TEMA 3

Conjuntos ordenados. Retículos y álgebras de Boole

Ejercicio 1. Dibuja el diagrama de Hasse de $(D(20), |)$.

1. Dado $B = \{4, 10, 2\}$, encuentra sus elementos notables.

2. Encuentra los elementos minimales de $B = D(20) \setminus \{1\}$ $(D(20) - \{1\})$.

Ejercicio 2. Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$. Encuentra los elementos minimales y maximales de $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) \setminus \{\emptyset, \{a, b, c, d\}\}$.

Ejercicio 3. Consideramos en $\mathbb{N}$ la siguiente relación binaria: $a \preceq_{lex} b$ si y sólo si $a \leq b$. Supuesto definido $\preceq_{lex}$ en $\mathbb{N}^{n-1}$, definimos $\preceq_{lex}$ en $\mathbb{N}^n$ de la siguiente forma: $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_1, \ldots, b_n)$ si y sólo si $a_1 < b_1$ o ($a_1 = b_1$ y $(a_2, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_2, \ldots, b_n)$).

1. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{N}^n, \preceq_{lex})$ es un conjunto ordenado. A dicho orden se le denomina orden lexicográfico.

2. Demuestra que si $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ (con el orden producto en $\mathbb{N}^n$), entonces también $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_1, \ldots, b_n)$.

3. Demuestra que $\preceq_{lex}$ es un orden total.

Ejercicio 4. Se define la relación binaria $\preceq_{tdeg}$ en $\mathbb{N}^n$ de la siguiente forma: $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{tdeg} (b_1, \ldots, b_n)$ si y sólo si $(a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n)$ o ($a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ y $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{lex} (b_1, \ldots, b_n)$).

1. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{N}^n, \preceq_{tdeg})$ es un conjunto ordenado. A dicho orden se le denomina orden de grado total lexicográfico.

2. Demuestra que si $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ (con el orden producto en $\mathbb{N}^n$), entonces también $(a_1, \ldots, a_n) \preceq_{tdeg} (b_1, \ldots, b_n)$.

3. Demuestra que $\preceq_{tdeg}$ es un orden total.

Ejercicio 5. Sea $\emptyset \neq X$ un conjunto y $f : X \to \mathbb{N}$ una aplicación de conjuntos. Definimos en X la siguiente relación binaria $x \leq_f y$ si y sólo si $f(x_1) \leq f(x_2)$.

1. ¿Qué propiedad debe verificar f para que $\leq_f$ sea una relación de orden?

2. En el caso particular de $X = \mathbb{N}^n$ y si $p_1, \ldots, p_n$ son los n primeros primos, demuestra que para la función
$$f(a_1, \ldots, a_n) = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_n^{a_n},$$
$\leq_f$ es un orden total.

Ejercicio 6. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y finito. Demuestra que si $\leq$ es un orden total, entonces $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.

Ejercicio 7. Haciendo uso del Lema de Dickson, demuestra que $(\mathbb{N}^n, \preceq_{lex})$ y $(\mathbb{N}^n, \preceq_{tdeg})$ son conjuntos bien ordenados.

Ejercicio 8. Demuestra que un retículo es un conjunto totalmente ordenado si y sólo si todos sus subconjuntos son subretículos

Ejercicio 9. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que el conjunto

$$\{f_*(S) \mid S \subseteq X\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

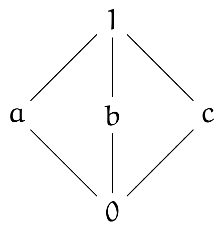
es un subretículo.

Ejercicio 10. Demuestra que en un retículo distributivo $(L, \vee, \wedge)$ se verifica

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x),$$

pero que esta igualdad no es cierta en el retículo de la figura 1

Figura 1:



Ejercicio 11. Sea $f : L \to L'$ un homomorfismo de retículos sobreyectivo. Demuestra que si L es un álgebra de Boole entonces L' también lo es.

Ejercicio 12. Sea $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in \mathcal{B}$. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $a\overline{b} = 0$,

(b) $a + b = b$,

(c) $\overline{a} + b = 1$,

(d) $ab = a$.

Ejercicio 13. Determina una expresión booleana cuya función booleana se corresponda con los circuitos conmutadores que aparecen en las figuras 2, 3, 4

Ejercicio 14. Construye un circuito conmutados asociado a cada una de las funciones booleanas representadas por las expresiones

(a) $(A \vee B) \vee (\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee A \vee B)$,

(b) $(A \vee B) \wedge C \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})$,

(c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B \wedge C)$.

Ejercicio 15. Simplifica los circuitos conmutadores de las figuras 5 y 6.

Figura 2:

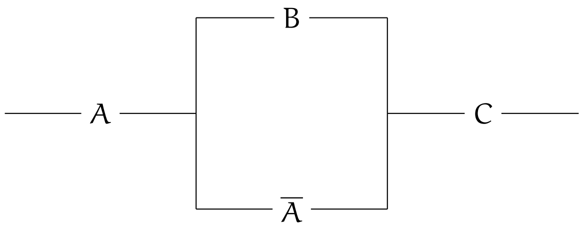


Figura 3:

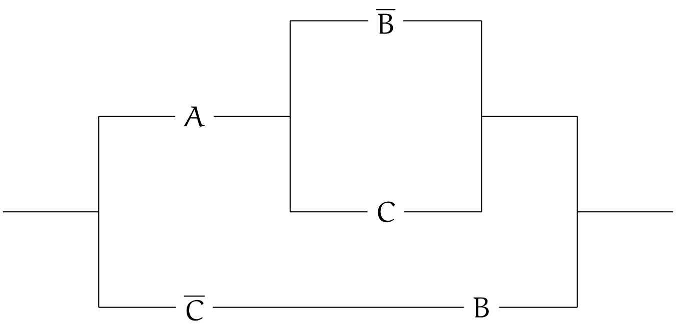


Figura 4:

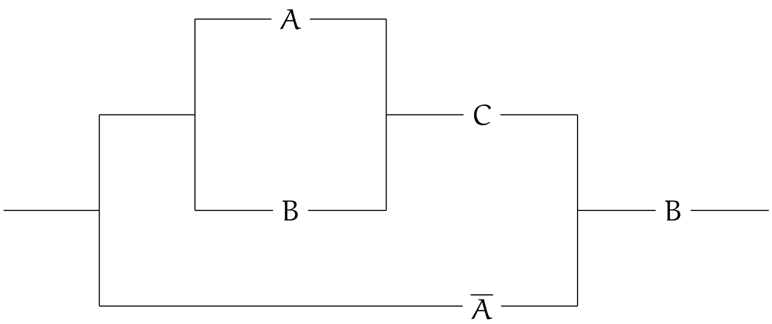


Figura 5:

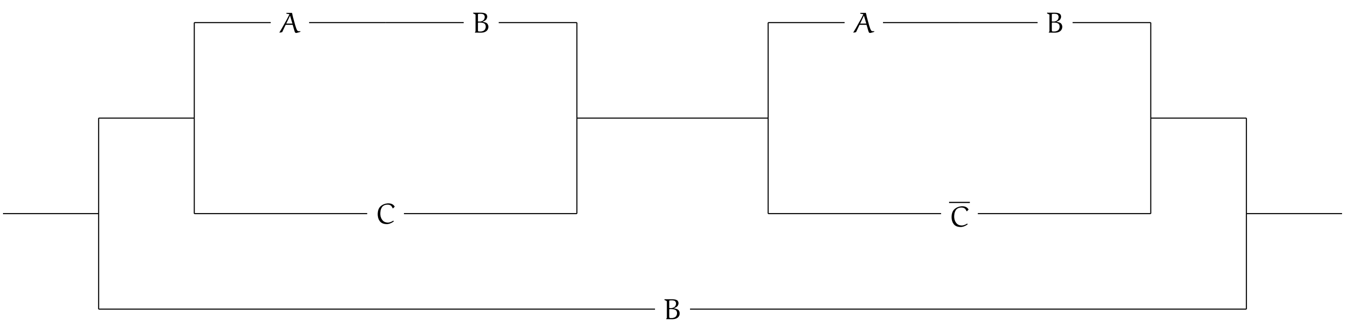
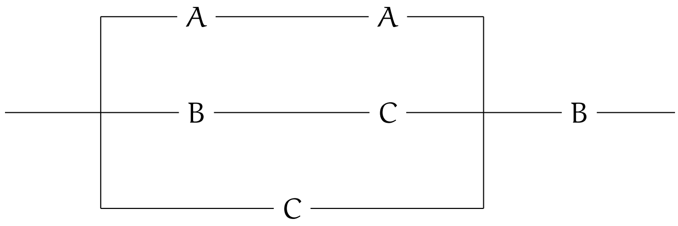


Figura 6:



Ejercicio 16. Calcula la forma normal canónica disyuntiva (es decir, suma de minterms) y simplifica las funciones booleanas dadas por las tablas

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Ejercicio 17. Demuestra que todo conjunto totalmente ordenado es un retículo distributivo.

Ejercicio 18. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación $f(x, y, z) = (x \uparrow y) \vee z$.

Ejercicio 19. ¿Cuántos átomos tiene un álgebra de Boole con 32 elementos?

Ejercicio 20. Expresa, utilizando sólo la función $\downarrow$, la aplicación $f(x, y, z) = (x \vee z) \wedge y$.

Ejercicio 21. Sea L un retículo complementado. Prueba que si L tiene tres o más elementos, entonces L no es totalmente ordenado.

Ejercicio 22. Demuestra que el producto cartesiano de retículos distributivos es un retículo distributivo. Demuestra que el producto cartesiano de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.

Ejercicio 23. Si para un álgebra de Boole finita B conocemos el conjunto M de todos sus átomos, así como la expresión de un elemento x de B como supremo de átomos, ¿cómo podríamos obtener la expresión de $\overline{x}$ como supremo de átomos? Razona la respuesta.

Ejercicio 24. Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SÍ" pulsando un botón. Diseñar una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos SÍ".

Ejercicio 25. Sea I el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[0, 1]$. Para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = max\{a, b\}$, $a \wedge b = min\{a, b\}$ y $\overline{a} = 1 - a$ ¿Es I respecto de estas operaciones un álgebra de Boole? Razona la respuesta.

Ejercicio 26. Se conocen los siguientes hechos sobre cuatro personas A, B, C y D.

(a) Si A ve una película entonces B también la ve.

(b) C y D no ven la misma película juntos.

(c) B y C o bien ven la misma película juntos o no la ve ninguno de los dos.

(d) Si A no ve una película entonces B y C la ven.

¿Quién está viendo la película?