Matemática Discreta

Alumno:____ **DNI:**____________

I. Informática I.T.I. Gestión I.T.I. Sistemas Grupo:

(14/09/2006)

Ejercicio 1. *¿Es cierto que para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que*

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq n+1 \text{ ?}$$

Justifica la respuesta.

Solución:

No sólo es cierta la desigualdad, sino que se da la igualdad entre los dos miembros, aunque aquí demostraremos la desigualdad.

Haremos la demostración por inducción.

- En primer lugar, probamos que se da la desiguandad para $n = 1$. En este caso, lo que hemos de probar es que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\leq 2$, lo cual es cierto, ya que $2 \leq 2$.

- En segundo lugar supondremos que se da la desigualdad para un número natural n y demostraremos que sigue siendo cierta para el número siguiente. Es decir, supongamos que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq n+1$$

En tal caso, se tiene que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leq$$

$$\leq (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=(n+1)\cdot\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)=n+2$$

como queríamos.

Como hemos dicho al principio, en realidad se tiene que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

La demostración sería totalmente análoga a la hecha aquí.

Ejercicio 2. *¿Cuántos números naturales hay, menores que* 10000*, que acaben en* 7*, y que al dividirlos por* 55 *den resto* 12*?.*

Justifica la respuesta.

Solución:

Un número n acaba en 7 si al dividirlo por 10 da resto 7, es decir, $n \equiv 7(\textit{mód } 10)$

Decir que un número n da resto 12 al dividirlo por 52 es lo mismo que decir que $n \equiv 12(\textit{mód } 55)$.

Por tanto, hemos de encontrar las soluciones menores que 10000 al sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcrl} n & \equiv & 7 & (\textit{mód } 10) \\ n & \equiv & 12 & (\textit{mód } 55) \end{array}$$

Las soluciones de la primera congruencia son los números de la forma

$$n = 7 + 10k$$

Introducimos esta solución en la segunda, y nos queda:

$$\begin{array}{rcll} 7+10k & \equiv & 12 & (m\acute{o}d\ 55) \\ 10k & \equiv & 5 & (m\acute{o}d\ 55) \quad \text{dividimos toda la congruencia por 5} \\ 2k & \equiv & 1 & (m\acute{o}d\ 11) \quad \text{multiplicamos por el inverso de 2 en } \mathbb{Z}_{11} \\ k & \equiv & 6 & (m\acute{o}d\ 11) \end{array}$$

Y por tanto $k = 6 + 11k'$.

Por tanto, las soluciones del sistema son de la forma $n = 7 + 10(6 + 11k') = 67 + 110k'$, con k' un número entero cualquiera.

Acotamos el valor de k' para que la solución esté en el rango pedido.

$$0 \leq 67 + 110k' \leq 9999 \implies -67 \leq 110k' \leq 9932 \implies \frac{-67}{110} \leq k' \leq \frac{9932}{110}$$

y como $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$0 \leq k' \leq 90$$

Lo que da un total de 91 soluciones.

Ejercicio 3. *Sean $x = 48572)_{16}$ e $y = 95883)_{16}$. Expresa el valor de $x + y$ en base 8.*

Solución:

Podemos plantear este ejercicio de varias formas:

1. Sumamos los números en base 16, pasamos el resultado a base 2, y posteriormente a base 8.

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 \\ + & 9 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ \hline & D & D & D & F & 5 \end{array}$$

   Como $16 = 2^4$ cada cifra del número en base 16 da lugar a 4 cifras en base 2. Tenemos entonces que

$$x + y = DDDF5)_{16} = 11011101110111110101)_2$$

   Para pasar de base 2 a base $8 = 2^3$ basta con ir agrupando de 3 en 3, empezando por la derecha (por ejemplo $101)_2 = 5)_8$). Así, nos queda:

$$x + y = 3356765)_8$$

2. Reducimos ambos números a base 10, los sumamos, y después los pasamos a base 8.

   $x = 48572)_{16} = 4 \cdot 16^4 + 8 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16 + 2 = 296306$

   $y = 95883)_{16} = 9 \cdot 16^4 + 5 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 3 = 612483$

   $x + y = 296306 + 612483 = 908789$

   $908789 = 8 \cdot 113598 + \underline{5}$

   $113598 = 8 \cdot 14199 + \underline{6}$

   $14199 = 8 \cdot 1774 + \underline{7}$

   $1774 = 8 \cdot 221 + \underline{6}$

   $221 = 8 \cdot 27 + \underline{5}$

   $27 = 8 \cdot \underline{3} + \underline{3}$

   La expresión de $x + y$ en base 8 viene dada por los números que hemos subrayado. Es decir,

$$x + y = 3356765)_8$$

3. Pasamos x e y a base 2, sumamos, y después pasamos a base 8.

$$x = 48572)_{16} = 1001000010101110010)_2 \qquad y = 95883)_{16} = 10010101100010000011)_2$$

La suma es entonces:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

y por tanto $x + y = 11011101110111110101)_2 = 3356765)_8$.

Ejercicio 4. *Calcula el inverso de* 244 *en* $\mathbb{Z}_{2749}$.

Solución:
Utilizamos el algoritmo extendido de Euclides
$2749 = 244 \cdot 11 + 65$
$244 = 65 \cdot 3 + 49$
$65 = 49 \cdot 1 + 16$
$49 = 16 \cdot 3 + 1$
A partir de las divisiones construimos la tabla para el cálculo del inverso.

a	b	r	c	v
				0
				1
2749	244	65	11	-11
244	65	49	3	34
65	49	16	1	-45
49	16	1	3	169

Y por tanto, el inverso de 244 en $\mathbb{Z}_{2749}$ es 169.

Ejercicio 5. *Factoriza como producto de irreducibles el polinomio* $x^5 + x^4 + 3x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$

Solución:
En primer lugar comprobamos si tiene o no raíces. Dados los coeficientes, las posibles raíces racionales son $1, -1, 3, -3$ (el numerador debe ser un divisor del término independiente y el denominador del coeficiente líder) Probamos entonces:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\
1 & & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\
-1 & & -1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0
\end{array}$$

Por tanto -1 es una raíz, y el polinomio $x^5+x^4+3x^2-3$ se puede factorizar como $(x+1)(x^4+3x-3)$.
Este último polinomio es irreducible. Basta aplicar el criterio de Eisenstein para el primo $p = 3$ (o reducirlo módulo 2). Por tanto, la factorización anterior es la factorización como producto de irreducibles. Es decir:

$$x^5 + x^4 + 3x^2 - 3 \;=\; (x + 1) \cdot (x^4 + 3x - 3)$$

Ejercicio 6. *Calcula un polinomio de grado 7, en* $\mathbb{Z}_7[x]$*, tal que* $p(1) = 0$*,* $p(2) = 4$ *y* $p(5) = 3$.

Solución:
Calculamos el polinomio usando la fórmula de interpolación de Lagrange. Para esto, sean los polinomios:
$p_1(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} = \frac{x^2-7x+10}{(-1)(-4)} = \frac{x^2+3}{4} = 4^{-1}(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6.$

$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} = \frac{x^2-6x+5}{1\cdot(-3)} = \frac{x^2+x+5}{4} = 4^{-1}(x^2 + x + 5) = 2(x^2 + x + 5) = 2x^2 + 2x + 3$

$p_5(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = \frac{x^2-3x+2}{4\cdot 3} = \frac{x^2+4x+2}{5} = 5^{-1}(x^2 + 4x + 2) = 3(x^2 + 4x + 2) = 3x^2 + 5x + 6$

El polinomio interpolador es por tanto

$$0\cdot p_1(x)+4\cdot p_2(x)+3\cdot p_5(x)=4(2x^2+2x+3)+3(3x^2+5x+6)=x^2+x+5\ +\ 2x^2+x+4=3x^2+2x+2$$

Para que cumpla las condiciones del enunciado, el polinomio debe tener grado 7. Le sumamos entonces un polinomio $q(x)$, de grado 7, que verifique que $q(1)=q(2)=q(5)=0$. Un polinomio de esas características debe ser múltiplo de $(x-1)(x-2)(x-5)=x^3-8x^2+17x-10=x^3+6x^2+3x+4$. Valdría entonces, por ejemplo, $q(x)=x^4(x^3+6x^2+3x+4)=x^7+6x^6+3x^5+4x^4$ (en lugar de x^4 podríamos haber tomado cualquier otro polinomio de grado 4).

Por tanto, el resultado final es:

$$p(x)=x^7+6x^6+3x^5+4x^4+3x^2+2x+2$$

Otra forma de plantear el problema sería resolviendo el sistema de congruencias en $\mathbb{Z}_7[x]$.

$$\begin{array}{rcll} p(x) & \equiv & 0 & (\text{\textit{mód} } x-1)\\ p(x) & \equiv & 4 & (\text{\textit{mód} } x-2)\\ p(x) & \equiv & 3 & (\text{\textit{mód} } x-5)\end{array}$$

cuya solución es $p(x)=3x^2+2x+2+(x^3+6x^2+3x+4)\cdot q(x):\ \ q(x)\in\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 7. *En la escuela, se quiere ofertar 8 asigntaturas optativas para un curso determinado, de las que hay que elegir 3. Hay dos opciones posibles:*

- *Se ofertan las 8 en un único cuatrimestre, y los alumnos deben elegir las* 3.
- *Se ofertan 3 en el primer cuatrimestre, y los alumnos deben elegir una, y se ofertan las otras 5 en el segundo cuatrimestre y los alumnos deben elegir dos de ellas.*

Razona cual de las dos posibilidades da más opciones de elección a los alumnos.

Solución:

En el primer caso, los alumnos deben elegir 3 asignaturas de 8 posibles. Esto pueden hacerlo de $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=56$ formas distintas.

En el segundo caso, en el primer cuatrimestre los alumnos tienen 3 posibilidades de elegir (una asignatura entre 3 posibles). Por cada una de esas elecciones pueden hacer un total de $\binom{5}{2}=10$ elecciones en el segundo cuatrimestre. En total, el número de opciones distintas es $3\cdot 10=30$.

Por tanto, la primera opción es la que ofrece más posibilidades de elección a los alumnos.

Ejercicio 8. *Prueba que en un retículo distributivo* $(L,\vee,\wedge)$ *se da la siguiente igualdad para cualesquiera* $x,y,z\in L$.

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

Solución:

Se tiene que:

$$\begin{array}{ll}
(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) & \\
=[(x\wedge y)\vee(y\wedge z)]\vee(z\wedge x) & \text{por la propiedad asociativa de } \vee\\
=[y\wedge(x\vee z)]\vee(z\wedge x) & \text{por la propiedad distributiva de } \wedge \text{ respecto a } \vee\\
=\big[[y\wedge(x\vee z)]\vee z\big]\wedge\big[[y\wedge(x\vee z)]\vee x\}\big] & \text{propiedad distributiva}\\
=\big[(y\vee z)\wedge[(x\vee z)\vee z]\big]\wedge\big[(y\vee x)\wedge[(x\vee z)\vee x]\big] & \text{propiedad distributiva}\\
=(y\vee z)\wedge(z\vee z\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(z\vee x\vee x) & \text{propiedad distributiva y conmutativa}\\
=(y\vee z)\wedge(z\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(z\vee x) & \text{idempotencia}\\
=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x) & \text{propiedad conmutativa e idempotencia}
\end{array}$$

Ejercicio 9. *Da un ejemplo de un grafo, con 6 vértices o menos, tal que no sea plano y no contenga un circuito de Hamilton.*

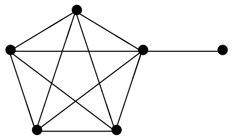
Justifica la respuesta.

Solución:

Para que no sea plano, debe contener un subgrafo que pueda contraerse a K_5 o a $K_{3,3}$. Dado que $K_{3,3}$ tiene 6 vértices, y es un grafo Hamiltoniano, nuestro grafo no contendrá a $K_{3,3}$, luego debe contener a K_5.

Como K_5 también es Hamiltoniano, a K_5 hemos de añadirle un vértice.

Después de esto, un grafo con tales características podría ser



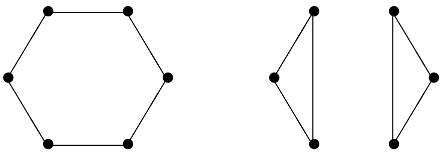
Tal grafo tiene 6 vértices, no es plano por contener a K_5, y no contiene ningún circuito de Hamilton al tener un vértice de grado

Ejercicio 10. *Da dos grafos regulares, no isomorfos entre sí, pero que tengan igual número de vértices y de lados.*

Justifica la respuesta.

Solución:

Una pareja de grafos podría ser:



Ambos tienen 6 vértices, 6 lados. Todos los vértices tienen grado 2, y sin embargo no son isomorfos, pues uno es conexo y el otro no.