

## Anillos de polinomios

**Ejercicio 1.** Sea  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Demuestra que  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  es un dominio de integridad y que  $1 + \sqrt{2}$  es una unidad en  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

**Ejercicio 2.** Determina los divisores de cero y las unidades de  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Ejercicio 3.** Demuestra que todo dominio de integridad con un número finito de elementos es un cuerpo.

**Ejercicio 4.** Calcula  $(2x^3 + 3x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)$  en  $\mathbb{Z}_6[x]$ .

**Ejercicio 5.** Calcula el cociente y el resto de dividir  $2x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 1$  entre  $3x^2 + 1$  en  $\mathbb{Z}_7[x]$ .

**Ejercicio 6.** Calcula todos los polinomios irreducibles de grado dos en  $\mathbb{Z}_2[x]$ .

**Ejercicio 7.** Demuestra que el polinomio  $x^4 + x + 1$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_2[x]$ .

**Ejercicio 8.** Demuestra que los polinomios  $x^2 + 1$ ,  $x^3 + x + 1$  y  $x^4 + 2$  son irreducibles en  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Ejercicio 9.** Calcula un máximo común divisor de  $a(x)$  y  $b(x)$  en los siguientes casos:

1.  $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ ,  $b(x) = x^4 - 1$  en  $\mathbb{Q}[x]$ .

2.  $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ ,  $b(x) = x^2 + 2$  en  $\mathbb{Z}_3[x]$ .

**Ejercicio 10.** Demuestra que la ecuación

$$(x^4 + 2x^2 + 1)\mathcal{X} + (x^4 - 1)\mathcal{Y} = 3x^3 + 3x$$

tiene solución en  $\mathbb{Q}[X]$ , y halla una solución.

**Ejercicio 11.** Calcula las raíces en  $\mathbb{Z}_5$  del polinomio  $x^2 + x + 4$ .

**Ejercicio 12.** Calcula las raíces en  $\mathbb{Z}$  del polinomio  $x^4 - x^3 + x^2 - x - 10$ .

**Ejercicio 13.** Calcula en  $\mathbb{Q}[x]$  el resto de dividir

1.  $x^7 + x^2 + 1$  entre  $x - 1$ ,

2.  $x^n + 1$  entre  $x - 1$ .

**Ejercicio 14.** Calcula en  $\mathbb{Z}_5[x]$  el resto de dividir  $x^n + 2$  entre  $x + 4$ .

**Ejercicio 15.** Demuestra que el polinomio  $x^n + 1$  no tiene raíces múltiples en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 16.** Determina cuáles de los siguientes polinomios tienen raíces múltiples en  $\mathbb{C}$ .

1.  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ,

2.  $x^3 + x^2 + 1$ ,

3.  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

**Ejercicio 17.** (\*) Encuentra todas las raíces de  $x^2 - 1$  en  $\mathbb{Z}_8[x]$ .

**Ejercicio 18.** Calcula un polinomio  $a(X)$  en  $\mathbb{Q}[X]$  tal que  $a(2) = 0$ ,  $a(1) = -2$ ,  $a(3) = 1$  y  $a(-1) = 2$ .

**Ejercicio 19.** Calcula un polinomio  $a(X)$  en  $\mathbb{Z}_5[X]$  tal que  $a(2) = 1$ ,  $a(3) = 2$  y  $a(4) = 1$ .

**Ejercicio 20.** (\*) Comprueba que los polinomios  $x^3 + x^2 + x + 1$  y  $x^2 + 2x + 1$  determinan la misma aplicación  $f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ .