ha buscado la diferencia entre los botones. Esa misma diferencia se la ha sumado a los clips. Piensa que debe haber la misma.* (Figura 5). Se identifica, en esta valoración, el reconocimiento de que el razonamiento realizado por Ruth se basa en mantener constante la diferencia entre los botones y los clips, lo cual caracteriza el razonamiento aditivo incorrecto del *Nivel A (Aditivo)* (Cuadro 1) del razonamiento proporcional.

En el caso de las valoraciones dadas a la respuesta de Florencio, observamos que la FM-2 emite una valoración elemental, al señalar: *Florencio: en este caso sí se lleva a cabo la resolución del problema de manera correcta.* (Figura 4). Esta valoración está posiblemente basada en la observación del resultado, sin prestar atención al procedimiento de resolución puesto en juego por Florencio.

La valoración de la FM-2 presenta un contraste evidente con la valoración realizada por la FM-3, quien señala que: *Florencio: busca la relación entre botones y clips…concluye que por cada dos botones hay un clip más. Considera que esta relación, o proporción debe mantenerse con el señor alto.* (Figura 5). En esta valoración la FM-3 exhibe comprensión del razonamiento puesto en juego por Florencio y explica cómo él llega al resultado correcto.

5 Discusión

5.1 Sobre las resoluciones y el uso de reglas

Los cuatro tipos de respuestas mostradas en la Figura 2 se pueden reducir a tres tipos: (1) regla de tres, (2) relación de proporción, y (3) razonamiento del tipo *Nivel A (Aditivo)* (Cuadro 1).

Aunque las futuras maestras (FM-1 y FM-2) son capaces de resolver correctamente el problema utilizando reglas, encontramos algunas limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos puestos en juego en la resolución. Así, el *conocimiento común del contenido* (uso de reglas), que les permite obtener una solución correcta del problema, poco o nada contribuye al reconocimiento de los significados de los objetos puestos en juego durante el proceso de resolución. Esto coincide con las conclusiones de Mohr (2008, p. 42) quien señala que muchos estudios han revelado que aún cuando los participantes dan 'respuestas correctas' estos "[…] carecen de una comprensión de los significados que están detrás de sus procedimientos o soluciones."

Particularmente, Lamon (2005; 2007); Onuchic y Allevato (2008); Weinberg (2002) señalan que el uso de reglas en la resolución de problemas de proporcionalidad puede dar lugar a respuestas correctas sin que se haya manifestado un razonamiento proporcional. Además, las participantes que resuelven el problema, utilizando la regla de tres, han exhibido dificultades para valorar de manera apropiada las respuestas de los alumnos, lo cual reafirma que el conocimiento de reglas poco o nada contribuye a comprender y explicar las respuestas dadas por los alumnos. Así, el conocimiento común basado en reglas para resolver problemas de proporcionalidad contribuye poco al conocimiento matemático necesario para la enseñanza. Estos resultados cuestionan el uso de reglas para resolver problemas de proporcionalidad en el contexto de formación de futuros maestros.

Con respecto a la solución dada por la FM-3 (relación de proporción, Solución 3, Figura 2) se observa un procedimiento correcto, en el que pareciera poner en juego un razonamiento proporcional del *Nivel R (Razón)* (Cuadro 1), sin embargo no se manifiesta ese nivel de razonamiento en el análisis epistémico respectivo, por lo que la resolución de FM-3 puede deberse a un uso de los elementos de la razón y la proporción que no involucra una comprensión apropiada de tales conceptos.

El uso de frases del tipo - *a* es a *b* como *c* es a *d* **-**, en algunos casos aprendidas de manera mecánica, conducen a establecer la relación $a/b = c/d$, sin que medie un razonamiento proporcional del Nivel R. No obstante, al observar las valoraciones dadas a los tres tipos de respuestas de los alumnos, se ve que la FM-3 muestra mayor comprensión de los razonamientos puestos en juego en las diferentes respuestas. Tanto el análisis epistémico como las valoraciones de las respuestas revelan dos aspectos: (a) la complejidad del uso de la GROS, antes referida, y (b) la participación de la FM-3 en el grupo fue determinante para el reconocimiento de objetos (propiedades y argumentos) antes referidos. El tipo de resolución empleada, y la revisión del material sugerido para la lectura, hacen que la FM-3 evidencie una disposición favorable hacia la adquisición y desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

Es necesario destacar que la observación de las resoluciones dadas al problema por las futuras maestras proporciona una información limitada, pues, a partir de ellas no es posible, por ejemplo, establecer si las participantes son capaces de realizar un razonamiento proporcional del *Nivel R (Razón)* (Cuadro 1), al resolver problemas de proporcionalidad.

5.2 Sobre el análisis epistémico realizado por las futuras maestras

El trabajo en grupo, al aplicar la GROS (Figura 3), ha favorecido el reconocimiento de un conjunto amplio de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos) puestos en juego en la resolución del problema. Consideramos que identificar estos objetos fomenta el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*. No obstante, el significado asignado a los mismos resulta limitado puesto que se reduce a un parafraseo que poco informa sobre el conocimiento de los objetos identificados por las futuras maestras. Este hecho puede deberse a dos razones, a saber: (a) los tipos de respuestas dadas al problema, dado que se basan en el uso de reglas, imponen serias limitaciones para el análisis correspondiente, y (b) la dificultad asociada al uso de la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados, puesto que tal uso comprende una actividad de reflexión y metacognición, en la que se indaga sobre los significados asignados a los objetos activados durante el proceso de resolución de un problema matemático.

A pesar de estas limitaciones, hemos observado en la identificación de los objetos *Proposiciones* y *Argumentos* (Figura 3) el reconocimiento de aspectos relativos a formas elementales del razonamiento proporcional, hasta el *Nivel TR (Transicional)*, sin mostrarse evidencia de formas más avanzadas del razonamiento proporcional. En su lugar, se observa cierta deficiencia en el uso del concepto de razón, así como, también, ausencia de un conocimiento apropiado de la comparación multiplicativa de las medidas implicadas. Si bien es cierto que resolver el problema no ha exigido ir más allá del nivel del razonamiento proporcional manifestado, también es verdad que no se ha mostrado una asignación apropiada al significado del concepto de razón (Figura 3). En este sentido, el uso de la guía para reconocimiento de objetos y significados proporciona información más precisa sobre el nivel de razonamiento proporcional puesto en juego por las futuras maestras, lo cual no fue posible observar a partir de las meras resoluciones dadas al problema.

Es menester referir que algunos de los reconocimientos efectuados en torno a los objetos *Propiedades* y *Argumentos*, antes mencionados, pueden haber sido influidos por la información contenida en el documento de Khoury (2002), recomendado a las futuras maestras para su lectura, puesto que en ese documento está incluida parte de la información de la tarea (Figura 1). Por lo que el reconocimiento de la relación *por cada dos botones hay un clip más*, la cual es fundamental para comprender y explicar el proceso de resolución, puede provenir del uso de tal información. Una evidencia del uso de esa información se observó en la valoración de las respuestas de los alumnos elaborada por la FM-3, quien hizo uso del texto de ese documento (Figura 5).

En cualquier caso, observamos que la elaboración del análisis epistémico ha servido para dar lugar a un proceso de reflexión, en el que las futuras maestras ponen en juego un conocimiento especializado que busca comprender y explicar la resolución del problema, más allá del uso de reglas, utilizadas inicialmente por ellas. Este análisis ha dado lugar a una actividad en la que las futuras maestras han tenido que cuestionarse sobre los significados en los cuales se ponen en juego los términos razón y proporción, lo cual coloca a las futuras maestras en una situación de producción y reflexión que tiene interés para el profesional encargado de la actividad de enseñanza.

En este orden de ideas, se observa cómo la realización del análisis epistémico procura un conocimiento común avanzado y consolidado del contenido, al motivar procesos de comprensión de la resolución más allá del uso de reglas, al tiempo que fomenta el desarrollo del conocimiento especializado del contenido. Se observa que este tipo de análisis da cuenta de una actividad en la que se trata de profundizar en la comprensión de la resolución del problema y su explicación, siendo esta actividad una labor propia del profesional de la docencia.

Por otro lado, un análisis epistémico experto, en el caso específico del problema considerado, debería dar cuenta del reconocimiento de que la razón se manifiesta como una relación multiplicativa entre número de botones y clips (2 botones/3 clips), referida a dos mediciones de la magnitud altura (señor bajo y señor alto), y la proporción como relación (igualdad) entre dos razones (botones/clips del señor bajo, botones/clips del señor alto) que se comparan. La resolución de la FM-3 (Solución 3, Figura 2) parece mostrar este uso de la razón y la proporción, sin embargo, en el análisis epistémico no se reconoce tal uso; en las aproximaciones exhibidas en el análisis epistémico realizado por las futuras maestras (Figura 3), no se evidencia el reconocimiento de la proporción como relación entre relaciones (INHELDER; PIAGET, 1996). En este sentido, el análisis epistémico ha favorecido la identificación de cierta deficiencia en el razonamiento proporcional de las futuras maestras.

Finalmente, tal como se ha observado en el análisis epistémico realizado por las futuras maestras (Figura 3), el reconocimiento de las proposiciones y los argumentos posibilita hacer consciente al resolutor de la complejidad subyacente a la resolución del problema, posiblemente ignorada durante la resolución. Este aspecto es otra de las razones que parece apoyar nuestra hipótesis de que la actividad de reconocimiento de objetos y significados potencia el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido*.

5.3 Sobre las valoraciones de las respuestas de los alumnos

En relación con los análisis de los tres tipos de respuestas dadas por los alumnos de 6º curso de primaria se observó, en el debate, que la mayoría de las futuras maestras mostraron dificultad para comprender, reconocer y explicar un tipo de respuesta diferente al dado por ellas, incluyendo el caso en que la respuesta es correcta (respuesta dada por Florencio).

Se debe destacar, por ejemplo, en la valoración de la FM-2, el no reconocimiento de la diferencia (entre los botones) y su permanencia (entre los clips), para juzgar la respuesta de Ruth. Su valoración queda restringida al reconocimiento de una covariación (aumento en la misma cantidad) muy general, propio de una forma de pensamiento precursora del razonamiento proporcional, de índole intuitiva-cualitativa (BEHR et al., 1992; LAMON, 2007; STREEFLAND, 1985). Esta forma de pensamiento refuerza el uso de razonamientos aditivos incorrectos, que adolece de la precisión requerida para valorar adecuadamente el razonamiento puesto en juego por Ruth.

Se observa, también, que la mayoría de las futuras maestras se muestran a favor de proponer un único método de resolución que permita resolver todos los problemas de razonamiento proporcional. Estos resultados coinciden con lo señalado por Hines y McMahon (2005, p. 104), quienes señalan:

> Cuando los futuros maestros encuentran métodos usados por sus alumnos que ellos no reconocen o no entienden, tienden a valorarlos como métodos menos avanzados, y se muestran reacios a analizar el pensamiento de los estudiantes, aún cuando los métodos de los alumnos sean apropiados y conduzcan a respuestas correctas. Así, los maestros en formación recomiendan que las estrategias de solución de sus alumnos sean reemplazadas con ‘métodos correctos’, refiriéndose a los métodos estándar con los cuales están más familiarizados.

Asimismo, se considera que la dificultad para comprender el pensamiento de los niños, exhibida por las maestras, apoya resultados reseñados en la literatura, en los que se afirma que la habilidad para dar respuestas correctas a problemas de proporcionalidad, no necesariamente garantiza que el resolutor sea capaz de razonar proporcionalmente (BERK et al., 2009; HINES; MCMAHON, 2005; MOHR, 2008; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). En este caso, el uso de la regla de tres y el producto cruzado evita que las futuras maestras pongan en juego el concepto de razón y/o razonar sobre la constante de proporcionalidad (LAMON, 2007; WEINBERG, 2002). En términos del estudio de Berk et al. (2009), sería conveniente desarrollar la *flexibilidad*[6] en el uso de procedimientos matemáticos de los futuros maestros, para fomentar la implementación de procedimientos diferentes al uso de reglas para la resolución de problemas de proporcionalidad.

Aún cuando, inicialmente, la tarea de análisis de las respuestas de los alumnos de 6º curso de primaria resultó limitada, observamos que la asignación de la lectura del documento de Khoury (2002), el reconocimiento de objetos y significados realizados con la GROS y la metodología de debate desarrollada, favorecieron posteriormente el reconocimiento y la profundización en aspectos específicos de la razón y proporción, involucrados en las respuestas de Ruth y Florencio. Esto se reflejó en las valoraciones de las respuestas elaboradas por la FM-3 (Figura 5), en las cuales, esta futura maestra muestra que comprende tanto el razonamiento aditivo (erróneo) puesto en juego por Ruth, como la manifestación de un razonamiento proporcional del *Nivel TR (Transicional)* en la respuesta de Florencio.

Esta comprensión evidencia el desarrollo del *conocimiento de los estudiantes y el contenido*, logrado por medio de la realización de una tarea, en la que se solicita a la futura maestra valorar tres tipos de respuestas dadas por alumnos a un problema de proporcionalidad. Habiendo sido precedida esta tarea por la resolución del problema en cuestión y su análisis epistémico respectivo. Una de las manifestaciones particulares del desarrollo de este tipo de conocimiento lo observamos en la comprensión de la respuesta de Ruth, quien pone en juego un razonamiento de tipo aditivo incorrecto en la resolución del problema. Este tipo de razonamiento ha sido ampliamente estudiado (Oliveira, 2009), es considerado un tipo de error muy frecuente y de mucho interés en el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad.

6 Implicaciones para la formación de profesores

Uno de los aspectos reseñados en la literatura, como relevante para la concepción y desarrollo de una actividad de enseñanza, es diseñar situaciones retadoras para los alumnos (POTARI; JAWORSKI, 2002; PONTE, 2007). En este sentido, las actividades de aplicación de la GROS y el análisis de las respuestas dadas por alumnos de 6º curso de primaria a un problema no son

[6] Según Berk et al. (2009), la flexibilidad refiere a la competencia de resolver una misma tarea mediante diversas estrategias.

actividades comunes y constituyeron retos para las participantes.

Una manifestación observable del proceso desencadenado por estas situaciones de reto fue exhibida en una reflexión final realizada por una de las futuras maestras, quien se enfrentó a una respuesta incorrecta similar a la dada por ella; intentó corroborarla mediante el uso de la regla de tres. Sus soluciones, obtenidas mediante dos estrategias diferentes, no coincidían. La maestra reflexionó y conjeturó que el problema podría no ser de razonamiento proporcional, como se observa en la afirmación: *[…] sin embargo no es proporcional,* mostrada en la Figura 6, considera que la solución, incorrecta, obtenida inicialmente no se corresponde con una situación de proporcionalidad, produciéndose un *desequilibrio cognitivo*.

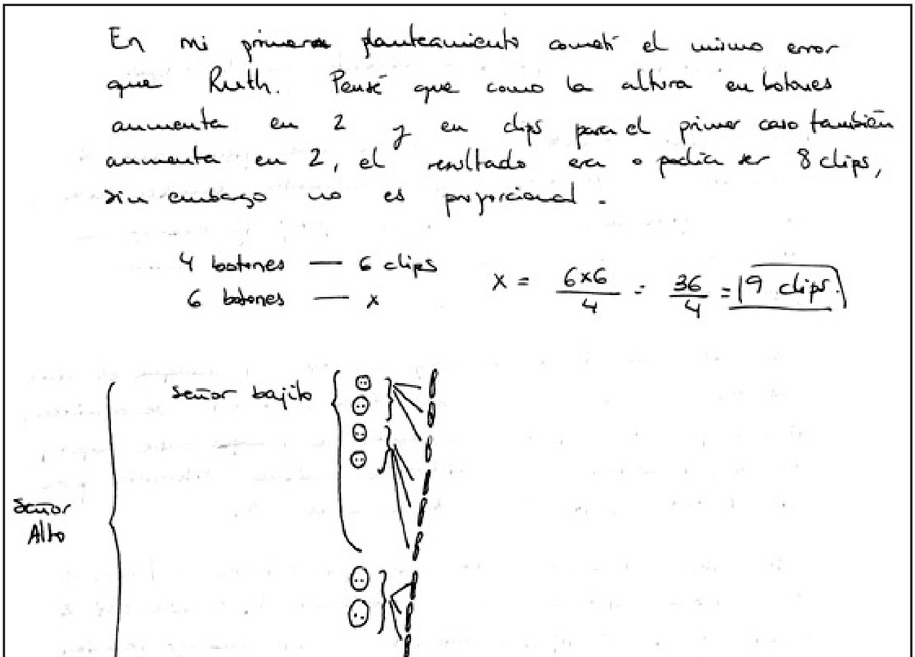


Figura 6 - Reflexión final de una de las futuras maestras

En términos de la teoría piagetiana del aprendizaje, el equilibrio cognitivo fue alcanzado al observar la respuesta dada por Florencio, en la que el alumno usa un enfoque aditivo correcto (Nivel TR –Transicional– del razonamiento proporcional) dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura: por cada dos botones hay un clip adicional. Este enfoque aditivo del Nivel TR, guarda cierta similitud con el procedimiento puesto en juego por ella, pero se diferencia en el carácter *relativo* que sustenta la resolución de Florencio, versus el carácter *absoluto* que sustenta la resolución dada por Ruth (LAMON, 2005).

Se observa, además, en la reflexión de la futura maestra (Figura 6), diversos aspectos que informan sobre la manifestación de un desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza. En efecto, como primer aspecto se observa la adquisición de un *conocimiento común del contenido*: al darse cuenta que ha dado una respuesta incorrecta al problema, compara su resultado con el obtenido por medio de la aplicación de la regla de tres, observa la discrepancia entre los resultados. Concluye, reconociendo que considerar las diferencias (manifestación de un razonamiento aditivo, similar al mostrado por Ruth, Figura 1 y aplicado por ella Figura 2) produce un error, por lo que renuncia a esa forma de resolución.

Como segundo aspecto, se observa un desarrollo de un *conocimiento especializado*: al reconocer en la respuesta de Florencio una forma alternativa de resolución del problema, en la que se pone en juego el uso de un razonamiento proporcional transicional correcto, prescindiendo del uso de la regla. Un tercer aspecto, relativo al *conocimiento de los estudiantes y el contenido*: al reconocer en la respuesta de Florencio una forma de pensamiento del alumno relativa al razonamiento proporcional.

Finalmente, un cuarto aspecto relativo al desarrollo del *conocimiento de la enseñanza y el contenido*: al proponer una respuesta al problema considerando la forma de pensamiento del alumno, identificada en la respuesta de Florencio, haciendo uso de representaciones gráficas, dirigida a explicar cómo se pone en juego ese razonamiento proporcional (Figura 6). Este tipo de conocimiento constituye otro de los dominios del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, propuesto por Ball y colaboradores (BALL et al., 2005).

El proceso evidenciado por la futura maestra describe una trayectoria, que, de acuerdo con Brown y Borko (1992, p. 221) constituye uno de los aspectos más difíciles de aprender a enseñar, al respecto estos autores señalan: "[…] uno de los aspectos más difíciles de aprender a enseñar es efectuar la transición desde una orientación personal hacia una orientación disciplinar para pensar sobre cómo organizar y representar el contenido disciplinar para facilitar su comprensión por el alumno".

7 Conclusiones

A modo de conclusión, consideramos que el desarrollo de esta investigación nos ha permitido observar que el uso de la GROS, por parte de las futuras maestras, en lo concerniente al reconocimiento de los significados de los objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos), constituye una actividad compleja a la que no están habituadas. No obstante, el reconocimiento de los objetos identificados permitió: (a) a las futuras maestras, reconocer *Proposiciones* y elaborar *Argumentos* que trascienden la aplicación de reglas en la resolución de problemas de proporcionalidad, y (b) a los investigadores, observar conductas que informan sobre el nivel de razonamiento proporcional puesto en juego por las futuras maestras al analizar la resolución de un problema de proporcionalidad.

En este orden de ideas, consideramos que la actividad de reconocimiento de la red de objetos y significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático, forma parte del *conocimiento especializado del contenido* necesario para la enseñanza de la matemática.

El análisis de tres respuestas (erróneas o correctas), dadas a un problema matemático por alumnos de 6º curso de primaria, coloca a los futuros profesores en una situación rica de aprendizaje, en la que adquiere relevancia el reconocimiento de errores asociados al uso de un razonamiento aditivo. La sola resolución del problema por parte de los profesores parece no ser suficiente para gestionar la promoción del razonamiento proporcional de los niños.

Las actividades instruccionales desarrolladas, de las cuales informamos en este documento, han permitido evidenciar que su puesta en juego fomentan el desarrollo de varios de los tipos de conocimiento necesario para la enseñanza, entre los que se han reconocido: el *conocimiento común del contenido*, el *conocimiento especializado del contenido*, el *conocimiento de los estudiantes y el contenido,* y el *conocimiento de la enseñanza y el contenido* (BALL et al., 2005).

Uno de los aspectos de mayor interés para la formación de profesores es la manifestación observada en el crecimiento exhibido por una de las futuras maestras (Figura 6). La actividad desarrollada permitió a esta futura maestra evolucionar en varios sentidos: a) epistémico, al pasar de estados de menor conocimiento a estados de mayor conocimiento, b) competencia matemática, al resolver correctamente el problema, y c) didáctico, al proponer una solución al problema vinculada con las posibilidades de razonamiento de los alumnos.

Finalmente, de acuerdo con Steele (2005, p. 292), “El reto enfrentado por los formadores de maestros es asegurarse que tanto los futuros maestros como los maestros en ejercicio tengan niveles apropiados de conocimiento para la enseñanza de la matemática”. Por lo que corresponde asumir el reto e impulsar el desarrollo de procesos formativos de profesores que involucren actividades similares a las presentadas en este documento.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947. Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN), España.

Referencias

ADLER, J. A methodology for studying mathematics for teaching. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 29, n. 1, p. 33 - 58. 2009.

BALL, D. L. et al. **A theory of mathematical knowledge for teaching**.Paper presented at the Fifteenth ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, p. 15 - 21. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista/ UNESP, 2005. Disponible en: <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html>. Acceso en: 1 dic. 2008.

BEHR, M. et al. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 296 - 333.

BENANDER, L.; CLEMENT, J. **Catalogue of error patterns observed in courses on basic mathematic**. New York: Working Draft, Exxon Education Foundation, 1985. Reporte ERIC, 287 - 672. Disponible en: <http://eric.ed.gov/PDFS/ED287672.pdf >. Acceso en: 12 nov. 2008.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. “Atividades investigativas autênticas” para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 125 - 159, 2008. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/756>. Acceso en: 12 jul. 2010.

BERK, D. et al. Developing prospective elementary teachers’ flexibility in the domain of proportional reasoning. **Mathematical Thinking and Learning,** Australia, v. 11, n. 3, p. 113 - 135, jul. 2009.

BROWN, C. A.; BORKO, H. Becoming a mathematics teacher. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, 1992, p. 209-239.

GILBERT, M.; GILBERT, B. Defining and developing content knowledge for teaching. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33th, 2009, Thessaloniki, Greece. **Proceedings**… Thessaloniki: PME, 2009, v. 3, p. 73 - 80.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** Buenos Aires, v. n/c. n. 20, p. 13 - 31, dic. 2009. Disponible en: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf>. Acceso en: 13 marzo 2012.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education,** Berlin, v. 39 n. 1 - 2, p. 127 - 135, Mar. 2007.

GODINO, J. D. et al. Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In: ICME 11th, 2008, México. **Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching**. Mexico, Monterrey, 2008, p. 1 - 8. Disponible en: <http://tsg.icme11.org/document/get/391>. Acceso en: 10 nov. 2008.

HAREL, G.; BEHR, M. Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representation. **Journal of Mathematical Behavior,** Norwood, New Yersey, v. 8, n. 1, p. 77 - 119, Mar. 1989.

HART, K. M. Ratio and proportion. In: HART, K. M. (Ed.), **Children's understanding of mathematics:** 11 - 16. London: John Murray, 1988. p. 88 - 101.

HILL, H.; BALL, D. L. Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, VA, v. 35, n. 5, p. 330 - 351, Nov. 2004.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston VA, v. 39, n. 4, p. 372 - 400, July 2008.

HILL, H. C. et al. Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. **Cognition and Instruction,** Mahwah, New Jersey, v. 26, n. 4, p. 430 - 511, July 2008.

HINES, E.; MCMAHON, M. T. Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: observations from preservice teachers. **School Science and Mathematics,** Columbus, Ohio, v. 105, n. 2, p. 88 - 105, Feb. 2005.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales**. Barcelona: Paidós, 1996.

KARPLUS, R.; ADI, H.; LAWSON, A. Intellectual development beyond elementary school VII1: proportional, probabilistic, and correlational reasoning. **School Science and Mathematics,** Indiana, Pennsylvania, v. 80, n. 8, p. 673 - 683, Dec. 1980.

KARPLUS, E.; KARPLUS, R.; WOLLMAN, W. Intellectual development beyond elementary school 11: ratio, a survey. **School Science and Mathematics,** Indiana, Pennsylvania, v. 70, n. 9, p. 813 - 820, Dec. 1970.

KARPLUS, R.; PETERSON, R. W. Intellectual development beyond elementary school IV: ratio, the influence of cognitive style. **School Science and Mathematics,** Menasha, Wisconsin, v. 74, n. 6, p. 476 - 482, Oct. 1974.

KHOURY, H. A. Classroom challenge. exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. short. In: B. LITWILLER; G. BRIGHT (Eds.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook.** Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 2002. p. 100 - 102.

KOTSOPOULOS, D.; LAVIGNE, S. Examining "mathematics for teaching" through an analysis of teachers' perceptions of student "learning paths". **International Electronic Journal of Mathematics Education,** Ankara, Turkía, v. 3, n. 1, Feb. 2008. Disponible en: < http://www.iejme.com/012008/d1.pdf >. Acceso en: 10 sept. 2009.

LAMON, S.J. **Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.** Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2005.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007, v.1, p. 629 - 667.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: BEHR, M. ; HIEBERT, J. (Eds.). **Number concepts and operations for the middle grades.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 93 - 118.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. Beverly Hills, California: Sage Publications, 1985

LO, J-J. Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28th, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings**... Bergen: PME, 2004, v. 3, p. 265 - 272.

MOHR, M. J. Mathematics knowledge for teaching: the case of preservice teachers. In: KULM, G. (Ed.). **Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 19 - 43.

NATIONAL COUNCIL TEACHER MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: NCTM, 2000.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 57 - 80. 2009. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/802>. Acceso en: 8 abr. 2010.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 21, n. 31, p. 79 - 102. 2008. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/756 > Acceso en: 12 jul. 2010.

PERSON, A.; BERENSON, S.; GREENSPON, P. The role of number in proportional reasoning: a prospective teacher's understanding. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28th, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings**... Bergen: PME, 2004, v. 4, p. 17 - 24.

PETERSON, B. E.; WILLIAMS, S. R. Learning mathematics for teaching in student teacher experience: two contrasting cases. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v. 11, n. 6, p. 459 - 478, Nov. 2008.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 19, n. 25, p. 1-23, 2006. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880/1657>. Acceso en: 5 dic. 2009.

PONTE, J. P. Investigations and explorations in the mathematics classroom. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education,** Berlin, v. 39 n. 5 - 6, p. 419 - 430, Oct. 2007.

POTARI, D.; JAWORSKI, B. Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the Teaching Triad as a tool for reflection and analysis. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v. 5, n. 4, p. 351 - 380, Dec. 2002.

RIBEIRO, C. M. Conhecimento matemático para ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 22, n. 34, p. 1 - 26. 2009. Disponible en: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/802>. Acceso en: 8 abr. 2010.

SCHOENFELD, A. H.; KILPATRICK, J. Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In: TIROSH, D.; WOOD, T. (Eds.). **Tools and Processes in Mathematics Teacher Education.** Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 321 - 354.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher,** Washington, v. 15, n. 2, p. 2 - 14, Feb. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. **Harvard Educational Review,** Harvard, v. 57, n. 1, p. 1 - 22, Feb. 1987.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. W. Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v.11, n. 6, p. 499 - 511, Nov. 2008.

SOWDER, J. et al. Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v.1, n. 2, p. 127 - 155, May 1998.

STEELE, M. D. Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Dordrecht, Netherland, v. 8, n. 4, p. 291 - 328, Aug. 2005.

STREEFLAND, L. Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards… a theory) part II: the outline of the long term learning process. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, Netherland, v. 16, n. 1, p. 75 - 94, Feb. 1985.

THOMPSON, A. G.; THOMPSON, P. W. Talking about rates conceptually, part II: mathematical knowledge for teaching. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, VA, v. 27, n. 1, p. 2 - 24, Jan. 1996.

TIROSH, D.; STAVY, R. Intuitive rules: a way to explain and predict students' reasoning. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, Netherland, v. 38, n. 1-3, p. 51 - 66, Mar. 1999.

WEINBERG, S. L. Proportional reasoning: one problem, many solutions!. In: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Eds.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions:** 2002 yearbook. Reston, VA.: NCTM, 2002. p. 138 - 144.

Submetido em Dezembro de 2010.
Aprovado em Junho de 2011.