TEMA 4

Combinatoria

Ejercicio 1. Una apuesta de la Lotería Primitiva consiste en marcar seis números entre 1 y 49. El sorteo se realiza extrayendo 6 de los 49 números, y un séptimo número llamado complementario.

1. ¿Cuántas apuestas distintas pueden realizarse?.
2. ¿De cuántas maneras pueden acertarse los seis números de la combinación ganadora?.
3. ¿De cuántas maneras pueden acertarse cinco números más el complementario de la combinación ganadora?.
4. ¿De cuántas maneras pueden acertarse cinco números de la combinación ganadora (sin el complementario)?.
5. ¿De cuántas maneras pueden acertarse cuatro números de la combinación ganadora?.
6. ¿De cuántas maneras pueden acertarse tres números de la combinación ganadora?.
7. ¿De cuántas maneras pueden acertarse dos números de la combinación ganadora?.
8. ¿De cuántas maneras puede acertarse un número de la combinación ganadora?.
9. ¿De cuántas maneras puede no acertarse ningún número de la combinación ganadora?.

Ejercicio 2. Sea p un número primo. Prueba que si $a, b \in \mathbb{Z}_p$ entonces $(a+b)^p = a^p + b^p$. Comprueba que si m no es primo, entonces $(a+b)^m$ y $a^m + b^m$ son generalmente distintos en $\mathbb{Z}_m$.

Ejercicio 3. Ocho miembros de un equipo de baloncesto deben alojarse en un hotel. El hotel dispone de una habitacion triple, dos dobles y una individual. ¿De cuántas formas pueden repartirse en las distintas habitaciones?.

Supongamos además que de los ocho miembros hay dos que son hermanos y se alojan siempre juntos. ¿De cuántas formas pueden entonces repartirse?.

Ejercicio 4. Se eligen 10 números distintos del conjunto $\{1, 2, \cdots, 100\}$. Comprueba que existen al menos 2 tales que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq 1$.

Ejercicio 5. Tenemos tres cajas, y 24 bolas, 10 de las cuales son rojas, 8 son azules y 6 verdes. ¿De cuántas formas diferentes podemos repartir las bolas en las cajas?.

Ejercicio 6. ¿Cuántos números binarios de 6 cifras no contienen la secuencia 101?

Ejercicio 7. Comprueba las siguientes identidades con números combinatorios:

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

3. $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$

4. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$

5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

6. $\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ (Indicación: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$).

Ejercicio 8. Se lanzan tres dados indistinguibles. ¿Cuántos posibles resultados pueden salir?. ¿Y si se lanzan n dados?.

Ejercicio 9. Calcula cuantos números con tres cifras significativas:

1. no son divisibles por 3,7 ni 11.
2. son divisibles por 3 y 7.
3. son divisibles por 3 y 11.
4. son divisibles por 7 y 11.
5. son divisibles por 3, 7 y 11.

Ejercicio 10. Sea $s(n,k)$ el número de subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ que tienen cardinal k y que no contienen dos números consecutivos. Demuestra que:

1. $s(n,k) = s(n-2, k-1) + s(n-1, k)$
2. $s(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$.

Ejercicio 11. ¿De cuantas formas se pueden obtener 11 aciertos en una quiniela de 14?. ¿Y 11 ó más aciertos?.

Ejercicio 12. Realizamos una apuesta de quiniela con 2 triples y 4 dobles. Supongamos que hemos acertado los 14 resultados. ¿Cuántas apuestas tenemos con 13, 12, 11 y 10 aciertos?.

Ejercicio 13. ¿Cuántos números positivos hay con las cifras en orden estrictamente decreciente?.

Ejercicio 14. Si queremos hacer un dominó que vaya desde cero hasta n, ¿cuántas fichas necesitaremos?.

Ejercicio 15. Queremos formar un comité de 12 personas a escoger entre 10 hombres y 10 mujeres.

1. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?
2. ¿Y si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres?.
3. ¿Y si queremos que haya un número par de hombres?
4. ¿Y si queremos que haya más mujeres que hombres?.

Ejercicio 16. ¿Cuántos números de cinco dígitos (en base 10) empiezan por 4, terminan en 5 y sus cifras suman 18?

Ejercicio 17. Considerando los números que escritos en base 3 tienen seis dígitos ¿Cuántos de ellos tienen exactamente dos dígitos iguales a 0?

Ejercicio 18. Las formas distintas en las que 12 bolas iguales pueden repartirse entre tres cajas numeradas son

a) $\binom{12}{3}$ b) $\binom{14}{2}$ c) $\binom{12}{3} \cdot 3!$ d) $\binom{15}{3}$

Ejercicio 19. ¿Cuántos números en base 3 tienen exactamente 5 cifras?

a) 3^4 b) 3^5 c) $2 \cdot 3^4$ d) $5 \cdot 3$