Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación[1]

Lilia Aké, Universidad de Granada

Juan D. Godino, Universidad de Granada

Teresa Fernández, Universidad de Santiago de Compostela

Margherita Gonzato, Universidad de Granada

Resumen

En este artículo analizamos una experiencia formativa de maestros de educación primaria orientada al desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La experiencia se realizó en un curso sobre "Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria" donde el razonamiento algebraico elemental fue un tema transversal respecto a los restantes bloques temáticos. La metodología de investigación fue la ingeniería didáctica, entendida en sentido generalizado y basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Las actividades sobre razonamiento algebraico elemental fueron realizadas por 56 estudiantes. El estudio preliminar indica la pertinencia del contenido para la formación de maestros, mientras que los resultados sugieren que el reconocimiento de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización es una competencia difícil de lograr con los medios asignados en el proceso formativo.

Palabras claves. Razonamiento algebraico elemental, formación de maestros, niveles de algebrización, diseño instruccional, enfoque ontosemiótico.

Didactic engineering to develop algebraic sense of prospective elementary school teachers

Abstract

In this paper we analyze a formative experience directed to prospective primary school teachers, which was aimed at developing their competence to discriminate algebraic objects and the different algebraization levels of school mathematical activity. The experience was performed in a Teaching and Learning primary school mathematics course, where elementary algebraic reasoning was a transversal topic for the remaining mathematical themes. The methodology was based on didactic engineering, which was understood in a generalized sense and was based on the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. The activities designed to develop elementary algebraic reasoning were carried out by 56 students. Our preliminary analysis suggest the relevance of this content for teacher education, although the recognition of algebraic object and the assignment of algebraization levels were difficult to achieve with the resources allocated in the implemented training process.

Key words. Elementary algebraic reasoning, prospective school teachers, algebrization levels, instructional design, onto-semiotic approach

Engenharia didática para o desenvolvimento do sentido algébrico de professores em formação

Resumo

Neste artigo analisamos uma experiência de formação de professores do ensino primário visando o desenvolvimento de conhecimentos para discriminar objetos algébricos e diferentes níveis de algebrização da atividade matemática escolar. A experiência foi realizada no um curso sobre "Ensino e aprendizagem da matemática no ensino primário", em que o raciocínio algébrico elementar foi um tema transversal em relação aos blocos temáticos restantes. A metodologia aplicada foi a engenharia didática, entendida em um sentido generalizado e desenhada com base no enfoque ontosemiótico do

[1] *Avances de Investigación en Educación Matemática* (en prensa).

conhecimento e instrução matemática. As atividades desenhadas para o raciocínio algébrico elementar foram realizadas por 56 alunos inscritos no curso. O estudo preliminar indica a relevância do conteúdo para a formação de professores, enquanto a análise dos resultados mostra que o reconhecimento de objetos algébricos e a atribuição de níveis de algebrização é uma competência difícil de se alcançar com os meios designados no processo de formação.

Palavras-chave. Raciocínio algébrico elementar, formação de professores, níveis de algebrização, desenho instrucional, enfoque ontossemiótico.

Ingénierie didactique pour développer le sens algébrique des enseignants en formation

Résumé

La recherche proposée analyse une expérience de formation d'enseignants du primaire qui vise à développer les connaissances nécessaires pour discriminer objets algébriques et différents niveaux d'algébrisation dans l'activité mathématique scolaire. L'expérience a été réalisée dans un cours sur "Enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans l'école primaire", dans lequel le raisonnement algébrique élémentaire a été a sujet transversale aux blocs thématiques restants. On a appliqué une méthodologie d'ingénierie didactique, considérée dans un sens général et basée sur l'approche ontosémiotique de la connaissance et l'enseignement des mathématiques. Les activités théoriques et pratiques sur le raisonnement algébrique élémentaire qu'on a élaborées ont été appliquées à un échantillon de 56 étudiants inscrits au cours. L'étude préliminaire indique que le contenu traité dans la recherche est pertinent pour la formation des enseignants, alors que l'analyse des résultats montre que la reconnaissance d'objets algébriques et l'attribution des niveaux d'algébrisation sont compétences difficiles à obtenir avec les ressources accordées dans le processus de formation.

Most clés. Raisonnement algébrique élémentaire, formation d'enseignants, niveaux d'algébrisation, design pédagogique, approche ontosémiotique.

1. Introducción

Diversas propuestas curriculares e investigaciones resaltan el interés de desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros niveles de educación primaria (NCTM, 2000; Kaput, 2000; Cai y Knuth, 2011), lo que requiere la formación didáctico-matemática de los profesores en dicho tema. En este artículo presentamos una experiencia formativa con futuros maestros de educación primaria centrada en desarrollar su conocimiento de las características del razonamiento algebraico y su competencia para discriminar niveles de algebrización en la resolución de tareas matemáticas escolares. La experiencia se realizó en un curso sobre "Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria" en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada durante el curso 2011-2012.

El diseño se fundamenta en nuestro modelo previo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) (Godino, Castro, Aké, Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, en prensa) y su implementación y evaluación se inscribe en las investigaciones orientadas al diseño instruccional (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008; Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013) apoyado en herramientas teóricas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Mostramos en este trabajo las posibilidades ofrecidas por el mencionado marco teórico en el campo de la ingeniería didáctica, entendida en sentido generalizado (Godino et al., 2013).

En lo que sigue (sección 2), resumimos el marco teórico, problema y metodología. En la sección 3 incluimos algunos elementos básicos del estudio preliminar, focalizado en la reconstrucción de un significado de referencia (matemática y didáctica) sobre el razonamiento algebraico elemental. En la sección 4, incluimos el diseño del proceso formativo y las tareas seleccionadas, cuya implementación se describe en la sección 5, fijando la atención en los contenidos algebraicos efectivamente introducidos. En la sección 6 analizamos retrospectivamente la idoneidad didáctica de la experiencia, para identificar mejoras potenciales. Así mismo, reflexionamos sobre las normas (Godino, Font, Wilhelmi, De Castro,

2009) que han condicionado el diseño e implementación. Finalmente en la sección 7 incluimos una síntesis e implicaciones de la experiencia formativa y del proceso metodológico aplicado.

2. Marco teórico, problema y metodología de investigación

Partiendo de la necesidad de brindar a los maestros en formación oportunidades de construir una visión amplia del pensamiento algebraico y capacitarlos para conectarlo con el currículo de educación primaria en sus distintos bloques de contenido (NCISLA, 2003, p. 11), abordamos la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario (y posible) implementar en un programa de formación inicial de maestros de primaria para capacitarles en la distinción de las características del razonamiento algebraico y el reconocimiento de niveles de algebrización de la actividad matemática escolar?*

Se trata de un problema de diseño instruccional, pues queremos indagar posibles intervenciones en los procesos de formación que ayuden a mejorar una situación de partida; en nuestro caso, las carencias de conocimientos, comprensión y competencia sobre el razonamiento algebraico elemental de los maestros de primaria en formación (Blanton y Kaput, 2003; Stephens, 2008; Aké, Castro, Godino, 2011). El marco metodológico será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido propuesto en Godino, et al. (2013) donde se amplía su concepción tradicional (Artigue, 1989; 2011) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Cobb, et al, 2003; Kelly, Lesh y Baek, 2008). Como soporte teórico de la ingeniería adoptamos algunas nociones introducidas en el EOS para el análisis de los procesos de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006), la dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009) y la idoneidad didáctica (Godino, 2011).

Siguiendo esta interpretación de la ingeniería didáctica distinguimos cuatro fases en la investigación: 1) Estudio preliminar; 2) Diseño del experimento, 3) Implementación; 4) Evaluación o análisis retrospectivo. En el estudio preliminar se reconstruye el significado de referencia global del "objeto matemático" RAE (apartado 3). En las fases de diseño, implementación y evaluación tendremos en cuenta las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional que propone el EOS, así como las nociones de configuración didáctica y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006).

Una característica de las investigaciones basadas en el diseño instruccional, y de la ingeniería didáctica (sentido generalizado), es que tienen lugar en contextos reales de clase. Por tanto, tienen un enfoque exploratorio e interpretativo, más que experimental o cuasi-experimental. Además, los roles de profesor e investigador no tienen que ser netamente diferenciados. En nuestro caso el equipo de investigación estuvo formado por el profesor del curso en que tiene lugar la experiencia, una observadora no participante y otros investigadores que participaron en el análisis e interpretación de los datos recogidos.

En líneas generales la experiencia consiste en introducir explícitamente conocimientos especializados sobre razonamiento algebraico elemental a lo largo de un curso sobre "Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria" de 6 créditos (150 horas presenciales y no presenciales). El objetivo fue introducir progresivamente a los estudiantes en el reconocimiento de objetos algebraicos que se ponen en juego en la resolución de tareas matemáticas de educación primaria, y la asignación de niveles de algebrización a dicha actividad (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, en prensa).

Se utilizaron los siguientes instrumentos de recogida de datos:

- Respuestas de cada estudiante a las tareas propuestas
- Respuestas de cada equipo de trabajo a las tareas de análisis didáctico
- Grabación audio de todas las sesiones del curso
- Registro de observaciones no participantes de las distintas sesiones del curso.

En los siguientes apartados describimos la experiencia formativa distinguiendo las cuatro fases mencionadas: Estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación y fijando la mirada sucesivamente en las facetas epistémica (y ecológica), cognitiva y afectiva, interaccional y mediacional.

3. Estudio preliminar. Antecedentes

Diversos autores han reflexionado acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar (Kieran, 2007; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Kaput, 2008). Parece haber consenso en que un rasgo característico de la actividad algebraica son los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones donde se pasa de considerar casos particulares de conceptos, procedimientos etc., (objetos determinados) a clases o tipos de tales objetos. Según Kieran (1989, p, 165), “para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente”. Esa expresión es una condición previa para la *manipulación* de las representaciones simbólicas produciendo otras equivalentes más útiles para la resolución de los problemas.

Otra tendencia reciente propone separar el simbolismo del pensamiento algebraico. “Esta consideración separada es impulsada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de manipulación simbólica sin sentido, y (2) la tendencia en la escuela elemental de introducir el ‘álgebra temprana’ para focalizar la atención en la estructura más que en el cálculo” (Zazkis y Liljedahl, 2002, p. 398). En la perspectiva del álgebra temprana, el reconocimiento de lo general es condición previa de la expresión.

Otros autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros. "esto significa que, en álgebra, se calcula con cantidades indeterminadas (esto es, se suma, resta, divide, etc., incógnitas y parámetros como si se conocieran, como si fueran números específicos)” (Radford, 2010, p. 2).

Otro rasgo característico del álgebra es el estudio de las relaciones de equivalencia y sus propiedades, y el de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo, y las propiedades de las estructuras que se generan. En relación con el pensamiento relacional, la investigación sobre álgebra temprana se ha interesado por indagar la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual (Carpenter, Levi, Franke, y Zeringue, 2005; Stephens, 2006; Molina, 2009).

De las anteriores descripciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. Por ello Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (en prensa) proponen un modelo para caracterizar el RAE en el que distinguen cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica (ver las principales características de los niveles en la Tabla 1).

Tabla 1. *Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental (Godino et al., 2013)*

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos
2	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal
3	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto

Godino et al. sugieren que la distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental puede ser útil en la formación matemática de maestros de educación primaria. Proponen el estudio y discusión de algunos ejemplos para desarrollar en ellos un *sentido algebraico*, al permitirles reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales pueden intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Este sentido algebraico se puede entender como la capacidad de un sujeto para,

1) Usar sistemáticamente símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.

2) Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.

3) Reconocer patrones, regularidades y funciones.

4) Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta en la situación dada.

El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños mediante actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización, la modelización y cálculo analítico. Es claro que para que los niños vayan construyendo el sentido algebraico los maestros deben también tenerlo y saber cómo desarrollarlo en sus alumnos.

4. Diseño del proceso formativo

Durante el desarrollo del curso se planificaron siete seminarios de prácticas sobre diversos contenidos matemáticos y didácticos. En este apartado describimos las actividades planificadas específicamente para el desarrollo del RAE: Práctica 1 (Resolución de problemas, con dos partes A y B), Práctica 5 (Álgebra en educación primaria), y la tarea sobre RAE incluida en la evaluación final de la asignatura. En el diseño de estas tareas también se consideraron las categorías de conocimiento común, avanzado y especializado del contenido siguiendo el modelo de conocimiento didáctico-matemático de Godino (2009). Puesto que en el contenido oficial del curso no hay un tema sobre razonamiento algebraico se adaptó el temario, distribuido en los distintos núcleos temáticos (aritmética, geometría, medida, estadística y probabilidad), para destacar aspectos relevantes del razonamiento algebraico. De este modo, se podría considerar el RAE como un tema transversal respecto a los restantes bloques de contenido.

4.1. Práctica 1: Resolución de problemas

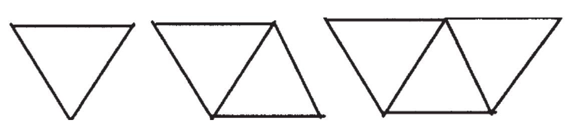
Con la práctica 1 se pretende evaluar los conocimientos iniciales de los participantes al resolver tareas que pueden ser abordada de manera algebraica. En la primera parte, A, se enfrentaba a los estudiantes a la resolución de cuatro tareas (Tabla 2). Las producciones escritas de esta primera parte se analizan para conocer los modos de resolución que emplean los estudiantes e identificar aquellos que evidencien elementos algebraicos, evaluando su conocimiento inicial.

Tabla 2. *Tareas incluidas en la parte A de la práctica 1*

Resuelve los siguientes problemas, explicitando y justificando todos los pasos:

1. Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón. María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón.
   a) ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo sabor?
   b) Si Juan quiere preparar una limonada con el mismo sabor que la anterior pero con 24 cucharadas de azúcar, ¿Cuántas cucharadas de limón debe poner?
   c) ¿Cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cuchadas de limón?

2. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?
3. a) ¿Cuántos palillos son necesarios para formar la 4ª figura? ¿Y para formar la figura que estuviera en la posición 20?
   b) ¿Cuántos palillos serían necesarios para construir la figura que estuviera en la posición 100?



1ª 2ª 3ª 4ª

4. Completa la siguiente multiplicación y determina los números faltantes Explica tu razonamiento

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 4 & 2 & 7 \\
 & & \times & \square & \square & \square \\
\hline
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & 1 & 2 & 8 & 1 & \\
+ & \square & \square & \square & & \\
\hline
 & 5 & 7 & 2 & 1 & 8
\end{array}
$$

En la parte B los estudiantes, trabajando en equipo, debían formular una solución consensuada para cada una de las cuatro tareas resueltas individualmente en la parte A y realizar un análisis de los objetos matemáticos puestos en juego en dicha resolución, cumplimentando la tabla 3.

Tabla 3. *Guía para la identificación de objetos y significados matemáticos*

Objetos matemáticos que se ponen en juego	**Significado** (Interpretación que se espera del estudiante)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas)	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición, más o menos formal)	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPOSICIONES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

En la Tabla 4 se resumen los conocimientos de razonamiento algebraico y del tipo de conocimiento evaluado en cada una de las tareas. La primera y las cuarta tarea son comunes en la escuela primaria (abordan conocimientos sobre proporcionalidad y multiplicación, respectivamente). La segunda es una actividad de los niveles posteriores, al plantear un problema verbal susceptible de ser resuelto algebraicamente. La tarea 3 es una actividad típica de las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento algebraico elemental a través del estudio de patrones y por tanto se debe enmarcar entre los conocimientos avanzados de los maestros en formación, al no incluirse esta temática en el currículo español.

Tabla 4. *Conocimientos implicados en las tareas de la práctica 1*

	Tarea	Ítem	Tipo de conocimiento	Conocimientos RAE implicados
Parte A	1. La limonada	a) b) c)	Común Común Avanzado	Pretende que el estudiante generalice y asocie el concepto de proporcionalidad con la formulación de una función lineal. Se trata de la modelización de una situación de un problema aritmético que es posible algebrizar introduciendo una variable y reconociendo cantidades desconocidas.
	2. El gasto diario	a)	Avanzado	Pretende que el estudiante modelice el problema verbal utilizando un lenguaje alfanumérico. Su resolución conlleva el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$
	3. Los palillos	a) b)	Avanzado	Pretende que el estudiante realice un proceso de generalización para encontrar el número de palillos que forman la figura de la posición 100. Se potencia la noción de función y variable.
	4. Multiplicaciones incompletas	a)	Común	El estudiante precisa relacionar aspectos del funcionamiento y la estructura del algoritmo de la multiplicación de números naturales; también implica la idea de relación

Parte B	Reconocimiento de objetos y significados	Especializado	Identificación de objetos matemáticos implicados en las tareas y en sus soluciones.

4.2. Práctica 5: Álgebra en educación primaria

Con la práctica 5 (Tabla 5), se pretende desarrollar las competencias de análisis didáctico para discriminar niveles de algebrización en la resolución de tareas matemáticas. Tuvo los siguientes objetivos:

1) Conocer las características del razonamiento algebraico elemental y orientaciones sobre su inclusión en el currículo de educación primaria
2) Analizar actividades matemáticas escolares, reconociendo distintos niveles de razonamiento algebraico
3) Elaborar tareas matemáticas escolares para desarrollar el razonamiento algebraico en alumnos de educación primaria.

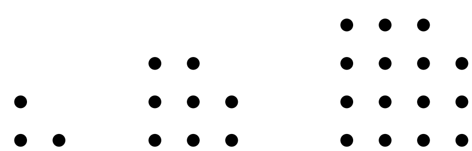
Las actividades propuestas para realizar en equipo, fueron las siguientes:

a) Lectura y discusión del artículo, de Aké, Godino y Gonzato (2013).

Para cada una de las tareas mostradas en la Tabla 5, tomadas de libros de texto de primaria:

b) Hallar posibles soluciones.
c) Indicar los “objetos algebraicos” que intervienen y el nivel de algebrización que se pone en juego en la resolución.
d) Cambiar las variables de la tarea para aumentar (respectivamente, disminuir) el nivel de algebrización en la tarea modificada.

Tabla 5. *Enunciados de tareas escolares*

Enunciado 1.	Determina el número que falta en cada uno de los siguientes casos: 1) $52 \times 11 = 52 \times 10 + \Delta$ 2) $\blacksquare + \blacksquare + 18 = \blacksquare + 53$
Enunciado 2.	¿Qué valores diferentes puede tomar Δ para que la siguiente expresión sea verdadera: $\blacksquare + \Delta < 20$?
Enunciado 3.	Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?
Enunciado 4.	Si 2 sándwiches cuesta 6€, ¿cómo puedes calcular el coste de 50 sándwiches?
Enunciado 5.	Observa las siguientes figuras:  ¿Cuántos puntos tiene la figura 15?

En la Tabla 6 se muestran los conocimientos que se ponen en juego en cada tarea. Los tipos de conocimiento del profesor se identifican con base a los documentos curriculares, al igual que en la práctica 1. La tarea 1, enmarcada en el pensamiento relacional y la tarea 2 sobre desigualdades utilizando símbolos son actividades no contempladas explícitamente en el currículo español. Sin embargo, decidimos considerarlas como parte del conocimiento común, por su naturaleza elemental y teniendo en cuenta otras propuestas curriculares que la introducen en los grados elementales.

Tabla 6. *Conocimientos implicados para cada una de las tareas de la práctica 5*

Tarea	Ítems para todas las tareas	Tipo de conocimiento	Conocimientos sobre el RAE implicados
1. Igualdad con datos desconocidos	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento común	De acuerdo al pensamiento relacional, esta tarea pretende promover el significado del signo igual como equivalencia.
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas	Conocimiento especializado	
2. La desigualdad con datos desconocidos	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento común	Pretende promover la noción de variable y de inecuación a través del uso de símbolos en lugar de literales.
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas	Conocimiento especializado	
3. Los medios de locomoción	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento común	Pretende que el estudiante represente el problema verbal utilizando un lenguaje alfanumérico. Conlleva el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax + B = C$
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer de tareas	Conocimiento especializado	
4. El precio de los sándwiches	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento común	Pretende que el estudiante generalice y asocie el concepto de proporcionalidad con la formulación de una función lineal.
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas	Conocimiento especializado	
5. Secuencia de figuras	a) Resolver la tarea (primer aspecto del ítem a)	Conocimiento avanzado	Pretende promover el análisis de dos cantidades que varían simultáneamente (número de la posición, número de bolitas) e incitar a la formulación de una regla general que describa tal variación
	a) Resolver de varias formas (segundo aspecto del ítem a) b) Identificar objetos y niveles c) Proponer tareas	Conocimiento especializado	

4.3. Tarea diseñada como prueba final

En el examen final de la asignatura se incluyó la siguiente tarea relacionada con los conocimientos desarrollados en el curso:

Observa la siguiente figura, y contesta:

⊙ ⊙⊙ ⊙⊙
⊙⊙⊙

a) ¿Cuántas bolitas tendrán las figuras de la cuarta y quinta posición?
b) ¿Cuántas bolitas hay en la posición 100?
c) ¿Qué objetos algebraicos intervienen en la resolución?
d) ¿Qué nivel de algebrización le asignarías?
e) Indica algunas variables que se puedan cambiar en esta tarea para aumentar el nivel de algebrización?

Por limitaciones de espacio no se analizan las soluciones previstas para las distintas actividades, ni se formulan hipótesis sobre conflictos potenciales en dichas resoluciones; estos análisis forman parte de la metodología de la ingeniería didáctica, los cuales son realizados en el marco del EOS aplicando la noción de configuración de objetos y procesos. Podemos anticipar, no obstante, que el reconocimiento de objetos matemáticos, y en particular algebraicos, será un desafío para los estudiantes, pues no están familiarizados con una reflexión epistémica de este tipo.

5. Descripción y análisis de la implementación

En este apartado describimos la implementación del diseño instruccional, fijando la atención en los contenidos algebraicos efectivamente introducidos. Dado que los estudiantes no tenían formación anterior sobre las características del RAE, la práctica 1 fue una evaluación inicial realizada por tres grupos de clase (184 estudiantes); la práctica 5, específica sobre RAE fue realizada solo en un grupo. Asimismo, hemos observado la introducción de nociones algebraicas en las sesiones teóricas impartidas (27 sesiones en las que se realiza observación no participante).

Centramos la atención en el modo en que los estudiantes resuelven las tareas planteadas a lo largo del proceso de instrucción (trayectoria cognitiva). Para analizar las respuestas utilizamos variables cuantitativas (grado de corrección de las respuestas) y cualitativas (tipos de respuestas). El segundo foco de análisis fue el desarrollo de las clases impartidas usando la noción de configuración didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), las cuales se conforman teniendo en cuenta la manifestación de características del RAE.

5.1. Resumen de la trayectoria epistémica implementada

Los contenidos de las práctica 1 (resolución de problemas) y 5 (álgebra en educación primaria) se desarrollaron según lo planificado. Tras cada práctica y después que los estudiantes entregaran sus informes escritos, el profesor organizó una discusión colectiva de las soluciones dadas, para sistematizar los conocimientos algebraicos pretendidos. Los contenidos, efectivamente implementados, son sintetizados en la tabla 7, que resume la trayectoria epistémica implementada (secuenciación del contenido); en las 27 sesiones observadas, se distinguen 16 configuraciones didácticas que pusieron en juego objetos y procesos de índole algebraica.

Tabla 7. *Resumen de la trayectoria epistémica implementada*

Configuración didáctica	Prácticas/Tareas	Objetos Algebraicos	Procesos
1. Resolución de la primera práctica.	Tarea 1. La limonada Tarea 2. El gasto diario	Incógnita, Sistema de ecuaciones	Representación simbólica

Parte A		Función	Modelización Generalización
2. Resolución de la primera práctica. Parte A	Tarea 3. Los palillos Tarea 4. La multiplicación incompleta	Variable, incógnita Patrón	Representación simbólica Modelización Generalización
3. La generalización y el lenguaje como características del álgebra.	Se plantea un problema: *Ocho estudiantes pesan un objeto, obteniendo los siguientes valores: 6,2; 6,6; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál es la mejor estimación del peso del objeto?* Se reflexiona sobre: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$	Notación simbólica Objetos intensivos (genéricos)	Representación simbólica Generalización
4. Resolución de la práctica 1. Parte B	Análisis de las resoluciones de la práctica 1. Distinción de lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos distinguiendo los de índole algebraica.	Incógnita, Sistema de ecuaciones Variable, incógnita Patrón, función	Representación simbólica Modelización Generalización
5. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problema 1.	Se destaca el apartado c de la tarea 1: *¿Cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cuchadas de limón?* Se reflexiona sobre: La generalización Actividades más o menos algebrizadas Uso y no uso de notación simbólica	La literal x para designar un valor desconocido Objetos intensivos La función lineal Variable dependiente Variable independiente	Representación simbólica Modelización Generalización
6. Reflexión discusión y análisis de un problema:	*El problema de los patos: en un estanque había 56 patos. Primero se echaron a volar 12 patos, después 15 y finalmente 4. ¿Cuántos patos quedaron en el estanque? ¿Cuántos se echaron a volar en total?* A través del problema se reflexiona sobre los diversos lenguajes (natural, numérico, simbólico-literal, gestual)	Notación simbólica	Representación simbólica Modelización
7. Reflexión, discusión y análisis de problemas:	Se discute el siguiente problema: *El problema de los patrones: Al disponer puntos en el plano en forma cuadrangular y contar el número total de éstos en cada uno de los cuadrados, obtenemos los llamados "números cuadrados: 1, 4, 9, 16, ...* ■ ■⊛ ■■⊛ ■■■⊛ ⊛⊛ ■■⊛ ■■■⊛ ⊛⊛⊛ ■■■⊛ ⊛⊛⊛⊛ Se plantea otro problema: *¿Podrías escribir los primeros 10 números cuadrados?* *Llamaremos C_n al número cuadrado cuya base*	Patrón razonamiento inductivo objetos intensivos	Representación simbólica Modelización Generalización

	está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n?		
8. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problema 2.	Se reflexiona sobre Los diferentes usos del lenguaje Las actividades algebrizadas	Incógnita Ecuación	Representación simbólica Modelización Generalización
9. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 1: problemas 3 y 4	Se destaca: La formulación de una regla El uso de propiedades algebraicas	Variable Incógnita Función	Representación simbólica Modelización Generalización
10. Reflexión sobre los objetos y procesos algebraicos	Objetos y procesos algebraicos como pautas de análisis para las tareas y actividades.	Objetos intensivos	Representación simbólica Modelización Generalización
11. Reflexión sobre el álgebra	¿Qué es el álgebra? ¿Qué es la generalización?	Objetos intensivos	Representación simbólica Generalización
12. Explicación teórica sobre el sentido algebraico	Características del sentido algebraico Niveles de algebrización Guía de lectura para el estudiante	Niveles de algebrización y actividad protoalgebraica Propiedades de las estructuras Relaciones y funciones	Representación simbólica Modelización Cálculo literal Generalización
13. Resolución de la quinta práctica.	Enunciado 1. Igualdades con datos desconocidos Enunciado 2. Desigualdad con datos desconocidos Enunciado 3. Los medios de locomoción Enunciado 4. Los sándwiches Enunciado 5. Secuencia de figuras.	Notación simbólica Equivalencia y desigualdad de expresiones Incógnita Variable Función	Representación simbólica Modelización Cálculo literal Generalización
14. Reflexión, discusión y análisis (de objetos y significados) de la práctica 5	Los diferentes usos del lenguaje Las actividades algebrizadas	Equivalencia Desigualdad Incógnita Variable	Representación simbólica Modelización Cálculo literal Generalización
15. Análisis de un episodio de clase	Reflexión sobre un episodio de clase *Se supone que M es un número natural de tres cifras y que S es otro número natural de dos cifras. ¿Qué valores pueden tomar M y S si se cumple la relación M – S = 3?* *Se supone que M es un número natural de tres cifras, que S es un número natural de dos cifras y que D es un número natural de una cifra. ¿Qué valores pueden tomar M, S y D si se cumple la relación M – S = D?*	Notación simbólica Objetos intensivos Variables Función	Representación simbólica Generalización

	¿Qué números reales, x, y, z, cumplen la relación x – y =z? *¿Qué números hay que escribir en las celdas si se desea continuar con el mismo patrón?* Finalmente se analiza: *¿Qué números se pueden poner en los espacios en blanco para que la diferencia sea 3? ¿Cuántas soluciones hay?* $\square\square\square - \square\square = 3$		
16. Resolución de una tarea evaluativa	Resolución de un problema en la evaluación final Análisis de un patrón ⊙ ⊙ ⊙⊙ ⊙ ⊙⊙ ⊙⊙⊙	Notación simbólica Variable Función	Representación simbólica Modelización Cálculo literal Generalización

5.2. Explicaciones del profesor sobre RAE en una clase teórica

A continuación incluimos el detalle del diálogo entre el profesor y los estudiantes que tuvo lugar en la configuración 14 (presentación y discusión de las soluciones de la práctica 5) por ser indicativo del tipo de contenido epistémico sobre RAE puesto en juego en las sesiones de clase impartidas en gran grupo.

Profesor: Vamos a centrarnos en el primer enunciado. ¿Cómo lo habéis interpretado? ¿Qué habéis hecho? El enunciado dice: Determina el número que falta para cada uno de los siguientes casos. Las consignas son proporcionar soluciones posibles, determinar qué objetos algebraicos se ponen en juego y qué nivel podemos asignar.

Observador: El profesor elije a un estudiante para que escriba su solución en la pizarra. El estudiante escribe:

$$52 \times (10 + 1) = 52 \times 10 + \Delta$$
$$(52 \times 10) + (52 \times 1) = 52 \times 10 + \Delta$$
$$(52 \times 1) = \Delta$$
$$\Delta = 52$$

Profesor: Bueno, cuéntanos, ¿cómo has realizado este primer método?

Estudiante 1: Si, hemos descompuesto 52×11, que sería $52 \times (10 + 1)$

Profesor: Bueno, has aplicado una propiedad, ¿cómo se llama esa propiedad?

Estudiante 1: Asociativa.

Profesor: No. ¿Cómo se llama esa propiedad?

Observador: El profesor pregunta a la clase; los estudiantes contestan: distributiva.

Profesor: Bien, es la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Ahora, ¿qué más has hecho?

Estudiante 1: Lo que hemos hecho es agrupar la misma estructura y lo que está sumando, pasaría restando.

Profesor: Entonces, reconoces que en los dos miembros hay un mismo número 52×10, luego dices que lo que está aquí lo puedo pasar restando cambiando el signo; bueno, esto es una propiedad algebraica. En realidad, esa idea de lo que está en un miembro lo paso al otro lado cambiándolo de signo, significa, "resto a los dos miembros de la igualdad el mismo número 52×10 y a continuación se suprime en los dos miembros", eso es cancelar en ambos miembros de la ecuación lo mismo. Se trata de una propiedad algebraica. Entonces, ¿en esa solución hay algo de álgebra o es pura aritmética?, ¿qué habéis pensado?

Estudiante: Si hay.

Profesor: Ponme el otro método.

Observador: El alumno escribe en la pizarra:

$$52 \times 11 = 572$$
$$52 \times 10 = 520$$
$$572 - 520 = 52$$
$$\Delta = 52$$

Profesor: Bien, que tipo de objetos algebraicos habéis identificado en un caso y en otro. ¿Hay algo de álgebra en ese primer método? ¿Qué habéis dicho?

Estudiante 1: Nosotros hemos puesto que sería la simbología.

Profesor: Claro, hay un símbolo para expresar un número desconocido. A ver, cuando tu descompones 11= 10+ 1 ¿qué pasa?, ¿qué hay?

Estudiante 1: ¿Es una propiedad?

Profesor: En realidad la descomposición del 11 en 10 + 1 es pura aritmética. Ahora, sin embargo, cuando tú ya aplicas la propiedad distributiva, es una propiedad de la operación que usualmente se considera algebraica. Ahora, cuando pasas ese término al otro miembro, estás aplicando también una propiedad, al restar una igualdad, es decir, estás entendiendo la igualdad como una equivalencia de expresiones, esta expresión es equivalente a ésta (señala la pizarra). Entonces, si yo le quito a una expresión, en ambos miembros, el mismo término, esto sería otra propiedad de tipo algebraica. ¿De acuerdo? Entonces, ¿qué nivel asignamos?

Estudiante 1: Hemos asignado un nivel incipiente.

Profesor: Si, un nivel incipiente, un nivel 1, porque hay algo de pensamiento algebraico. En el otro caso, ¿qué pasa?

Estudiante 1: Este caso es mucho más simple, no se utiliza ninguna propiedad.

Profesor: En la segunda solución es solo números particulares, operaciones de sumar, multiplicar, entonces no hay objetos algebraicos, por lo cual diríamos que ahí no hay álgebra, ¿están conformes? ¿Habéis coincidido? Fijaros que la idea de asignar un nivel nos ayuda a pensar en indicios de algebra, pero no es algo rígido, es decir, los niveles no son como escalones discretos. Quizás la idea de asignar números es un poco rígida: 0, 1, 2, 3, mejor un nivel incipiente, consolidado, intermedio, pues da un poco la idea de graduación y deja de lado lo rígido. Y del segundo, ¿que habéis hecho? A ver otra compañera de tu equipo que salga y nos lo explique. Cómo lo habéis pensado. Escribe lo que habéis hecho.

Observador: El estudiante escribe lo siguiente:

$$x + x + 18 = x + 53$$
$$2x + 18 = x + 53$$
$$x = 53 - 18$$
$$x = 35$$

Profesor: Fijaros que el cuadradito y la x podría ser lo mismo, solo que están más acostumbrados, estamos más cómodos cuando ponemos letras. Bueno, esa solución está como muy algebrizada, ¿verdad? […] Escribid su segunda solución:

Observador: El estudiante escribe,

$$\blacksquare + \blacksquare - \blacksquare = 53 - 18$$
$$\blacksquare = 35$$

Profesor: ¿Hay alguna diferencia entre los dos métodos? A ver, en esas dos soluciones, ¿qué tipo de objetos habéis reconocido en cada una? ¿Hay alguna diferencia entre los dos métodos en cuanto a los tipos de objetos que aparecen?

Estudiante 2: Los objetos son la simbología e igualar el primer miembro con el segundo.

Profesor: Es el mismo trabajo, ¿no? Entonces, ¿qué nivel le asignamos a esto? Nivel 1, ¿no? Es decir, fijaros que en este primer caso estamos operando con la incógnita de cierta manera, aquí tenemos una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$, entonces si veis en los criterios que hemos dado, cuando tienes una ecuación como $Ax + B = Cx + D$ para encontrar el valor de x tienes que operar con la incógnita; entonces, eso ya supone un nivel de algebrización bastante alto, consolidado, por lo que aquí asignaríamos un valor 3. Y el otro método es prácticamente lo mismo.

Profesor: Pasemos al segundo ejercicio. Necesito un voluntario que quiera salir a explicar su solución. A ver ustedes, ¿han trabajado el ejercicio segundo? ¿Podéis ponerlo en la pizarra?

Observador: El alumno escribe:

$$\blacksquare + 18 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 18$$

$$\blacksquare + 17 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 17$$
$$\blacksquare + 16 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 16$$
$$\dots$$
$$\blacksquare + 1 < 20 \quad \blacksquare < 20 - 1$$

Profesor: Tú dices, a Delta le voy a dar los valores de 18, 17, 16,.. etc. y ahora ¿cuánto vale el cuadrado en cada caso? En el primero, entonces debe ser menor que 2, es decir que cuadradito puede ser o cero o uno. ¿Habéis previsto otra solución diferente?

Estudiante 2: No

Observador: El profesor designa a un integrante de otro equipo. Éste escribe en la pizarra:

$$\blacksquare = 3; \blacksquare = 9$$
$$x + 3 < 20\ ; \quad x < 17$$
$$x + 9 < 20\ ; \quad x < 11$$

Profesor: A ver, ¿habéis identificado aquí algún tipo de objetos algebraico, que pueda indicar que aquí hay algo de álgebra o no? Se tiene una inecuación con 2 datos desconocidos. Entonces, ¿cómo se está resolviendo?, tú le das valores y a continuación ¿qué has hecho para encontrar el valor de la otra?

Estudiante 3: Despejar

Profesor: A ver, si se le dan valores particulares y si están haciendo operaciones aritméticas. Aunque en realidad la sola presencia de símbolos para indicar un número desconocido, si se da valores a esos símbolos, sencillamente haciendo operaciones aritméticas sin aplicar propiedades algebraicas quedaría en un nivel cero, es puramente aritmético. Aquí ya hay una cierta diferencia, no porque hayáis puesto una literal en lugar de cuadradito, una x, no. Aunque, también es verdad que le das un valor particular, pero empiezas a dar una solución general, x es menor que 17, das un intervalo, un conjunto de valores Entonces aquí hay un poquito de más algebra que allá, con lo cual en este caso podemos decir que hay un nivel 1 de algebrización. ¿Qué opináis? ¿Bien? Lo dejamos así. Vamos a pasar al siguiente ejemplo. Un equipo que quiera salir a exponer el enunciado 3. A ver, usted. Explícanos, ¿qué has hecho?, ¿has dado más de una solución?

Observador: El estudiante coloca una de sus soluciones:

Total=212 alumnos

1 coche; 3 andando

25% coche; 75% andando

25% de 212= 53 alumnos en coche

75% de 212= 159 alumnos andando

Profesor: En esta actividad matemática, ¿hay algo de algebra ahí?

Estudiante 4: No. Nivel cero.

Profesor: Bien, ¿qué otra solución habéis previsto?

Observador: El estudiante escribe:

$x =$ Alumnos en coche

$y =$ Alumnos andando

$x + y = 212$

$y = 3x$

$x + y = 212; 4x = 212$

$x = \frac{212}{4}; x = 53$

$y = 3(53)$

$y = 159$

Profesor: Bueno, ¿qué objetos algebraicos habéis previsto aquí y qué nivel le asignaríamos?

Estudiante 4: Hay incógnitas

Profesor: En tu caso hay dos incógnitas y ahí en realidad hay un sistema de ecuaciones. ¿De qué tipo de ecuación se trata?; mira que es de la forma $Ax + B\ = C$. A ver, ¿qué nivel de algebrización tiene este? Evidentemente está muy algebrizado.

Estudiante 4: Tiene un nivel 3.

Profesor: Bueno, yo también le asignaría un nivel 3, con base en que planteas un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y empiezas a manipularlas. A ver, si un alumno se salta este paso, porque en realidad el sistema de ecuaciones no habría porqué plantearlo, se puede iniciar con una sola ecuación, se puede decir, bueno x es el número de los que van en coche más los que van andando que es, $x + 3x$ = 212. Evidentemente uno puede pensar así, por lo que de acuerdo con los criterios que hemos dado, uno no opera con la incógnita, porque no se encuentra en ambos miembros de la igualdad. No es lo mismo una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$ en donde movilizo la igualdad como equivalencia, en el sentido de que se tiene que despejar la x. A este tipo de ecuaciones en las que las x están en los dos miembros y tengo que operar con ella y pasar de un miembro a otro, es el que le hemos asignado el nivel 3. De modo que si un alumno plantea directamente la ecuación $x + 3x = 212$ pues responde al criterio del nivel 2. Como tú planteas dos incógnitas, me hace pensar en un nivel más elevado, un nivel 3, esto indica que asignar niveles no es una cuestión rígida. Todo depende de la actividad matemática del alumno.

Pasemos al siguiente problema. A ver, un integrante de su equipo pase a poner sus soluciones.

> *Observador*: El estudiante escribe en la pizarra todas las soluciones.

A

6/2=3

$50 \times 3 = 150$

B)

2 → 6

50 → x

$$50 \times 6 = \frac{300}{2} = 150$$

C)

n	$y = n \times 3$
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

$y = 50 \times 3 = 150$

Profesor: Vamos a comentar las soluciones. En la primera, ¿hay algo de álgebra? Nada, nivel cero. En la segunda solución. Veamos, ¿qué hay ahí de algebra?, poca cosa. Has puesto una x, pero esa x no tiene ninguna funcionalidad; en ese procedimiento aplicas una rutina. Esto indica que la presencia de un símbolo, por sí solo no implica álgebra; tiene que haber propiedades. A ver, la siguiente solución para este enunciado

Estudiante 5: Hemos hecho una tabla de valores, es como una función.

Profesor: Vale, tú has encontrado una regla y a continuación la aplicas. Ahora bien, en esta solución ¿qué álgebra hay? ¿Qué objetos algebraicos hay?

Estudiante 5: Hemos puesto que es de nivel 2 porque obtuvimos una regla general y la aplicamos.

Profesor: Al poner una tabla con una variable independiente (número de sándwich n), esta n es una variable. Aquí hay otra variable que es una variable dependiente. Aparece la idea de función y la habéis expresado en símbolos: $y = n \times 3$, por lo que su asignación de nivel está bien, hay una función, una relación de correspondencia, aunque claro, el problema no te exige operar para obtener una expresión canónica, por lo cual, en efecto, es de un nivel 2.

Vamos a pasar entonces al ejercicio 5. Otro voluntario.

> *Observador*: Otro equipo explica sus soluciones, una de ellas utiliza relaciones entre las figuras dadas llegando a una expresión como: $(n + 1)^2 - 1$; otra fue ir añadiendo bolitas para formar las figuras hasta la posición 15.

Profesor: Bueno, plantean dos soluciones. En la primera han añadidos los puntitos, han dibujado las figuras; la tercera figura tiene cuatro en la base y la altura menos una en la esquina. ¿Hay algún tipo de álgebra? ¿Qué álgebra hay y qué nivel le asignarías?

Estudiante 6: Pertenece a un nivel 2.

Profesor: De acuerdo, hay que encontrar una regla general para cualquier n, pero no se trabaja con esa fórmula, no se simplifica para obtener una expresión canónica, por lo tanto es de nivel 2.

5.3. Síntesis de la trayectoria cognitiva

Seguidamente describimos de manera global la progresión del aprendizaje de los estudiantes como resultado de las actividades prácticas realizadas y el desempeño mostrado en la prueba final.

La resolución de los cuatro problemas incluidos en la parte A de la práctica 1, resultó accesible, pues se obtuvo una puntuación media de 4,6 (d. típica 1,72) de un máximo posible de 7 puntos. El índice de dificultad más elevado (0,335) se obtuvo en el apartado c) de la tarea 1, que pide formular una regla general. En las cuatro tareas, la mayoría de estudiantes puso en juego un nivel 0 de algebrización, indicando su predisposición inicial a resolver los problemas mediante herramientas aritméticas.

Las actividades de reconocimiento de objetos y significados (parte B, práctica 1) fueron realizadas en grupo (15 protocolos de respuesta). Como primer paso, cada equipo debía consensuar una solución correcta para cada problema. Como era previsible, la identificación de los objetos matemáticos y sus significados en las resoluciones, resultó compleja, ya que se refieren superficialmente a las soluciones propuestas y raramente manifiestan las propiedades intrínsecas de las mismas. El reconocimiento de objetos algebraicos también resultó escaso, y la asignación de significados a los objetos matemáticos fue con frecuencia no pertinente u omitida.

La práctica 5 (Álgebra en educación primaria) se realizó también en forma grupal (15 protocolos de respuesta). El número total de ítems evaluables en la práctica es de 30, siendo la puntuación media 12, el máximo de 17, el mínimo de 8 y la desviación típica de 2,8, lo que indica un desempeño relativamente bajo.

La identificación de objetos algebraicos para la tarea 1 (resolver dos expresiones) resultó difícil para los estudiantes, al igual que la tarea 2 (resolver una desigualdad) y la tarea 4 (proporcionalidad). Los estudiantes no reconocen objetos algebraicos que se correspondan con su solución planteada. Similarmente sucede para la tarea 3, un problema verbal y la 5, análisis de un patrón. Por otro lado, no se supera el 50% de asignación correcta la asignación de niveles de algebrización a las soluciones (exceptuando la tarea 5, con 53%), pues para los maestros en formación fue un reto asignar estos niveles de forma justificada y correcta.

Las evaluaciones formativas se basaron en los informes escritos de los equipos realizados a lo largo de una semana, los cuales fueron base para la discusión colectiva de la práctica correspondiente. Era de esperar, por tanto, una evolución positiva en los conocimientos pretendidos tras la discusión y explicaciones complementarias del profesor (véase la configuración nº 14, sección 5.2). Al analizar las 52 respuestas a la pregunta incluida en el examen final, se obtuvo un valor medio 1,8 (d. típica=0,85) de un máximo alcanzable de 5 puntos (1 por cada ítem correcto), lo que indica un número bajo de ítems resueltos por los estudiantes, siendo particularmente difíciles los ítems b) y d) (11,5 y 17,3 % de respuestas correctas).

6. Análisis retrospectivo

En este apartado hacemos un análisis retrospectivo de la idoneidad didáctica de la experiencia formativa, con la finalidad de identificar mejoras potenciales de la misma. Usaremos como guía para la reflexión el sistema de indicadores de idoneidad descrito en Godino (2011) para las facetas epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva. Finamente reflexionamos sobre la trama de normas (Godino, Font, Wilhelmi y, De Castro, 2009) que han condicionado tanto el diseño como la implementación.

6.1. Idoneidad epistémica

La idoneidad epistémica o matemática de un proceso de estudio se entiende como el grado en que los significados implementados (o pretendidos) representan a los significados de referencia del objeto o contenido pretendido. En nuestro caso se ha presentado en la sección 3 la conceptualización para este estudio del RAE y sus elementos característicos según distintos niveles de algebrización, la cual constituye el significado de referencia del objeto.

En la planificación del proceso formativo se incluyeron la Práctica 1 como primer encuentro con el análisis de objetos y significados en la resolución de problemas matemáticos escolares y la Práctica 5 en la que específicamente se proponen actividades de reconocimiento de niveles de algebrización. El documento de estudio previo (Aké, Godino y Gonzato, 2013), que presenta a los estudiantes una síntesis del significado de referencia del RAE, y la descripción de los niveles de algebrización y rasgos del RAE, fue complementado con explicaciones del profesor en las sesiones de clase teóricas. En las tareas incluidas en las prácticas 1 y 5 se incluyen situaciones que involucran pensamiento relacional, reconocimiento de patrones, procesos de modelización, generalización y representación. Como conclusión podemos considerar una alta idoneidad epistémica del proceso formativo, tanto en la fase de diseño como de implementación.

6.2. Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica es el grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares.

El RAE no se contempla de manera explícita en la formación de maestros de educación primaria en España, aunque existen múltiples investigaciones que concluyen en la necesidad de introducir formas de pensamiento algebraico en la escuela elemental, y así se contempla en documentos curriculares como el NCTM (2000). En consecuencia, se debe capacitar a los futuros maestros para promover progresivamente el pensamiento algebraico en los niños. Nuestra experiencia supone, por tanto, una apertura a la innovación didáctica, adaptación socio-profesional y al establecimiento de conexiones entre distintos contenidos matemáticos, dado el carácter transversal del razonamiento algebraico. En cuanto a las nuevas tecnologías constatamos el uso de proyección de diapositivas en las sesiones de clase y de una sesión video-grabada de una clase con niños de primaria resolviendo una actividad algebraica (configuración didáctica 15). Fue relevante en nuestra innovación la inclusión del RAE en el programa teórico-práctico de un curso sobre Enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación primaria, en coordinación con los sentidos numérico, métrico, geométrico y estocástico. Podemos concluir, por tanto, que la idoneidad ecológica del proceso formativo es alta.

6.3. Idoneidad interaccional

La idoneidad interaccional es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

Las formas de interacción profesor - estudiantes, y de los estudiantes entre sí, estuvieron condicionadas por las fijadas en la Guía docente del curso: 1) Una sesión semanal presencial teórica de 2 horas, en gran grupo (50 -60 estudiantes), donde se privilegia la clase magistral; 2) Seminarios presenciales de trabajos prácticos (1 hora a la semana), con grupos medianos (18 a 20 estudiantes), trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes; 3) Tutoría flexible presencial, individual o en equipos, durante la semana; 4) Tutoría virtual, individual, en horario libre.

De hecho, los momentos de tutoría individual o grupal fueron muy escasos, por lo que fue difícil para el profesor reconocer los conflictos de aprendizaje de los estudiantes. En las sesiones teóricas y prácticas el tamaño del grupo era grande, lo que dificultó la interacción profesor - estudiantes y la solución de los conflictos. Sin embargo, el trabajo en equipos de 3 o 4 estudiantes en las prácticas facilitó el diálogo y comunicación entre estudiantes, al tiempo que les concedió un cierto grado de autonomía y responsabilidad. No obstante, el diseño de las prácticas era relativamente cerrado; se pedía responder a un conjunto de cuestiones previamente elegidas por el profesor. El informe escrito realizado por los equipos durante la semana, fue la base para una evaluación formativa grupal a lo largo del curso y la toma de decisiones en los momentos de institucionalización. Considerando estos indicadores, la idoneidad interaccional implementada fue media; en próximas implementaciones sería necesario facilitar y fomentar las tutorías individuales y grupales de modo que no interfieran con otras actividades requeridas a los estudiantes en las distintas materias.

6.4. Idoneidad mediacional

La idoneidad mediacional se entiende como grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La naturaleza del contenido objeto del proceso de estudio hace innecesario el uso de recursos tecnológicos que ayuden a representar los conocimientos; no obstante, el profesor hizo uso de representaciones esquemáticas y medios de proyección visual, por lo que este componente de la idoneidad mediacional fue adecuado.

El número de estudiantes inscritos en el curso, 58, aunque no excesivamente alto, dificulta la atención personalizada de los estudiantes. El profesor llevaba un registro personal de cada estudiante, aunque, aparte de la asistencia a los seminarios de prácticas que era individualizado, los datos recogidos se referían al trabajo realizado por cada equipo. Dado que el proceso de estudio tiene lugar en diversos momentos y espacios sería necesario un registro más pormenorizado de cada estudiante, para poder explicar la variabilidad de los aprendizajes logrados, que no depende exclusivamente del componente epistémico y docente.

6.5. Idoneidad cognitiva

La idoneidad cognitiva se entiende como grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los estudiantes, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, al tiempo que suponen un reto asumible por los mismos.

Podemos afirmar que los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para iniciar el tema, ya que se esperaban las carencias de conocimientos común y avanzado sobre razonamiento algebraico elemental, detectadas en la primera fase de la práctica 1 como una etapa del proceso formativo. La primera consigna que se propone a los estudiantes (“resuelve la tarea”), va seguida de una reflexión de índole epistémica sobre los objetos matemáticos puestos en juego en dicha actividad, que es nueva para los futuros maestros, y no es trivial, pues es el principal objetivo del proceso formativo.

El análisis de la idoneidad cognitiva debemos centrarlo, por tanto, en comprobar el grado de logro de los aprendizajes pretendidos. En este sentido teniendo en cuenta los resultados de la evaluación final, y de los informes colectivos de la práctica 5, donde un alto porcentaje de estudiantes tuvo importantes dificultades para discriminar los objetos algebraicos y asignar niveles de algebrización a la resolución de las tareas matemáticas propuesta, concluimos que la idoneidad cognitiva fue baja. Conviene reconocer, no obstante, que el instrumento de evaluación final usado (una sola tarea) deberá ser mejorado mediante instrumentos específicos y entrevistas individualizadas.

6.6. Idoneidad afectiva

La idoneidad afectiva mide el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. En nuestro caso se supone que los estudiantes tienen una motivación intrínseca, por su decisión personal de prepararse para ejercer la docencia. Además, el diseño del curso contempló la resolución de tareas matemáticas de educación primaria, relacionadas con la profesión de maestro y se trató de motivar la reflexión sobre el razonamiento algebraico por su relación con los procesos de generalización y de expresión en el trabajo matemático.

La organización de equipos de trabajo atribuye responsabilidad y autonomía a los propios estudiantes, creando situaciones para la argumentación en condiciones de igualdad, aunque esta faceta no recibió una atención suficiente en el diseño o la implementación. En particular se debería organizar un sistema de recogida de información sobre los distintos aspectos de la dimensión afectiva que permita conocer la de los estudiantes, en especial los que muestran un perfil cognitivo más bajo.

6.7. Dimensión normativa. Condicionamientos del proceso de estudio

Las diferentes facetas de la dimensión normativa que proponen Godino et al (2009) - epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica - permiten:

1. Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas que condicionan la enseñanza y aprendizaje.
2. Sugerir posibles cambios en las normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con vistas a una evolución positiva de los significados personales.

La principal norma que ha condicionado la acción formativa está relacionada con la faceta mediacional (tiempo asignado y número de estudiantes implicados). El número de créditos establecido en el plan de estudios; la organización docente y la Guía docente aprobada por el Departamento son de obligado cumplimiento. La asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria" debe desarrollar los conocimientos didáctico - matemáticos de los diversos bloques de contenido de educación primaria, no solo del sentido algebraico. En realidad, la introducción del sentido algebraico supone una ruptura de las normas epistémicas establecidas en la Guía docente. Esta innovación está motivada por una norma propia de la Didáctica de la matemática que progresivamente va adquiriendo mayor consistencia: es necesario contemplar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de educación primaria, y en consecuencia los profesores de primaria deben ser capacitados para promoverlo.

Otra norma que afecta al trabajo de los estudiantes, es que deben estudiar simultáneamente otras materias, cada una de las cuáles exige una dedicación que no siempre es equilibrada y coordinada. Por ejemplo, se tiene constancia de que en algunas ocasiones algunos estudiantes no asistieron a las clases presenciales porque debían asistir a sesiones de tutorías de otros profesores, o preparar evaluaciones de otras materias.

7. Síntesis de resultados e implicaciones

El análisis retrospectivo de la experiencia formativa ha permitido revelar sus fortalezas y debilidades. La idoneidad epistémica (representatividad del significado implementado) fue alta, mientras que la idoneidad cognitiva (significados personales logrados) fue baja. El análisis de las normas que han condicionado el proceso ha permitido tomar conciencia de las restricciones impuestas por los medios usados (baja idoneidad mediacional), que afectaron al proceso de retroalimentación, discusión y reflexión de los estudiantes sobre las tareas propuestas.

El foco de interés de este trabajo ha sido el diseño, experimentación y evaluación de un cambio en el plan de formación inicial de maestros sobre un tópico matemático transversal y relevante: el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). La investigación se inscribe en el paradigma del diseño instruccional, o *ingeniería didáctica interpretativa* (Godino et al.. 2013). El diseño instruccional está apoyado y precedido por el estudio preliminar sobre la naturaleza del RAE (Godino et al., 2012; Godino et al. 2013).

La planificación e implementación de la enseñanza del RAE en la educación primaria requiere un sistema de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM-RAE) de los maestros y el diseño de las acciones formativas correspondientes (Godino, 2009). Se abre de este modo, en este trabajo, una línea de investigación en la formación de maestros: el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático correspondiente, como condición necesaria para su promoción en la escuela primaria. Específicamente consideramos necesario profundizar en dos direcciones: 1) Construcción de instrumentos para evaluar el grado de comprensión y dominio de maestros en formación sobre CDM-RAE; 2) Ampliar las experiencias formativas sobre RAE en la formación de maestros. Una posibilidad sería incluir en su plan de estudios un curso específico de *didáctica del álgebra escolar*.

Un tipo de acción formativa de interés para los maestros sería el análisis de libros de texto de educación primaria, y el estudio de su posible mejora para favorecer el desarrollo del sentido algebraico en los niños. Así mismo, una vez que los estudiantes estén familiarizados con los rasgos característicos del álgebra elemental y los niveles de algebrización de la actividad matemática se les puede proponer elaborar unidades didácticas orientadas a la promoción del sentido algebraico en la educación primaria. Mediante esta actividad es posible movilizar las distintas facetas y componentes del CDM-RAE, sobre todo si los estudiantes tienen ocasión de implementar dichas unidades durante los periodos de prácticas de enseñanza.

Otra finalidad de este trabajo ha sido mostrar herramientas del marco teórico del EOS aplicables en las fases de estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación de ingenierías didácticas, esto es, investigaciones basadas en el diseño instruccional. En la fase de estudio preliminar la noción de significado de referencia da una orientación específica a la epistemología del contenido pretendido, por la manera pragmatista - antropológica en que se interpreta el significado institucional de los objetos matemáticos. En la fase de diseño, una vez seleccionada una muestra representativa de situaciones – problemas, nos propone prever de manera sistemática la trama de objetos y procesos que la resolución de tales situaciones pone en juego, para identificar posibles conflictos de aprendizaje a considerar en los procesos de institucionalización y evaluación. Durante la implementación los distintos tipos de configuraciones y procesos didácticos y la noción de conflicto semiótico interaccional ayudan a identificar hechos didácticos significativos que orientan la evaluación formativa y la optimización del aprendizaje. En la fase de evaluación o análisis retrospectivo, la noción de idoneidad didáctica aporta vías para la reflexión sistemática sobre las distintas facetas del proceso de estudio e identificar potenciales mejoras en nuevas implementaciones.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

Referencias

Aké, L., Castro, W. F., & Godino, J. D. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 227-236). Ciudad Real.

Aké, L., Godino, J. D. & Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 39-52.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-Sustaining change in teacher practice". *Teaching Children Mathematics,* 10, 70-77.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M.L., & Zeringue J.K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 37, 53-59.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher,* 32, 1, 9–13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R.A. Lesh, y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J.D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E. & Wilhelmi, M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8*, Turquía. Disponible en, http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & De Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1989) A perspective on algebraic thinking. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 2, (pp. 163-171). Paris.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

National Center for Improving Student Learning and Achievement (NCISLA) (2003). Algebraic skills and strategies for elementary teachers and students. *in Brief*, *3*(1), 1-12. (Disponible en,

http://ncisla.wceruw.org/publications/briefs/In%20Brief%20Summer%2003%20FINAL.pdf)

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York, NY: Routledge.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, Vancouver,* 12 (1), 1 – 19.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278.

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 33-47.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.