

Anillos de polinomios

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Demuestra que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio de integridad y que $1 + \sqrt{2}$ es una unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Ejercicio 2. Determina los divisores de cero y las unidades de \mathbb{Z}_{12} .

Ejercicio 3. Demuestra que todo dominio de integridad con un número finito de elementos es un cuerpo.

Ejercicio 4. Calcula $(2x^3 + 3x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)$ en $\mathbb{Z}_6[x]$.

Ejercicio 5. Calcula el cociente y el resto de dividir $2x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 1$ entre $3x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 6. Calcula todos los polinomios irreducibles de grado dos en $\mathbb{Z}_2[x]$

Ejercicio 7. Demuestra que el polinomio $x^4 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$.

Ejercicio 8. Demuestra que los polinomios $x^2 + 1$, $x^3 + x + 1$ y $x^4 + 2$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$

Ejercicio 9. Calcula un máximo común divisor de $a(x)$ y $b(x)$ en los siguientes casos:

1. $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $b(x) = x^4 - 1$ en $\mathbb{Q}[x]$.

2. $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $b(x) = x^2 + 2$ en $\mathbb{Z}_3[x]$.

Ejercicio 10. Demuestra que la ecuación

$$(x^4 + 2x^2 + 1)\mathcal{X} + (x^4 - 1)\mathcal{Y} = 3x^3 + 3x$$

tiene solución en $\mathbb{Q}[X]$, y halla una solución.

Ejercicio 11. Calcula las raíces en \mathbb{Z}_5 del polinomio $x^2 + x + 4$.

Ejercicio 12. Calcula las raíces en \mathbb{Z} del polinomio $x^4 - x^3 + x^2 - x - 10$.

Ejercicio 13. Calcula en $\mathbb{Q}[x]$ el resto de dividir

1. $x^7 + x^2 + 1$ entre $x - 1$,

2. $x^n + 1$ entre $x - 1$.

Ejercicio 14. Calcula en $\mathbb{Z}_5[x]$ el resto de dividir $x^n + 2$ entre $x + 4$.

Ejercicio 15. Demuestra que el polinomio $x^n + 1$ no tiene raíces múltiples en \mathbb{R} .

Ejercicio 16. Determina cuáles de los siguientes polinomios tienen raíces múltiples en \mathbb{C} .

1. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$,

2. $x^3 + x^2 + 1$,

3. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Ejercicio 17. (*) Encuentra todas las raíces de $x^2 - 1$ en $\mathbb{Z}_8[x]$.

Ejercicio 18. Calcula un polinomio $a(X)$ en $\mathbb{Q}[X]$ tal que $a(2) = 0$, $a(1) = -2$, $a(3) = 1$ y $a(-1) = 2$.

Ejercicio 19. Calcula un polinomio $a(X)$ en $\mathbb{Z}_5[X]$ tal que $a(2) = 1$, $a(3) = 2$ y $a(4) = 1$.

Ejercicio 20. (*) Comprueba que los polinomios $x^3 + x^2 + x + 1$ y $x^2 + 2x + 1$ determinan la misma aplicación $f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$.