

## Números Naturales y Números Enteros

---

**Ejercicio 1.** Usa el principio de inducción para probar las siguientes afirmaciones:

1.  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N},$
2.  $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \forall n \in \mathbb{N},$
3.  $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \forall n \in \mathbb{N},$
4.  $7^n - 1$  es un múltiplo de 6  $\forall n \in \mathbb{N},$
5.  $7^{2n} + 16n - 1$  es un múltiplo de 64  $\forall n \in \mathbb{N},$
6.  $a^{2n} - b^{2n}$  es divisible por  $a + b \forall n \in \mathbb{N},$
7.  $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$  para  $n \geq 1,$
8.  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$  para  $n \geq 2,$
9.  $2^n \geq 2n + 1$  para  $n \geq 3,$
10.  $2^n \geq n^2$  para  $n \geq 4.$

**Ejercicio 2.** Encuentra una definición recursiva verificada por cada una de las siguientes secuencias de números:

1. 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...
2. 6, 12, 24, 48, 96, ...
3. 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

**Ejercicio 3.** Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

1.  $3 \times 4 = 22,$
2.  $41 \times 14 = 1224,$
3.  $52 \times 25 = 1693,$
4.  $25 \times 13 = 51,$
5.  $13^4 = 14641$

**Ejercicio 4.** Da la expresión en base 8 de los naturales que en base 2 se escriben:

1. 101101100010011010111,
2. (\*) 10001000000100110,

3. (\*)  $1011101111011111$

**Ejercicio 5.** Demuestra que para  $B \geq 3$ , los números  $(B - 1)^2$  y  $2(B - 1)$  se escriben en base  $B$  como  $ab$  y  $ba$  respectivamente.

**Ejercicio 6.** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $\text{mcd}(a, b) = 1$ . Demuestra que:

1.  $\text{mcd}(a + b, ab) = 1$ ,
2.  $\text{mcd}(a - b, ab) = 1$ .

**Ejercicio 7.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Demuestra que  $\text{mcd}(\text{mcd}(a, b), c) = \text{mcd}(a, \text{mcd}(b, c))$ .

**Ejercicio 8.** Prueba que dado un número entero cualquiera  $m$  se verifica una de las siguientes posibilidades:

1.  $m^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ,
2.  $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ,
3.  $m^2 \equiv 4 \pmod{8}$

**Ejercicio 9.** Prueba que si  $x$  es un número entero e impar no divisible por 3 entonces  $x^2 \equiv 1 \pmod{24}$ .

**Ejercicio 10.** Resuelve las siguientes congruencias:

1.  $3x \equiv 2 \pmod{5}$ ,
2.  $7x \equiv 4 \pmod{10}$ ,
3.  $6x \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Ejercicio 11.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

1.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ 6x \equiv 3 \pmod{9} \\ 3x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

**Ejercicio 12.** Tres granjeros dividen en partes iguales el arroz que han cultivado en común. Fueron a mercados diferentes en los que se usaban medidas de peso diferentes: en un lugar era de 7 kilos, en otro de 15 kilos y en el último de 19 kilos. Cada uno vendió todo lo que pudo en medidas enteras en sus respectivos mercados y a la vuelta al primer granjero le sobraban 6 kilos, al segundo 11 y al tercero 14. ¿Cuánto arroz habían cultivado?

**Ejercicio 13.** Calcula el resto de dividir  $4225^{1000}$  entre 7.

**Ejercicio 14.** Calcula el número de divisores positivos de 120.

**Ejercicio 15.** Demuestra que si  $p$  es un número primo, entonces  $\sqrt{p}$  es irracional. Como aplicación, demuestra que  $\sqrt{75}$  es irracional.

**Ejercicio 16.** Calcula las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$2x + 3y = 7.$$

**Ejercicio 17.** Calcula las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$6x + 10y = 16.$$

**Ejercicio 18.** Demuestra que el conjunto de los números primos es infinito.

**Ejercicio 19.** Encuentra un número entero cuyo resto al dividirlo entre 5 sea 3 y que al multiplicarlo por 3 y dividirlo entre 4 dé resto 1.

**Ejercicio 20.** Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: *Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste murieron cinco de los piratas que aún quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación.* Sabiendo que en el cofre no caben más de dos mil quinientas monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?

**Ejercicio 21.** (\*) Resuelve la ecuación en congruencias

$$x^2 - 3x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

**Ejercicio 22.** (\*) Resuelve el sistema de ecuaciones en congruencias

$$\begin{cases} 5x - 7y \equiv 9 & (\text{mód } 12) \\ 2x + 3y \equiv 10 & (\text{mód } 12) \end{cases}$$

**Ejercicio 23.** Calcula todas las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$35x + 45y + 55z = 60.$$

**Ejercicio 24.** Calcula las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$6x + 9y + 15z = 7.$$

**Ejercicio 25.** (\*) Calcula las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$6x + 10y + 15z = 7.$$

**Ejercicio 26.** Demuestra que un número escrito en base 10 es par si y sólo si su última cifra es par.

**Ejercicio 27.** Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

**Ejercicio 28.** Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

**Ejercicio 29.** Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.

**Ejercicio 30.** Demuestra que un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11

**Ejercicio 31.** Demuestra que un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.