

**Integral de Lebesgue**

**Análisis Matemático II**

**Grado en Matemáticas**

**Facultad de Ciencias.**

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Juan Carlos Cabello Píñar

**Departamento de Análisis Matemático**



---

## Índice general

---



## 0.1. Integral de Lebesgue

### Sumario

En esta lección

El objetivo de esta lección es presentar, a vista de pájaro, la integral de Lebesgue. En ella vamos a resumir todos los aspectos a tratar en este curso. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

0.1.1 ¿Por qué una nueva integral?

0.1.2 Conjuntos medibles.

0.1.3 Funciones medibles. Integral de Lebesgue.

0.1.4 Funciones Integrables.

0.1.5 Teorema de Fubini.

0.1.6 Interpretación de la integral.

0.1.8 Cambio de coordenadas.

0.1.9 Relación de ejercicios.

### 0.1.1. ¿Por qué una nueva integral?

Hacia finales del siglo XIX resultó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann tiene importantes limitaciones, es sabido por ejemplo su mal comportamiento con ciertos procesos de convergencia. Ésta y otras limitaciones que ahora veremos, obligaron a realizar nuevos intentos de construcción de otras integrales. Entre estos intentos destacan los debidos a Jordan, Borel, Young y finalmente el de Lebesgue, que resultó ser el más exitoso.

En lo que respecta nosotros, nos interesa destacar las siguientes limitaciones:

1. El conjunto de funciones integrables es relativamente pequeño: Hay funciones sencillas que no son integrables. Recuérdese por ejemplo que la función de Dirichlet, esto es, la función,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es integrable.

2. Su extensión a varias variables tiene algunas dificultades.

Ambos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de ampliar el concepto de medida a otros conjuntos de números reales no necesariamente intervalos y por extensión a otros subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Las cuestiones pues a resolver son varias: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos? , ¿qué funciones se pueden integrar? y ¿cómo hallar su integral?

## Demostraciones

Las demostraciones de todos los resultados enunciados en el presente trabajo pueden verse en

J.C. CABELLO, Integral de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$ : Análisis Matemático II. Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. Grado en Matemáticas *Godel, Granada* (2016).

### 0.1.2. Conjuntos medibles

#### 1.- Conjuntos que se pueden medir.

Veamos primero algunos conjuntos que deben estar forzosamente entre la familia de los conjuntos "medibles".

Dado  $I$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  diremos que es un **intervalo** (respectivamente **intervalo acotado**), si existen  $I_1, I_2, \dots, I_n$  intervalos (respectivamente intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n.$$

Veamos cómo añadir a partir de aquí nuevos conjuntos.

Se dice que una familia  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  es una  **$\sigma$ -álgebra** si

- i)  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ ,
- ii) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión en  $\mathcal{A}$ , entonces  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ , y
- iii) Si  $A \in \mathcal{A}$  entonces  $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$ .

Por otra parte, si  $\mathcal{S}$  es una familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces existe una menor  $\sigma$ -álgebra en  $\mathbb{R}^n$  conteniendo a  $\mathcal{S}$ , que denominaremos la  **$\sigma$ -álgebra engendrada** por  $\mathcal{S}$ .

En una primera etapa vamos a considerar la  $\sigma$ -álgebra engendrada por la familia de los conjuntos de los intervalos acotados, familia que llamaremos  **$\sigma$ -álgebra de Borel**, **B**, mientras que a sus elementos los llamaremos **borelianos**. Para hacernos idea de lo grande que es esta familia tengamos en cuenta que los todos los conjuntos abiertos son borelianos.

### Nota

Obsérvese que los conjuntos que resultan de la intersección numerable de abiertos (conjuntos tipo  $G_\delta$ ), no necesariamente abiertos, y los conjuntos que resultan de la unión numerable de cerrados, conjuntos tipo  $F_\delta$ , no necesariamente cerrados, son también conjuntos borelianos.

## 2.- Veamos ahora Cómo medir dichos conjuntos.

Una vez elegida la familia de conjuntos medibles el problema es asignarle una medida.

Es claro que si  $I$  es un intervalo acotado, entonces su medida debe coincidir con su volumen, esto es,  $medida(I) = V(I)$ , y claro está

$$V(I) = l(I_1)l(I_2)...l(I_n),$$

donde  $l(I_k) = b_k - a_k$ , siempre que  $I_k = [a_k, b_k]$ .

A partir de aquí, podemos definir, para cada  $A \in B$ , la medida  $\lambda$ , mediante

$$\lambda(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n, I_n \text{ intervalo acotado, } \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A dicha medida  $\lambda$  se le llama **medida de Borel-Lebesgue**.

Sabemos que existen conjuntos  $A$  borelianos de medida cero,  $\lambda(A) = 0$ , que contienen subconjuntos no medibles. Parece pues conveniente añadir a la  $\sigma$ -álgebra de Borel estos subconjuntos.

Consideremos pues  $\mathcal{M}$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene simultáneamente a la  $\sigma$ -álgebra de Borel y a todos los subconjuntos de los elementos de ésta que son de medida nula. Sus elementos se denominan **conjuntos medibles-Lebesgue** o simplemente **medibles**.

Los conjuntos medibles se pueden representar por  $E = A \cup N$ , donde  $A$  es un boreliano y  $N$  es un subconjunto de un boreliano de medida nula.

Podemos ahora definir una nueva medida, que notaremos igualmente por  $\lambda$  y que llamaremos **medida de Lebesgue** y que viene dada por

$$\lambda(E) = \lambda(A),$$

siempre que  $E = A \cup N$ , y donde  $\lambda(N) = 0$ .

Dicha medida posee la propiedad de la aditividad numerable, i.e., para cualquier familia de conjuntos  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$  de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ , disjuntos dos a dos, se verifica

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Como consecuencia de la definición se pueden obtener las siguientes propiedades:

1. Si  $A, B \in \mathcal{M}$  y  $A \subset B$  entonces  $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ .
2.  $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \quad \forall A_n \in \mathcal{A}$ .
3.  $\lambda$  extiende el volumen de un intervalo, esto es, si  $I = \prod_{k=1}^n I_k$  es un intervalo acotado en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\lambda(I) = v(I) = \prod_{k=1}^n l(I_k)$ .

Se dice que una propiedad  $P$  relativa a un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  se verifica **casi por doquier (c.p.d.)**, si el conjunto de puntos  $C$  donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida cero, esto es,  $\lambda(C) = 0$ .



### 0.1.3. Funciones medibles. Integral de Lebesgue

#### 3.- Tipos de funciones que se pueden integrar

Una función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  se llama **medible** si  $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$  para todo intervalo abierto  $I$ .

Como ejemplos de funciones medibles, se pueden mencionar:

- las funciones continuas c.p.d.,
- funciones iguales c.p.d. a una función continua,
- las funciones características de los conjunto medibles.

Recuérdese que si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , se llama función **característica de  $A$** ,  $\chi_A$ , a la función  $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

#### 4.- Cómo hallar su integral

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Representamos por  $G(f)$  a la gráfica de dicha función, esto es,

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in E\}$$

y por  $R(f)$  al **recinto determinado por su gráfica y la recta  $y = 0$** , esto es,

$$R(f) = \{(x, y); x \in E, 0 < y < f(x)\}.$$

. Es sabido que si  $E$  es un conjunto medible entonces  $G(f)$  y  $R(f)$  son dos conjuntos medibles en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\lambda(G(f)) = 0$ . Nótese que, dado que  $\lambda(G(f)) = 0$ , si las desigualdades estrictas que definen el conjunto  $R(f)$  se pueden sustituir por igualdades.

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función medible. Se define **la integral de  $f$  en  $E$  como la medida del recinto  $R(f)$** , esto es,

$$\int_E f d\lambda = \lambda(R(f)).$$

### 0.1.4. Funciones integrables

Dada una función medible  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es **integrable** en  $E$  si

$$\int_E |f| \, d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la **integral de  $f$**  por

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E f^+ \, d\lambda - \int_E f^- \, d\lambda,$$

donde  $f^+ = \text{Max}\{f, 0\}$  y  $f^- = \text{Max}\{-f, 0\}$  (nótese que ambas funciones son medibles positivas).

Dicha integral recibe el nombre **integral de Lebesgue de  $f$  en  $E$** .

Notaremos por  $L(E)$  al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en  $E$ , esto es

$$L(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible; } \int_E |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

#### Propiedades

Comentemos algunas de sus propiedades más interesantes:

1)  $L(E)$  es un espacio vectorial y

$$\int_E (rf + g) \, d\lambda = r \int_E f \, d\lambda + \int_E g \, d\lambda, \quad (r \in \mathbb{R}, f, g \in L(E)).$$

2)

$$\left| \int_E f \, d\lambda \right| \leq \int_E |f| \, d\lambda, \quad (f \in L(E))$$

3) Si  $f$  y  $g$  son medibles e iguales c.p.d., entonces  $f$  es integrable en  $E$  si, y sólo si, lo es  $g$ , y en tal caso

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda.$$

4) Sean  $E, A$  y  $B$  tres conjuntos medibles tales que  $E = A \cup B$  y  $\lambda(A \cap B) = 0$ . Entonces  $f$  es integrable en  $E$  si, y sólo si,  $f$  es integrable en  $A$  y  $B$ . Además, en caso afirmativo

$$\int_E f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.$$

5)  $\lambda(E) = \int_E 1 \, d\lambda.$

6)

**Teorema 0.1.1.** (*del cambio de variable*)

Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\phi : U \rightarrow V$  una función biyectiva de clase  $\mathcal{C}^1(U)$  cuyo jacobiano es no nulo en todo punto de  $U$ . Sea  $E$  un subconjunto medible contenido en  $U$  y sea  $f : \phi(E) \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Entonces

$$\int_{\phi(E)} f \, d\lambda = \int_E f \circ \phi |J_\phi| \, d\lambda.$$

Relación de ésta nueva integral con la integral de Riemann.

1) **Las funciones integrables de siempre son también integrables en el sentido de Lebesgue**

Sea  $n = 1$  y sea  $E = [\alpha, \beta]$ , con  $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ . Si  $f$  es integrable en el sentido de Riemann en  $E$  entonces  $f \in L(E)$  y en tal caso

$$\int_E f \, d\lambda = \int_\alpha^\beta f(x) \, dx.$$

2) **Añadimos nuevas funciones**

La función de Dirichlet es integrable en el sentido de Lebesgue; de hecho, dado que  $\mathbb{Q}$  es de medida nula, se tiene que

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 1.$$

3) **También las funciones positivas impropriamente integrables quedan bajo control**

En el caso en que admitamos que  $\alpha$  puede ser  $-\infty$  y  $\beta$  a su vez  $+\infty$ , y que  $f$  sea una función continua en  $I = ]\alpha, \beta[$ ,  $|f|$  es impropriamente integrable en el sentido de Riemann en  $I$  si, y sólo si,  $f \in L(I)$ , y en tal caso

$$\int_I |f| \, d\lambda = \int_\alpha^\beta |f(x)| \, dx.$$

a) **Seguimos teniendo las propiedades más interesantes de la integral de Riemann**

a)

**Teorema 0.1.2. (Regla de Barrow)** Si  $f \in L(I)$  y admite primitiva  $G$ , entonces existen los límites de  $G$  en  $\alpha$  y en  $\beta$ , y además se tiene

$$\int_I f \, d\lambda = \lim_{x \rightarrow \beta} G(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha} G(x).$$

En consecuencia,

b)

**Teorema 0.1.3. (de integración por partes)** Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $f'g$  y  $fg' \in L(I)$ . Entonces existen los límites de  $fg$  en  $\alpha$  y en  $\beta$ , y además se tiene

$$\int_I fg' \, d\lambda = \lim_{x \rightarrow \beta} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) - \int_I fg' \, d\lambda.$$

c)

**Teorema 0.1.4. (del cambio de variable)** Si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable, con  $\varphi'(t) \neq 0$  y  $f : \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, entonces  $f \in L(\varphi(I))$  si, y sólo si,  $f \circ \varphi \cdot \varphi' \in L(I)$  y

$$\int_{\varphi(I)} f \, d\lambda = \int_I f \circ \varphi \cdot \varphi' \, d\lambda.$$

### 0.1.5. Teorema de Fubini

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. Recuérdese que este problema, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió en  $\mathbb{R}$  usando la regla de Barrow, pero esta herramienta no está disponible ni en  $\mathbb{R}^2$  ni en  $\mathbb{R}^3$ . Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en  $\mathbb{R}$ . Para ello, consideremos las siguientes observaciones:

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ , notaremos, para cada  $x \in \mathbb{R}^p$ , por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada  $y \in \mathbb{R}^q$ , por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in E\}.$$

Es fácil probar que si  $E$  es un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^{p+q}$ , entonces  $E(x)$  y  $E(y)$  son subconjuntos medibles respectivamente de  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$ .

**Teorema 0.1.5.** (*Teorema de Fubini. Caso  $p = 1, q = 1$* )

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  medible y sea  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[ \int_{E(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left[ \int_{E(y)} f(x, y) dx \right] dy,$$

siendo  $\alpha_1 = \text{Inf } E_1$ ,  $\beta_1 = \text{Sup } E_1$ ,  $\alpha_2 = \text{Inf } E_2$ ,  $\beta_2 = \text{Sup } E_2$ , donde

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}; E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R}; E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando  $E = I \times J$ , siendo  $I, J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\int_E f(x, y) = \int_I \left[ \int_J f(x, y) dy \right] dx = \int_J \left[ \int_I f(x, y) dx \right] dy.$$

**Ejemplo:** Calcular el área de la elipse de semiejes  $a$  y  $b$ .

**Teorema 0.1.6.** (*Teorema de Fubini. Caso  $p = 2, q = 1$* )

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  medible y sea  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} \left[ \int_{E(z)} f(x, y) d(x, y) \right] dz,$$

siendo  $\alpha_3 = \text{Inf } E_3$ ,  $\beta_3 = \text{Sup } E_3$ , donde

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R}; E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para  $(p = 1, q = 2)$  sin más que considerar los conjuntos  $E[x]$  y  $E[y]$ .

**Ejercicio:** Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes  $a, b$  y  $c$ .

### 0.1.6. Interpretación de la integral.

#### Principio de Cavalieri

Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^3$ , tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}; E(x) \neq \emptyset\} = [a, b].$$

Según hemos visto en la lección anterior su volumen,  $\lambda(E)$ , viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1 \, d(x, y, z),$$

por lo que aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b \left( \int_{E(x)} 1 \, d(y, z) \right) dx = \int_a^b \lambda(E(x)) dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

#### Ejemplo:

Un leñador corta una pieza  $C$  con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo  $\pi/4$ . Calcúlese el volumen de dicha cuña.

#### El volumen de un sólido de revolución.

Obsérvese que si  $E$  es el sólido de revolución generado por la gráfica de una cierta  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$V(E) = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

como ya habíamos comentado anteriormente.

#### La integral en dos variables vista como un cierto volumen

Sea ahora  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  medible y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  un campo integrable en  $A$  tal que, para cada  $(x, y) \in A$ , se tiene que  $f(x, y) \geq 0$ . Obsérvese que como consecuencia del teorema de Fubini, si

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}; A(x) \neq \emptyset\} = [a, b],$$

entonces

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{A(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b S(x) dx,$$

donde, para cada  $x \in [a, b]$ ,  $S(x)$  es el área de la región del plano comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de la función  $g : A(x) \rightarrow \mathbb{R}$  definida para cada  $y \in A(x)$  por  $g(y) = f(x, y)$ . Aplicando finalmente el principio de Cavalieri, la integral

$$\int_A f(x, y) d(x, y)$$

puede interpretarse como el **volumen del sólido comprendido entre el plano  $z = 0$  y la gráfica del campo escalar  $f$** .

### Ejemplo:

Calcúlese el volumen de madera eliminado al taladrar, hasta el centro, una esfera de madera de radio 9 con una broca de radio 1.

## 0.1.7. Cambio de coordenadas

Es posible que convenga cambiar la función inicial por otra función. Este cambio será arbitrado por el teorema del cambio de variable, que suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

### Coordenadas polares, $n = 2$

Tomamos  $U = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[$ ,  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ , y la aplicación  $\phi : U \rightarrow V$  definida por

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

En este caso

$$\det J_\phi(\rho, \theta) = \rho > 0, \quad \forall (\rho, \theta) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d(\rho, \theta).$$

**Ejercicio:** Sea  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Calcúlese  $\int_E 1 d(x, y)$ .

Coordenadas cilíndricas,  $n = 3$ 

Tomamos  $U = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z); x \leq 0\}$ , y la aplicación  $\phi : U \longrightarrow V$  definida por

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

En este caso

$$\det J_\phi(\rho, \theta, z) = \rho > 0, \quad \forall (\rho, \theta, z) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d(\rho, \theta, z).$$

**Ejercicio:** Sea  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq r^2; 0 \leq z \leq h\}$ , con  $r, h > 0$ . Calcúlese  $\int_E 1 d(x, y, z)$ .

Coordenadas esféricas,  $n = 3$ 

Tomamos  $U = \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$ ,  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z); x \leq 0\}$ , y la aplicación  $\phi : U \longrightarrow V$  definida por

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

En este caso

$$\det J_\phi(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \cos \varphi > 0, \quad \forall (\rho, \theta, \varphi) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho^2 \cos \varphi d(\rho, \theta, \varphi).$$

**Ejercicio:** Sea  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ , con  $r > 0$ . Calcúlese su volumen.

**0.1.8. Relación de ejercicios**

a) Calcúlese las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_I \sin^2 x \sin^2 y \, d(x, y), \quad I = [0, \pi] \times [0, \pi].$$



- b)  $\int_I \frac{x^2}{1+y^2} d(x, y), I = [0, 1] \times [0, 1].$
- c)  $\int_I y \log x d(x, y), I = [1, e] \times [1, e].$
- d)  $\int_I x^3 y^3 d(x, y), I = [0, 1] \times [0, 1].$
- e)  $\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2} d(x, y), I = [0, 1] \times [0, 1].$
- f)  $\int_I x \log(xy) d(x, y), I = [2, 3] \times [1, 2].$
- g)  $\int_I y \cos(xy) d(x, y), I = [0, 1] \times [1, 2].$

b) Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , calcúlese su integral en los siguientes casos:

- a)  $f(x, y) = 1$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x^3$ ,  $y = x$ .
- b)  $f(x, y) = x^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $xy = 16$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 8$ .
- c)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .
- d)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  la región limitada por la recta que pasa por  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  y la circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radio 1.
- e)  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .
- f)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x$ .
- g)  $f(x, y) = xy^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = 2x$ ,  $x = 1$ .
- h)  $f(x, y) = xy$  siendo  $A$  la región limitada por la semicircunferencia superior  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  y el eje  $OX$ .
- i)  $f(x, y) = 4 - y^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = 2x$  y  $y^2 = 8 - 2x$ .
- j)  $f(x, y) = e^{x^2}$  siendo el conjunto  $A$  el triángulo formado por las rectas  $2y = x$ ,  $x = 2$  y el eje  $x$ .

c) Calcúlese  $\int_A f$  en cada uno de los casos siguientes:

- a)  $f(x, y) = 1 - x - y$ ,  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x + y \leq 1\}$
- b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- c)  $f(x, y) = x + y$ ,  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
- d)  $f(x, y) = x^2 y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
- e)  $f(x, y) = y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$
- f)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$
- g)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$
- h)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$
- i)  $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
- j)  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

- k)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$   
 l)  $f(x, y) = x y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$   
 m)  $f(x, y) = x^2 y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$   
 n)  $f(x, y) = x, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$

d) Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

- a)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, A = \bar{B}((0, 0), 1)$   
 b)  $f(x, y) = y, A = \{(x, y) \in B((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}) : y \geq 0\}$   
 c)  $f(x, y) = x^2 + y^2, A = \bar{B}((1, 0), 1)$   
 d)  $f(x, y) = x^2 + y^2, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

e) Calcúlense las siguientes integrales dobles:

- a)  $f(x, y) = x, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$   
 b)  $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2}, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$   
 c)  $f(x, y) = \exp(\frac{x}{y}), A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 \leq x \leq y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$   
 d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$   
 e)  $f(x, y) = x^2 + y^2, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2), x \geq 0\}$   
 f)  $f(x, y) = x^2 + y^2, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

f) Calcúlese el volumen de la región  $A$  definida por:

- a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - ry \leq 0\}$ .  
 b)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2, z(x^2 + y^2) \leq 1, z \geq 0\}$ .  
 c)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$ .  
 d)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$ .

g) Calcúlense las siguientes integrales triples:

- a)  $\int_I \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} d(x, y, z), I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .  
 b)  $\int_A z e^{-(x^2 + y^2)} d(x, y, z), A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2(x^2 + y^2) \leq z^2, z \geq 0, z \leq 1\}$ .  
 c)  $\int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z), A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4\}$ .  
 d)  $\int_A (x + y - 2z) d(x, y, z), A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0, z \leq 3\}$ .

- e)  $\int_A \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^n d(x, y, z)$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ).
- f)  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$
- g)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$
- h)  $f(x, y, z) = x^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, 4z^2 \geq 3(x^2 + y^2)\}$
- i)  $f(x, y, z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$
- j)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$
- k)  $f(x, y, z) = z^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$
- l)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$
- h) Demuéstrese que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{2\pi/a}$ , donde  $a > 0$ .
- i) Calcúlese  $\int_A f$  en cada uno de los casos siguientes:
- 1)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$
  - 2)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x^2 \leq y\}$
  - 3)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$
  - 4)  $f(x, y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 2\}$



# CAPÍTULO 1

---

## Sucesiones de funciones.

---

### 1.1. Sucesiones de funciones.

#### Sumario

En las aplicaciones del Análisis Matemático es frecuente que la solución a un cierto problema sea una función desconocida o no expresable en términos de funciones elementales que conocemos. Sí, en cambio, es frecuente que se conozcan funciones que se “aproximan” a la función solución; a menudo se puede disponer de una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  obtenidas en sucesivas aproximaciones al problema y que se “aproxime” en cierto sentido a la solución. En esta lección queremos dar sentido al concepto de “aproximación”. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.1.1 Motivación.

1.1.2 Tipos de convergencia. Criterio de Cauchy.

1.1.3 Convergencia, continuidad, derivación e integrabilidad.

1.1.4 Series de funciones.

1. 1.5 Relación de ejercicios.

### 1.1.1. Motivación

Hay diversas formas de aproximarse a una función. Para motivar este concepto vamos a considerar varios ejemplos:

#### Ejemplo 1:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = x^n$  ( $x \in [0, 1]$ ). Nótese que las funciones  $f_n$  son continuas en  $[0, 1]$  y que, para cada  $x \in [0, 1]$ , la sucesión  $\{f_n(x)\}$  es convergente.

Definamos la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $f(x) = \lim_n \{f_n(x)\}$ . Es claro que  $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1[$  y que  $f(1) = 1$ .

#### Ejemplo 2:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}$  para todo  $x \in ]0, 1]$  y cero en  $x = 0$ .

Nótese que, para cada  $x \in [0, 1]$ , la sucesión  $\{f_n(x)\}$  es nula.

#### Ejemplo 3:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + (1/n^2)}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Nótese que las funciones  $f_n$  son derivables en  $\mathbb{R}$  y que, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la sucesión  $\{f_n(x)\}$  es convergente.

Definamos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $f(x) = \lim_n \{f_n(x)\}$ . Es claro que  $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Obsérvese que en este caso, puesto que  $\sqrt{x^2 + (1/n)^2} \leq |x| + 1/n$ , deducimos que la convergencia de la sucesión  $\{f_n\}$  depende de la convergencia de la sucesión de números reales  $\{1/n\}$  pero es independiente del valor  $x$  considerado.

#### Ejemplo 4

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$  para todo  $x \in [0, 1/n]$  y cero en el resto de los puntos. Nótese que las funciones  $f_n$  son continuas en  $[0, 1]$  y que, para cada  $x \in [0, 1]$ , la sucesión  $\{f_n(x)\}$  es convergente.

Definamos la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $f(x) = \lim_n \{f_n(x)\}$ . Es claro que  $f = 0$ .

### 1.1.2. Tipos de convergencia. Condición de Cauchy.

En esta sección precisaremos el concepto de aproximación. Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones reales definidas en  $A$ .

a) Convergencia puntual.

Se dice que la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  **converge puntualmente en**  $B \subseteq A$ , si para cada  $x \in B$ , la sucesión de números reales  $\{f_n(x)\}$  es convergente. Al conjunto  $C := \{x \in A; \{f_n(x)\} \text{ es convergente}\}$  se le denomina **campo de convergencia** y a la función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \lim_n \{f_n(x)\}$ , se le denomina **función límite**.

Obsérvese que la sucesión de funciones del primer ejemplo converge puntualmente en  $[0, 1]$  a la función  $f$  allí definida y que la sucesión del segundo ejemplo converge puntualmente en  $\mathbb{R}$  a la función valor absoluto. Otro tanto se puede decir del ejemplo tercero.

b) Convergencia uniforme.

Dada una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  que converge puntualmente en  $C$  a una función  $f$ , se dice que la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  **converge uniformemente en**  $B \subseteq C$ , si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tal que } n \geq n_0 \text{ implica que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B.$$

Obsérvese que la sucesión dada en el primer ejemplo converge uniformemente en intervalos de la forma  $[0, r]$  con  $r < 1$ . No existe el concepto de campo de convergencia uniforme tal como se desprende del ejemplo considerado.

Damos ahora dos importantes caracterizaciones de gran utilidad de la convergencia uniforme.

#### Proposición 1.1.1.

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales,  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de  $A$  en  $\mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Equivalen

- a)  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $A$  a la función  $f$ .
- b) Dada cualquier sucesión  $\{a_n\}$  de elementos de  $A$  se verifica que la sucesión  $\{f_n(a_n) - f(a_n)\}$  es nula.
- c) Existe una sucesión de números reales  $\{r_n\}$  convergente a cero y un número natural  $p$  tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq r_n, \forall n \geq p, \forall x \in A.$$

Como consecuencia, deducimos que la convergencia de la sucesión de funciones del segundo ejemplo es uniforme en  $\mathbb{R}$ .

El segundo criterio para la determinación de la convergencia uniforme tiene la ventaja de no tener que conocer la función límite.

**Teorema 1.1.2.** *(Criterio de Cauchy)*

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de  $A$  en  $\mathbb{R}$ . Equivalen

- a) Existe  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $A$  a  $f$ .
- b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists m$  tal que  $p, q \geq n_0$  implica que  $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$ .

**1.1.3. Convergencia, continuidad e integrabilidad.**

En esta sección enunciaremos los resultados que relacionan la convergencia uniforme con los conceptos clave del análisis: continuidad, derivación e integración. Haremos sólo algunas demostraciones, dejando las más laboriosas para un posterior estudio.

Tal como vimos en el primer ejemplo la convergencia puntual no garantiza la continuidad de la función límite aún siendo continuas las funciones de la sucesión.

**Teorema 1.1.3.** *(Continuidad y convergencia uniforme)*

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de  $A$  en  $\mathbb{R}$ . Si la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $B \subseteq A$  y existe  $a \in B$  tal que las funciones  $f_n$  son continuas en  $a$  entonces la función límite  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $a$ .

El teorema sobre la continuidad se utiliza con frecuencia para probar que no hay convergencia uniforme comprobando que la función límite no es continua (véase primer ejemplo).

Conviene notar, por otra parte, que la continuidad de la función límite puntual de una sucesión de funciones continuas no exige que la convergencia sea uniforme tal como muestra el tercer ejemplo.

Como consecuencia de nuestro resultado anterior, vemos una condición suficiente para que el signo integral permute con el límite.

**Corolario 1.1.4.** *(Continuidad, convergencia uniforme e integración)*

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones continuas (resp. integrables) que converge uniformemente en un intervalo  $[a, b]$  de  $A$  a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  es continua (resp. integrable) en  $[a, b]$  y

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

La sucesión de las integrales de las funciones  $\{f_n\}$  del ejemplo (2) no converge a la integral de la función límite. En efecto, las funciones  $f_n$  son continuas y por tanto Riemann integrables con



$$\int_0^1 f_n(x)dx = \arctg(x\sqrt{n})\big|_0^1 = \arctg(\sqrt{n}),$$

y por tanto la sucesión  $\{\int_0^1 f_n(x)dx\}$  converge a  $\pi/2$  distinto del valor de la integral de la función nula.

Veamos finalmente la relación de la convergencia con la derivación. Viendo los precedentes, cabría esperar que la función límite fuese derivable siempre que lo fuesen las correspondientes funciones. Este hecho no es esperable tal como muestra el ejemplo tercero. No obstante, obtenemos a continuación un importante resultado relacionando ambos conceptos. Obsérvese que en este caso exigimos la convergencia de la sucesión de derivadas.

**Corolario 1.1.5.** (*Derivación y convergencia uniforme*)

Sea  $I$  un intervalo acotado y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de clase uno (resp. derivables) en  $I$ . Supongamos que existe  $a \in I$ , tal que la sucesión  $\{f_n(a)\}$  es convergente. Si la sucesión de las funciones derivadas  $\{f'_n\}$  converge uniformemente a una función  $g$  en  $I$  entonces  $\{f_n\}$  converge uniformemente a una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Además  $f$  es de clase uno (resp. derivable) en  $I$  con  $f'(x) = g(x)$ , para todo  $x \in I$ .

Finalizamos esta sección enunciando un profundo resultado sobre la aproximación de una función continua por polinomios.

**Teorema 1.1.6.** (*Teorema de Weierstrass*)

Sea  $f$  una función continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Entonces existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente a  $f$  en  $[a, b]$ .

De las muchas demostraciones que hay de dicho resultado, merece la pena comentar la que está basada en los polinomios de Bernstein.

Dados  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, se define el **polinomio de Bernstein de orden  $n$  de la función  $f$**  mediante la expresión

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} :$$

Se puede probar que la sucesión  $\{B_{n,f}\}$  converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  la función  $f$ . Para un intervalo arbitrario  $[a, b]$  se considera la función  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(t) = f(a + t(b-a))$ , y el polinomio buscado es  $p_n(x) = B_{n,g}(\frac{x-a}{b-a})$ .

La demostración puede verse en [?, Sección 10.5]

### 1.1.4. Series de funciones

El paso de la noción de sucesión de funciones al concepto de serie funcional sigue los mismos derroteros que el ya conocido para pasar de sucesiones de números reales a series de números reales.

Se llama **serie de funciones** a todo par ordenado de sucesiones de funciones reales  $(\{f_n\}, \{F_n\})$ , donde  $(\{f_n\})$  es una sucesión arbitraria de funciones y, para cada natural  $n$ , la segunda sucesión es tal que:  $F_n := \sum_{i=1}^n f_i$ . La sucesión  $\{F_n\}$  recibe el nombre de **sucesión de sumas parciales de la serie**. Dicha serie suele representarse por  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .

Las nociones de convergencia puntual y de convergencia uniforme se trasladan de manera natural a las series de funciones, basta para ello referirlas a la correspondiente convergencia para las sumas parciales:

Se dice que la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  **converge puntualmente** (resp. **uniformemente**) si la sucesión  $\{F_n\}$  de sus sumas parciales converge puntualmente (resp. **uniformemente**). Se llama **campo de convergencia de la serie** al campo de convergencia de la sucesión de sumas parciales. Si  $C$  es el campo de convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$ , podremos construir una función  $F : C \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , y que es denominada como **suma de la serie**.

En este contexto también podemos hablar de **convergencia absoluta** en un conjunto  $A$  de la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  si la serie  $\sum_{n \geq 1} |f_n|$  converge puntualmente en  $A$ . Como regla práctica para estudiar la convergencia puntual de una serie se recomienda empezar por el estudio de la convergencia absoluta de dicha serie. Para la convergencia uniforme hemos de tener en cuenta

**Lema 1.1.7.** *Sea  $\sum_{n \geq 1} f_n$  una serie de funciones cuyo campo de convergencia es un conjunto  $A$ . Si dicha serie converge uniformemente en un subconjunto  $B \subseteq A$  entonces la sucesión  $\{f_n\}$  converge a cero uniformemente en  $B$*

Como consecuencia de los teoremas ya establecidos obtenemos el siguiente resultado de fácil demostración teniendo en cuenta los teoremas que relacionan la continuidad (Teorema ??), la integral (corolario ??) y la derivación (corolario ??) con la convergencia uniforme.

**Corolario 1.1.8.** *Sea  $A$  un conjunto no vacío de números reales y sea  $\sum_{n \geq 1} f_n$  una serie de funciones en  $A$ . Entonces*

- a) *Si las funciones  $f_n$  son continuas en un punto  $a \in A$  y la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformemente en  $A$  entonces la función suma  $F$  es continua en  $a$ .*

- b) Si las funciones  $f_n$  son continuas en  $[a, b] \subseteq A$  y la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformemente en  $[a, b]$  entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n$  es convergente y su suma es  $\int_a^b F$ .
- c) Si las funciones  $f_n$  son de clase uno en  $J \subseteq A$  intervalo acotado, la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge puntualmente en  $a \in A$  y la serie  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge uniformemente en  $J$ , entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformemente en  $J$  a una función derivable  $F$  que verifica:  $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  para todo  $x \in J$ .

El criterio de Cauchy ya comentado proporciona una poderosa herramienta para el estudio de la convergencia uniforme de una serie de funciones, a saber

**Teorema 1.1.9.** (Test de Weierstrass)

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $\sum_{n \geq 1} f_n$  una serie de funciones definidas en  $A$  y sea  $B$  un subconjunto de  $A$ . Supongamos que existe una sucesión  $\{a_n\}$  de números reales tal que  $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in B$ . Si la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente, entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $B$ .

El problema que se plantea cuando el test de Weierstrass no es aplicable es similar al que tenemos cuando una serie de números reales no es absolutamente convergente y deseamos saber si al menos es convergente. De entre los varios criterios que existen para las series de términos cualesquiera, nosotros nos habíamos quedado con el criterio de Leibnitz.

Nosotros establecemos un criterio de Leibnitz para series de funciones. Antes necesitamos probar el siguiente resultado técnico:

**Lema 1.1.10.** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}$  y  $b_1, b_2, \dots, b_p$  números reales. Si representamos por  $B_k := \sum_{i=1}^k b_i$  entonces

$$\sum_{k=1}^p a_k b_k = \sum_{k=1}^p B_k (a_k - a_{k+1}) + B_p a_{p+1}.$$

**Proposición 1.1.11.** (Criterio de Leibnitz) Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $\{g_n; n \in \mathbb{N}\}$  una familia de funciones definidas en  $A$ . Supongamos que la sucesión  $\{g_n(x)\}$  es monótona para cada  $x \in A$  y que la sucesión  $\{g_n\}$  converge uniformemente a cero en  $A$ . Entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n g_n$  converge uniformemente en  $A$ .

### 1.1.5. Relación de ejercicios

- a) Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma  $[0, a]$  y  $[a, +\infty[$ , donde  $a > 0$ , de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas para todo  $x \geq 0$  por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}.$$

- b) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , consideremos la sucesión de funciones  $\{f_n\}$ , donde  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida para todo  $x \in [0, 1]$  por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n.$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  hay convergencia uniforme en  $[0, 1]$ ? ¿Para qué valores de  $\alpha$  hay convergencia uniforme en  $[\rho, 1]$ , donde  $\rho \in ]0, 1[$ ?

- c) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  y la convergencia uniforme en los intervalos  $[0, a]$  y  $[a, \pi/2]$ , donde  $0 < a < \pi/2$ .

- d) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n : ]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n \sin x} \quad (0 < x < \pi).$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo  $]0, a]$ ,  $[a, \pi[$  y  $[a, b]$ , donde  $0 < a < b < \pi$ .

- e) Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$ , donde  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- f) Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma  $] -\infty, -a]$ ,  $[-a, a]$  y  $[a, +\infty[$ , donde  $a > 0$ , de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas por

$$f_n(x) = n \sin(x/n) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- g) Estudia la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ , de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$  por:

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{n+x}{1+nx}\right).$$

h) Sea, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)} \quad (x \geq 0).$$

Prueba que la serie  $\sum f_n$  converge

- 1) puntualmente en  $\mathbb{R}_0^+$  si  $\alpha > 0$
- 2) uniformemente en semirrectas cerradas que no contienen al cero.
- 3) uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$  si  $\alpha > 1/2$ .

i) Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie  $\sum f_n$ , donde  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

j) Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie  $\sum f_n$ , donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx} \quad (x \geq 0).$$

k) En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  y, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se define una función  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en  $A$  de la serie de funciones  $\sum f_n$ , y la continuidad de la función suma  $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

- 1)  $A = \mathbb{R}$  y  $f_n(x) = e^{-nx}$ .
- 2)  $A = \mathbb{R}$  y  $f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(n^2 x)}{n(\log(n+1))^2}$ .
- 3)  $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$  y  $f_n(x) = \frac{1}{n^2 - x^2}$ .
- 4)  $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  y  $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 - x^{2n+1}}$ .

l) Estudia la derivabilidad de la función de Riemann  $\xi : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida para todo  $x > 1$  por:  $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ . Justifica también que  $\lim_{x \rightarrow 1} \xi(x) = +\infty$ .



## 1.2. Series de potencias.

### Sumario

Esta lección está dedicada al estudio de un tipo muy particular de series funcionales: las series de potencias. Éstas nos proporcionan un método expeditivo para construir nuevas funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$  no racionales. En particular, reaparecerán la mayoría de las funciones elementales, lo que nos permitirá un mejor conocimiento de éstas. La técnica usada consiste en dar sentido al concepto de polinomio de Taylor de “grado infinito”. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

- 1.2.1 Series de potencias
- 1.2.2 Funciones definidas por series de potencias.
- 1.2.3 Desarrollo en serie de potencias.
- 1.2.4 Aplicaciones: Suma de series de números reales
- 1.2.5 Relación de ejercicios.

### 1.2.1. Series de potencias

Sean  $a \in \mathbb{R}$  y  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales. La serie funcional  $(f_n(x) = a_n(x - a)^n)$

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n$$

recibe el nombre de **serie de potencias centrada en  $a$** . A los términos de la sucesión  $\{a_n\}$ , se les denomina **coeficientes** de la serie de la serie de potencias.

Dado  $J \subseteq \mathbb{R}$ , se dice que la serie de potencias converge

- a) **puntualmente en  $J$** , si la serie  $\sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n$  converge en  $J$ .

Se suele notar, para cada  $x \in J$ , por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$$

a la **suma** de dicha serie.

- b) **absolutamente en  $J$**  si la serie  $\sum_{n \geq 0} |a_n(x - a)^n|$  converge en  $J$ .

- c) **uniformemente en  $J$**  si converge puntualmente en  $J$  y si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un natural  $n_0$ , de forma que si  $n \geq n_0$ , entonces, para todo  $x \in J$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k - \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k \right| < \epsilon.$$

Como primer resultado, establecemos el siguiente importante resultado

**Corolario 1.2.1. (Criterio de Weierstrass)**

Sea  $J$  un subconjunto no vacío de números reales,  $a \in \mathbb{R}$  y  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales. Supongamos que existe una sucesión de números reales  $\{\alpha_n\}$  tal que

$$|a_n(x-a)^n| \leq \alpha_n, \quad \forall x \in J, \forall n$$

y tal que la correspondiente serie  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$  es convergente. Entonces la serie de potencias centrada en  $a$  converge absolutamente y uniformemente en  $J$

Este resultado nos proporciona un método general para estudiar la convergencia puntual y uniforme de cualquier serie de potencias.

**Lema 1.2.2. (Lema de Abel)**

Sean  $a \in \mathbb{R}$  y  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales. Supongamos que existe  $r > 0$  tal que la sucesión  $\{a_n r^n\}$  está acotada. Entonces la serie funcional  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  converge absoluta y uniformemente en el intervalo  $[a-\rho, a+\rho]$ , siempre que  $0 < \rho < r$ .

La búsqueda del número positivo  $r$  "más grande posible" que cumpla la hipótesis del Lema de Abel motiva el concepto de radio de convergencia. Concretamente:

Sean  $A := \{r \in \mathbb{R}^+; \{a_n r^n\} \text{ está acotada}\}$  y  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  la serie de potencias asociada.

- Si  $A = \emptyset$ , diremos que el **radio de convergencia** de la serie  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  es igual a cero,  $R = 0$ .
- Si  $A \neq \emptyset$  y  $A$  no está mayorado, diremos que el **radio de convergencia** de dicha serie es **infinito**,  $R = \infty$ .
- Si  $A \neq \emptyset$  y  $A$  está mayorado diremos que el correspondiente **radio de convergencia** es el **supremo** del conjunto  $A$ , esto es  $R = \sup(A)$ .



En lo que sigue, cuando hagamos referencia al conjunto  $A$  no será otro que el introducido aquí.

Observemos que el radio de convergencia es independiente del centro  $a$  de la serie. Además, como veremos en el siguiente resultado, el conocimiento del radio de convergencia proporciona casi toda la información sobre la convergencia de la serie.

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n$  una serie de potencias cuyo radio de convergencia es  $R$ .*

- a) *Si  $R$  es cero, entonces la serie sólo converge en  $a$ .*
- b) *Si  $R$  es infinito, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ .*
- c) *Si  $R \in \mathbb{R}^+$ , entonces la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado contenido en  $]a - R, a + R[$  y no converge en ningún punto de  $\mathbb{R} \setminus [a - R, a + R]$ .*

Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n$  una serie de potencias, cuyo radio de convergencia  $R$  es no nulo (serie de potencias no trivial). Si  $R \in \mathbb{R}^+$ , llamemos  $I$  al intervalo  $]a - R, a + R[$  e  $I = \mathbb{R}$  si  $R$  es infinito. En adelante, nos referiremos al intervalo  $I$  como el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n$ .

### Nota

Antes de proseguir, conviene resaltar, que si el radio es un número real positivo  $R$ , nada se puede afirmar sobre la convergencia en los extremos del intervalo. De hecho, existen series de potencias con idéntico radio de convergencia pero con distinto carácter de convergencia en dichos puntos, piénsese por ejemplo en las siguientes series cuyo radio de convergencia es uno,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}(x-a)^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-a)^n.$$

Este hecho motiva el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en .

### Teorema 1.2.4. Teorema de Abel

*Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n$  una serie de potencias, cuyo radio de convergencia  $R$  es no nulo. Si la serie converge en el punto  $a + R$  (resp.  $a - R$ ) entonces lo hace uniformemente en el intervalo  $[a, a + R]$  (resp.  $[a - R, a]$ ).*

La demostración requiere del siguiente

**Lema 1.2.5.** Sea  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$  una serie (no necesariamente convergente) cuya sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  está acotada por un valor  $M > 0$ . Sea  $\{b_n\}$  una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces para todo  $p \in \mathbb{N}$ , se tiene  $|\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_p b_p| \leq M b_1$

Busquemos ahora un procedimiento expeditivo para determinar el radio de convergencia.

**Proposición 1.2.6.** Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  una serie de potencias cuyos coeficientes son no nulos y sea  $R$  su radio de convergencia.

- a) Si la sucesión  $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$  converge a un número real positivo  $L$ , entonces  $R = \frac{1}{L}$ .
- b) Si la sucesión  $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$  converge a cero,  $R = \infty$ .
- c) Si la sucesión  $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$  diverge positivamente, entonces  $R = 0$ .

De forma totalmente análoga, haciendo uso del criterio de la raíz, se prueba el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.7.** Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  una serie de potencias y supongamos que la sucesión  $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$  converge a  $L \in [0, +\infty[$ . Entonces si  $L = 0$  el radio de convergencia de la serie es  $R = +\infty$ , si  $L = +\infty$  el radio de convergencia de la serie es  $R = 0$  y si  $L \in \mathbb{R}^+$  el radio de convergencia de la serie es  $R = 1/L$ .

### 1.2.2. Funciones definidas por series de potencias

Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  una serie de potencias no trivial cuyo radio de convergencia es  $R$ , y sea  $I$  su intervalo de convergencia. Podemos definir la función suma:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

mediante la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Veamos que dichas funciones son también derivables en  $I$ . Antes necesitamos el siguiente

**Lema 1.2.8.** Las series  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  y  $\sum_{n \geq 1} n a_n(x-a)^{n-1}$  tienen igual radio de convergencia.

**Teorema 1.2.9.** *Sea  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  una serie de potencias no trivial,  $I$  su intervalo de convergencia y sea  $f$  la función suma, entonces  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty(I)$  y para cada  $x \in I$  y  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene que*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (x-a)^n.$$

En particular,

$$f^{(k)}(a) = k! a_k.$$

Si además la serie es convergente en  $a+R$  entonces  $f$  se puede extender al intervalo  $]a-R, a+R]$ , con  $f(a+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  resultando una función continua en  $]a-R, a+R]$ .

Veamos ahora algunas consecuencias de los últimos resultados.

- a) La suma de una serie de potencias puede derivarse como si se tratase de una suma finita.

Nótese que la fórmula del teorema anterior de las derivadas sucesivas de la función definida por una serie de potencias, significa simplemente que dichas derivadas pueden obtenerse derivando cada uno de los términos de la serie de partida.

- b) La serie de potencias está totalmente determinada.

La misma fórmula del teorema anterior nos dice que en caso de que una función  $f$  pueda escribirse como suma de una serie de potencias, dicha serie está completamente determinada, de hecho, en cada punto  $a \in I$ ,

$$a_n = f^{(n)}(a)/n!,$$

de ahí que la correspondiente serie reciba el nombre de **serie de Taylor**.

El siguiente resultado es otra consecuencia inmediata del teorema de derivación y nos dice que siempre podemos calcular una primitiva de una serie de potencias expresándola por medio de otra serie de potencias.

**Corolario 1.2.10.** *(Primitiva de una serie de potencias)*

Las series de potencias  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$  y  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$  tiene igual radio de convergencia. Supuesto que dicho radio de convergencia es no nulo y llamando  $I$  al intervalo de convergencia, se verifica que la función suma

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad (x \in I)$$

es una primitiva de la función suma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad (x \in I).$$

En otros términos, este resultado afirma que para cada  $x \in I$  se verifica la igualdad:

$$\int_a^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

**Ejemplo 1.2.11.** Sabemos que para cada  $x \in ]-1, 1[$ :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n,$$

por lo que integrando término a término se obtiene que la función:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

función que es derivable en  $] -1, 1[$  con derivada  $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ . Por tanto, las funciones  $h$  y  $f(x) = \log(1+x)$  tienen la misma derivada en  $] -1, 1[$  y, como  $h(0) = f(0)$ , concluimos que  $h(x) = \log(1+x)$ , esto es, para cada  $x \in ] -1, 1[$  se tiene que:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

### Aplicación a otras series funcionales

Obsérvese que la serie funcional  $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$  no es una serie de potencias, pero que, sin embargo, podemos asociarle una serie de potencias, concretamente la serie  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ , donde para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $b_{2n} = a_n$  y  $b_{2n+1} = 0$ . Si notamos por  $\{F_n\}$  a la sucesión de sumas parciales de  $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$  y por  $\{G_n\}$  a la de  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ , es claro que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_{2n+1} = F_n$  y  $G_{2n} = F_n$ , y por tanto la serie converge  $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$  converge en un punto  $x$ , si, y sólo si, lo hace la serie  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ , y lo mismo puede decirse de la convergencia uniforme. Esto nos permite aplicar a este tipo de series funcionales las propiedades (acerca de la continuidad, derivación e integración) vistas para las series de potencias. La dificultad se presenta a la hora de calcular el radio de convergencia de la serie de potencias asociada, ya que algunos de los coeficientes son cero. Así, en la práctica, para estudiar su convergencia, previamente calculamos el radio de convergencia  $R$  de la serie  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Si  $R \in \mathbb{R}^+$ , y deducimos que la serie  $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$  converge en  $x$  si  $x^2 < R$ , es decir, si  $|x| < \sqrt{R}$ . Recapitulando, la serie funcional  $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$  converge absoluta y uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en  $] -\sqrt{R}, \sqrt{R}[$  y no converge en ningún punto  $x$  tal que  $|x| > R$ . Si  $R$  es infinito, la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.3. Desarrollo en serie de Taylor

Hemos visto pues que toda serie definida por una serie de potencias es de clase  $C^\infty$  en el intervalo de convergencia  $I$ . ¿Es cierto recíproco? Es decir, si  $f$  es de clase  $C^\infty$  en un cierto intervalo  $I$ , ¿se puede asegurar que la función es la suma de una serie de potencias? En general la respuesta es no.

Existen funciones de clase  $C^\infty$  para las cuales la serie de Taylor tiene radio de convergencia cero

“ E. Borel afirma que dada cualquier sucesión  $\{b_n\}$  de números reales y cualquier número real  $a$ , existe  $\delta > 0$  y una función  $f$  de clase  $C^\infty$  en  $]a - \delta, a + \delta[$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(a) = b_n$ . Por tanto, si tomamos  $b_n = (n!)^2$ , y  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!(x-a)^n$  obtenemos una función de clase  $C^\infty$  en  $]a - \delta, a + \delta[$  (para conveniente  $\delta > 0$ ) cuya serie de Taylor tiene radio de convergencia cero”.

Existen funciones para las cuales la suma de su serie de Taylor no coincide con la función más que en el punto que la generó, por ejemplo,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \neq 0, \quad f(0) = 0 \quad (\text{en este caso } f^{(n)}(0) = 0).$$

El siguiente resultado nos da una condición suficiente para que una función sea suma de una serie de potencias

**Proposición 1.2.12.** *Sea  $I$  un intervalo y  $f$  un función de clase  $C^\infty$  en  $I$ . Supongamos que existe  $M > 0$  tal que, para cada  $x \in I$  y cada  $n \in \mathbb{N}$ , se verifica que:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,$$

*entonces, para cualesquiera  $a, x \in I$ , se tiene que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Y como consecuencia obtenemos los siguientes desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales.

#### Corolario 1.2.13.

*Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene:*

$$a) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

$$b) \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$c) \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Pero también podemos obtener desarrollos de otras funciones elementales.

**Proposición 1.2.14.** *Para cada  $x \in ]-1, 1[$ , se tiene:*

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Nótese que el desarrollo en serie de la función arcotangente, recién obtenido, es válido sólo en  $] -1, 1[$  y no en todo  $\mathbb{R}$  como cabría esperar a primera vista, dado que la función arcotangentes es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.4. Aplicaciones: Suma de series de números reales

Para finalizar, vamos a dar dos ejemplos de cómo sumar dos series de números reales usando las series de potencias.

Sabemos que, para cada  $x \in ]0, 2[$ ,

$$\log(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Abel, el segundo miembro define la función  $g : ]0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1},$$

la cual es continua en 2, obtenemos así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \log(x) = \log 2.$$

Tal como advertimos en el comienzo del capítulo el conocimiento de las series de potencias nos proporcionan un método de aproximación de los valores  $\log 2$ .

### 1.2.5. Relación de ejercicios

- a) Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias  $\sum_n a_n x^n$  y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$a_n = \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}, \quad a_n = (n + 1)^{\log(n+1)}, \quad a_n = e - (1 + 1/n)^n.$$

$$a_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n, \quad a_n = a^{\sqrt{n}} \quad (a > 0).$$

$$a_n = \frac{1}{\log(n+2)}, \quad a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}.$$

b) Calcúlese el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 1} n x^n ; \sum_{n \geq 1} n^2 x^n ; \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)^3}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

c) Calcula la función suma de la serie de potencias  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ .

d) Calcula la función suma de las series de potencias  $\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n}$  y  $\sum_{n \geq 1} \frac{n(x+3)^{3n}}{2^n}$ .

e) Expresa la función suma de las series de potencias  $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$  y  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$  por medio de funciones elementales y calcula el valor de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$ .

f) Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \dots + n} x^n.$$

g) Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, \quad g(0) = 1 \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(0) = 1.$$

son de clase  $C^\infty$  en su intervalo natural de definición.

h) Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en un punto  $a$  de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}.$$

i) Demuéstrese, usando el desarrollo en serie de Taylor de la función arco-tangente, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4.$$





## CAPÍTULO 2

---

### integral de Lebesgue

---

## 2.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

### Sumario

El objetivo de esta lección es contestar a la primera pregunta: ¿sobre qué tipo de conjuntos se puede integrar?. Veremos que la respuesta está relacionada con la respuesta a otras tantas preguntas: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos? El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.1.1 Conjuntos medibles

2.1.2 Construcción de la medida de Lebesgue. Medida exterior.

2.1.3 Teoremas de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue.

2.1.4 Relaciones de la medida con las aplicaciones y con el producto cartesiano.

2.1.5 Relación de ejercicios.

En todo lo que sigue  $N$  será un número natural.

### 2.1.1. Conjuntos medibles

¿Qué conjuntos que se pueden medir?

Veamos primero algunos conjuntos que deben estar forzosamente entre la familia de los conjuntos "medibles".

Dado  $I$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  diremos que es un **intervalo** (respectivamente **intervalo acotado**), si existen  $I_1, I_2, \dots, I_N$  intervalos (respectivamente intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N.$$

Veamos cómo añadir a partir de aquí nuevos conjuntos. Para ello necesitamos introducir algunos conceptos.

Sea  $\Omega$  un subconjunto no vacío. Se dice que una familia  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  **$\sigma$ -álgebra** si

- i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- ii) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ , y
- iii) Si  $A \in \mathcal{A}$  entonces  $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ .

Al par  $(\Omega, \mathcal{A})$  se le denomina **espacio medible**. El conjunto  $\mathcal{P}(\Omega)$  de todos los subconjuntos es un ejemplo de  $\sigma$ -álgebra. Es claro además que la intersección de  $\sigma$ -álgebras es una nueva  $\sigma$ -álgebra. Como consecuencia, si  $\mathcal{S}$  es una familia de subconjuntos de  $\Omega$ , entonces existe una menor  $\sigma$ -álgebra conteniendo a  $\mathcal{S}$  y contenida en  $\mathcal{P}(\Omega)$ , que denominaremos la  **$\sigma$ -álgebra engendrada** por  $\mathcal{S}$ .

Veamos algunas propiedades de las  $\sigma$ -álgebras.

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible. Entonces*

- a)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- b) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .
- c) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .
- d) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ .
- e) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Ejemplos:

a) Sean  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y  $E \in \mathcal{A}$ . Considérese el conjunto

$$\mathcal{A}_E = \{A \cap E; A \in \mathcal{A}\}.$$

Es fácil probar que  $(E, \mathcal{A}_E)$  es un nuevo espacio medible. En adelante, salvo advertencia en caso contrario, entenderemos que la  $\sigma$ -álgebra considerada en  $E$  no es otra que  $\mathcal{A}_E$ .

b) Dado  $\Omega$  un espacio topológico podemos considerar la  $\sigma$ -álgebra engendrada por la familia de los conjuntos abiertos de  $\Omega$ , familia que llamaremos  **$\sigma$ -álgebra de Borel**,  $\mathbf{B}^\Omega$  ( $\mathbf{B}^N$  si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  dotado con su topología natural), mientras que a sus elementos los llamaremos **conjuntos borelianos**.

Obsérvese que tanto los conjuntos que resultan de la intersección numerable de conjuntos abiertos (conjuntos tipo  $G_\delta$ , conjuntos no necesariamente abiertos) como los conjuntos que resultan de la unión numerable de conjuntos cerrados (conjuntos tipo  $F_\delta$ , conjuntos no necesariamente cerrados) son también conjuntos borelianos.

### Veamos ahora cómo medir conjuntos.

Una vez elegida la familia de conjuntos medibles el problema es asignarle una medida.

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible. Se dice que una aplicación

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

es una **medida sobre  $\mathcal{A}$**  si verifica las siguientes propiedades:

- a) Existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$ .
- b) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$ , disjuntos dos a dos, entonces  $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ . (propiedad de  $\sigma$ -aditividad)

A la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  se le denomina **espacio de medida**.

### Ejemplo:

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $\mu$  la función definida, en cada  $A \in \mathcal{A}$ , por  $\mu(A)$  = número de elementos de  $A$ , si  $A$  es finito, y  $\mu(A) = +\infty$  en otro caso. Pues bien, la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  es un ejemplo de espacio de medida.

Veamos algunas propiedades de las medidas.

**Proposición 2.1.2.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Entonces*

- a)  $\mu(\emptyset) = 0$

- b) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  son disjuntos entonces  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  (propiedad de aditividad).
- c) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  y  $A \subseteq B$  entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (propiedad de monotonía). Si además  $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$  entonces  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .
- d) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$  creciente ( $A_n \subseteq A_{n+1}$ ), entonces

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

(propiedad de continuidad creciente).

- e) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$  decreciente ( $A_{n+1} \subseteq A_n$ ) con  $\mu(A_1) \in \mathbb{R}^+$  entonces

$$\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

(propiedad de continuidad decreciente).

- f) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$  (propiedad de subaditividad).
- g) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(propiedad de  $\sigma$ -subaditividad)

Nótese que la condición exigida en 5) sobre la finitud de la medida de  $A_1$  es esencial tal como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Sea  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por la familia  $\{[n, +\infty[; n \in \mathbb{N}\}$  y sea  $\mu$  una medida tal que restringida a cada intervalo  $I \in \mathcal{A}$  viene definida por  $\mu(I) = \text{longitud}(I)$ . Tómesese  $A_n = [n, +\infty[$

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Un conjunto  $A \in \mathcal{A}$  se dice que de **medida nula** si  $\mu(A) = 0$ . Como consecuencia de la propiedad de  $\sigma$ -aditividad se deduce que la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula.

Un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  se dice **completo** si todo subconjunto  $B$  de un conjunto  $Z \in \mathcal{A}$  de medida nula es también un conjunto de la propia  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ ).

Una propiedad  $P$  relativa a elementos del conjunto  $\Omega$  se dice ser cierta **casi por doquier (c.p.d.)** si es cierta salvo en un conjunto de medida nula.

Así por ejemplo, dos funciones  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se dicen que son iguales c.p.d. si el conjunto  $\{x \in \Omega; f(x) \neq g(x)\}$  es un conjunto de medida nula.

### 2.1.2. Construcción de la medida de Lebesgue. Medida exterior.

En esta sección vamos a construir una medida sobre una cierta  $\sigma$ -álgebra contenida en  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  y que contiene a la familia  $\mathcal{I}^N$  de los intervalos acotados. Es deseable que si  $I \in \mathcal{I}^N$  entonces su medida deba coincidir con su volumen, esto es,  $medida(I) = V(I)$ , y claro está

$$V(I) = l(I_1)l(I_2)\dots l(I_N),$$

donde  $l(I_k) = b_k - a_k$ , siempre que  $I_k = [a_k, b_k]$ . Convenimos que  $0 \cdot \infty = 0$ .

Veamos pues si es posible encontrar una medida sobre  $\mathbb{R}^N$ , que extienda el volumen. La idea intuitiva es "cuadricular" el plano e imponer que la medida del conjunto sea menor que la suma del volumen de todas las cuadrículas que recubren (por exceso) al conjunto  $A$ . Es notorio que si las dimensiones de las cuadrículas son de menor tamaño, la suma de dicho volumen se ajusta mejor a la "medida" del conjunto  $A$ . Así pues, una primera idea sería tomar

$$medida(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n : n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathcal{I}^N, \right\}.$$

El problema a considerar es si la aplicación  $\lambda^* : A \mapsto medida(A)$  es verdaderamente una medida en  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ . Veremos enseguida que  $\lambda^*$  **no es una medida** en  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ . Sin embargo,

#### Proposición 2.1.3.

- a)  $\lambda^*(\emptyset) = 0$ .
- b) Si  $A \subseteq B$  son dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$  entonces  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ .
- c) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$ , entonces

$$\lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

(propiedad de  $\sigma$ -subaditividad)

Tomando ocasión del resultado anterior, dado un conjunto  $\Omega$ , diremos que una aplicación

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

es una **medida exterior** sobre  $\mathcal{P}(\Omega)$  si verifica las siguientes propiedades:

- a)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
- b) Si  $A \subseteq B$  son dos subconjuntos de  $\Omega$  entonces  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .

c) Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de subconjuntos de  $\Omega$ , entonces

$$\mu^*(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(propiedad de  $\sigma$ -subaditividad)

Así pues, hemos probado que  $\lambda^*$  es una medida exterior sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ , a la que denominaremos **medida exterior de Lebesgue**. De hecho, como veremos enseguida nos podemos quedar con los intervalos acotados abiertos para la definición de  $\lambda^*$ .

**Proposición 2.1.4.** *Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^N$*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n : n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathcal{I}^N, \text{abierto} \right\}.$$

Se puede probar que existe una mayor  $\sigma$ -álgebra contenida en  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  tal que  $\lambda^*$  restringida a dicha  $\sigma$ -álgebra es una medida. Este hecho es más general:

**Proposición 2.1.5.** *(Teorema de Carathéodory)*

*Si  $\Omega$  es un conjunto y  $\mu^*$  es una medida exterior sobre  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Entonces la familia*

$$\mathcal{C}_{\Omega, \mu^*} := \{E \subseteq \Omega; \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C), \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\},$$

*es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu^*/\mathcal{C}_{\Omega, \mu^*}$  es una medida.*

Sea  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$  y sea  $\delta > 0$ . Un **N-cubo de vértice  $a$  y lado  $\delta$** ,  $Q(a, \delta)$ , es un intervalo construido de la siguiente forma

$$Q(a, \delta) = [a_1, a_1 + \delta[ \times [a_2, a_2 + \delta[ \times \dots \times [a_N, a_N + \delta[.$$

Un N-cubo de vértice  $a$  y lado  $1/2^n$  se dice que es un **cubo diádico** si  $2^n a \in \mathbb{Z}^N$ .

**Lema 2.1.6.** *Dos cubos diádicos o bien son disjuntos o bien uno está contenido en el otro.*

**Lema 2.1.7.** *Dado un número natural  $n$  entonces*

- a) *El conjunto  $A_n^N := \{x \in \mathbb{R}^N; 2^n x \in \mathbb{Z}^N\}$  es un conjunto numerable.*
- b) *El conjunto de cubos diádicos  $\{Q(a, 1/2^n) : a \in A_n^N\}$  es una partición de  $\mathbb{R}^N$ .*

**Proposición 2.1.8.** *Si  $G$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^N$  entonces existe una sucesión de cubos diádicos  $\{Q_n\}$  cuyo cierre está contenido en  $G$ , disjuntos entre sí y tal que  $G = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$ .*

El siguiente resultado es una importante consecuencia de la Proposición ??.

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Escribiremos  $\mathcal{S}_\alpha$  (resp.  $\overline{\mathcal{S}_\alpha}$ ) para representar al semiespacio abierto (resp. cerrado) de  $\mathbb{R}^N$  definido por

$$\mathcal{S}_\alpha =: \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N; x_i < \alpha\} \text{ (resp. } \overline{\mathcal{S}_\alpha} =: \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N; x_i \leq \alpha\}).$$

**Corolario 2.1.9.** *La  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}^N$  de  $\mathbb{R}^N$  (dotado con la topología usual) coincide con la  $\sigma$ -álgebra generada por la familia de los intervalos acotados de  $\mathbb{R}^N$ .*

El siguiente resultado, último en la preparación del teorema de existencia, es conocido como la propiedad de **regularidad de la medida exterior de Lebesgue**.

**Proposición 2.1.10.** *Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  existe  $B \in \mathcal{B}^N$  que contiene a  $A$  cuya medida exterior de Lebesgue coincide con la de  $A$ .*

### 2.1.3. Teoremas de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue.

Sabemos que existen conjuntos borelianos en  $\mathbb{R}^N$  de medida exterior cero que contienen subconjuntos no medibles. Parece pues conveniente añadir a la  $\sigma$ -álgebra de Borel estos otros subconjuntos.

Ya podemos enunciar los resultados principales de esta lección.

**Teorema 2.1.11.** *(Teorema de la existencia de la medida de Lebesgue)*

- a) La familia  $\mathcal{M}^N := \{B \cup Z; B \in \mathcal{B}^N, \lambda^*(Z) = 0\}$  es una  $\sigma$ -álgebra contenida en  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^N, \lambda^*}$ .
- b)  $\lambda := \lambda^*/\mathcal{M}^N$  es una medida sobre  $\mathcal{M}^N$  tal que  $\lambda(I) = v(I)$  para todo  $I$  intervalo acotado.
- c) Para cada  $E \in \mathcal{M}^N$ ,

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(G); G \text{ abierto } E \subseteq G\}. \quad (2.1.1)$$

A la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}^N$  se le denomina  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue. La medida  $\lambda$  recibe el nombre de **medida de Lebesgue** de  $\mathbb{R}^N$ . A los elementos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}^N$  se les denomina **conjuntos medibles-Lebesgue** o simplemente **medibles** de  $\mathbb{R}^N$ . Nótese que el espacio de medida  $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}^N, \lambda)$  es un espacio de medida completo.

Tal como hemos visto, los conjuntos medibles se pueden representar por  $A = B \cup Z$ , donde  $B$  es un boreliano y  $Z$  es un subconjunto de un boreliano de medida nula. Nótese que en tal caso  $\lambda(A) = \lambda(B)$ .

De hecho veremos que  $\lambda$  es la **única** medida sobre  $\mathcal{M}^N$  verificando la segunda propiedad. Antes necesitamos alguna notación.

Consideramos en  $\mathbb{R}^N$  la norma euclídea  $\|\cdot\|$ , esto es, para cada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ , se tiene que

$$\|x - y\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_N - x_N)^2}.$$

Representaremos por  $B(a, r)$  al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x - a\| < r\},$$

con  $a \in \mathbb{R}^N$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Es claro que todo intervalo acotado está contenido en un conjunto de la forma  $B(0, r)$ , con conveniente  $r \in \mathbb{R}^+$ .

El siguiente resultado, importante en sí mismo, es fundamental en todo lo que sigue.

**Proposición 2.1.12.** *Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ . Equivalen*

- a)  $E \in \mathcal{M}^N$ .
- b)  $E \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^N, \lambda^*}$ .
- c) Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $G$  abierto de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $E \subseteq G$  y  $\lambda^*(G \cap E^C) < \varepsilon$ .
- d) Existe un conjunto de tipo  $G_\delta$   $A$ , tal que  $E \subseteq A$  y  $\lambda^*(A \cap E^C) = 0$ .
- e) Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $F$  cerrado de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $F \subseteq E$  y  $\lambda^*(E \cap F^C) < \varepsilon$ .
- f) Existe un conjunto de tipo  $F_\sigma$ ,  $B$ , tal que  $B \subseteq E$  y  $\lambda^*(E \cap B^C) = 0$ .

En tal caso,

$$\lambda(E) = \text{Sup}\{\lambda(K); K \text{ compacto } K \subseteq E\}. \quad (2.1.2)$$

**Lema 2.1.13.** *Si dos medidas en  $\mathcal{M}^N$  coinciden sobre los cubos diádicos, entonces también coinciden sobre los conjuntos abiertos. Si además son finitas sobre los intervalos acotados entonces también coinciden sobre los conjuntos compactos.*

**Teorema 2.1.14.** *(Teorema de unicidad de la medida de Lebesgue)*

*La medida de Lebesgue es la única medida sobre la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue que extiende al volumen sobre la familia de los intervalos acotados.*

Más tarde veremos en un ejercicio que  $\mathcal{M}^N$  es la mayor  $\sigma$ -álgebra sobre la que  $\lambda^*$  es aditiva. Veamos ahora que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.

**Teorema 2.1.15.** *(Caracterización de la medida mediante traslaciones)*

- a) Si  $\mu$  es una medida en  $\mathcal{M}^N$  invariante por traslaciones y tal que  $\mu([0, 1]^N) = \alpha$  entonces  $\mu = \alpha\lambda$ .
- b) La medida de Lebesgue es la única medida  $\mu$  sobre  $\mathcal{M}^N$  invariante por traslaciones tal que  $\mu([0, 1]^N) = 1$



### 2.1.4. Relaciones de la medida con las aplicaciones y con el producto cartesiano.

El resto de la lección está dedicada a estudiar la relación de la medida de Lebesgue con otros elementos. Comenzamos por estudiar su relación con el el producto cartesiano.

**Proposición 2.1.16.** *Sean  $E$  y  $F$  son dos subconjuntos medibles de  $\mathbb{R}^N$  y  $\mathbb{R}^M$  respectivamente. Entonces  $E \times F$  es un conjunto medible de  $\mathbb{R}^{N+M}$  y*

$$\lambda(E \times F) = \lambda(E)\lambda(F).$$

Nótese que si  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una aplicación continua entonces el conjunto  $\{A \subseteq \mathcal{R}^N : T^{-1}(A) \in \mathcal{B}^N\}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}^N$ . En particular, la imagen inversa de cualquier boreliano es un boreliano. Además se tiene que

**Lema 2.1.17.** *Si  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una aplicación continua y  $F$  es un conjunto de tipo  $F_\sigma$  entonces  $T(F)$  es un conjunto de tipo  $F_\sigma$ .*

Sin embargo, es sabido que existen ejemplos de aplicaciones continuas de  $\mathbb{R}^N$  que no conservan la medibilidad de algunos conjuntos (véase por ejemplo [?, Exercise 17, section 3]). Así pues si queremos conservar la medibilidad debemos fortalecer la propiedad de continuidad. Veamos qué todo va bien si  $T$  es lineal.

**Proposición 2.1.18.** *Si  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una aplicación lineal y  $E \in \mathcal{M}^N$  entonces  $T(E) \in \mathcal{M}^N$  y*

$$\lambda(T(E)) = |\det(T)|\lambda(E).$$

*En particular, si  $T$  es una isometría entonces  $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$ .*

También podemos fortalecer la propiedad de continuidad de otra manera. Diremos que una aplicación  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es **lipschitziana** si existe  $c \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Al valor  $c$  suele llamarse **constante de Lipschitz de la función  $T$** .

Las funciones lineales y las funciones con derivadas primeras parciales acotadas son funciones lipschitzianas.

**Proposición 2.1.19.** *Si  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una aplicación lipschitziana y  $E \in \mathcal{M}^N$  entonces  $T(E) \in \mathcal{M}^N$ .*

**Corolario 2.1.20.** *Sea  $G$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $f \in C^1(G)$ .*

- a) *Si  $Z \subseteq G$ ,  $\lambda(Z) = 0$  entonces  $\lambda(f(Z)) = 0$ .*
- b) *Si  $E \subseteq G$ ,  $E \in \mathcal{M}$  entonces  $f(E) \in \mathcal{M}$ .*

### 2.1.5. Relación de ejercicios

- a) Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Pruébese que si  $E \in \mathcal{A}$  entonces la terna  $(E, \mathcal{A}_E, \mu/\mathcal{A}_E)$  es un nuevo espacio de medida.
- b) Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $\Omega'$  un nuevo conjunto. Sea  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  una aplicación. Probar que  $(\Omega', \{B \in \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\})$  es un espacio medible.
- c) Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  una aplicación continua. Probar que si  $B$  es un boreliano de  $\mathbb{R}^N$  entonces  $f^{-1}(B)$  es también un boreliano de  $\mathbb{R}^N$ . Como consecuencia, probar que los homeomorfismos preservan los borelianos.
- d) Sea  $\mu^*$  una medida exterior en un conjunto no vacío  $\Omega$ . Pruébese que la restricción de  $\mu^*$  a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}_{\Omega, \mu^*}$  nos proporciona un espacio de medida completo.
- e) Probar que  $\mathcal{M}$  es la mayor  $\sigma$ -álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que  $\lambda^*$  es aditiva.
- f) Probar que la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula. Dedúzcase que  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Q}$  son dos conjuntos de medida nula.

#### g) Existencia de conjuntos no medibles

- 1) Probar que la familia  $\{x + Q : x \in \mathbb{R}\}$  es una partición de  $\mathbb{R}$ .  
(Indicación: La relación  $x \sim y$  si  $y - x \in \mathbb{Q}$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{R}$ ).
- 2) Pongamos  $\{x + Q : x \in \mathbb{R}\} = \{A_i : i \in I\}$  ( $A_i \neq A_j$ , para  $i \neq j$ ) y, para cada  $i \in I$ , sea  $x_i \in A_i \cap [0, 1]$ . Probar que el conjunto  $E = \{x_i : i \in I\}$  no es medible.  
(Indicación: Si  $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una numeración de  $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ , entonces

$$[0; 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + E) \subseteq [-1, 2],$$

y los conjuntos  $q_n + E$  son disjuntos entre sí).

- 3) Probar que cualquier subconjunto medible de  $E$  tiene medida cero.
- 4) Sea  $M \subseteq \mathbb{R}$  con  $\lambda^*(M) > 0$ . Probar que  $M$  contiene un subconjunto no medible.  
(Indicación:  $M = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M \cap (q + E)$ ).

- h) Probar que la existencia de conjuntos no medibles equivale a la no aditividad de  $\lambda^*$ .

i) Sean  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$  y  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $N < M$ . Probar que  $f(A)$  es de medida cero.

j) Sea  $a, u, v \in \mathbb{R}^2$  y sea  $P$  el paralelogramo

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) = a + tu + sv, t, s \in [0; 1]\}.$$

Probar que si  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está definida por  $T(t, s) = tu + sv$  entonces  
 $\lambda(P) = |\det T| = \text{base} \times \text{altura}.$

Deducir de lo anterior el área del triángulo, del círculo y de la elipse.

k) Sea  $a, u, v, w \in \mathbb{R}^3$  y sea  $P$  el paralelepípedo

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = a + tu + sv + rw, t, s, r \in [0; 1]\}.$$

Probar que si  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  está definida por  $T(t, s, r) = tu + sv + rw$  entonces  
 $\lambda(P) = |\det T| = \text{área de la base} \times \text{altura}.$

Deducir de lo anterior el área de la esfera y del elipsoide.



## 2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

### Sumario

El objetivo de esta lección es contestar a las preguntas: ¿qué tipo de funciones se puede integrar? y ¿cómo integrar? o si se quiere en orden contrario. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

- 2.2.1 Funciones medibles. Estabilidad. Teorema de aproximación de Lebesgue.
- 2.2.2 Integral de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$ .
- 2.2.3 Funciones integrables.
- 2.2.4 Relación de ejercicios.

### 2.2.1. Funciones medibles. Estabilidad. Teorema de aproximación de Lebesgue.

En esta sección queremos ver ¿qué tipo de funciones se pueden integrar? Recordemos que existen funciones tan importantes como la función de Dirichlet,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

que no es integrable en el sentido de Riemann.

Sean  $(\Omega, \mathcal{A})$  y  $(\Omega', \mathcal{A}')$  dos espacios medibles. Una función  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  se dice que es **medible** si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  para todo  $B \in \mathcal{A}'$ . Para probar la medibilidad de  $f$  basta probar que  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$  para todo  $A \in \mathcal{D}$ , siempre que la  $\sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{D}$  sea  $\mathcal{A}'$ .

En efecto, sabemos por el ejercicio 2.1.5.(2). que el conjunto  $\mathcal{C} = \{B \subseteq \Omega'; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$  es una  $\sigma$ -álgebra. Si  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$  para todo  $A \in \mathcal{D}$ , se tiene que  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  y por tanto  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{C}$ .

En todo lo que sigue vamos a considerar  $\Omega' = \mathbb{R}$  y como  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}'$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$ . Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $E \in \mathcal{A}$ . Si no hay lugar a confusión, diremos que una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es medible cuando el espacio medible considerado de partida es  $(E, \mathcal{A}_E)$ .

Veamos ahora algunos ejemplos de funciones medibles.

**Ejemplo 2.2.1. :**

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible.

- a) Las funciones características de cualquier conjunto medible. De hecho si  $A \subseteq \Omega$  entonces

$A \in \mathcal{A}$  si, y sólo si,  $\chi_A$  es medible.

Recuérdese que si  $A$  es un subconjunto de  $\Omega$ , se llama función **característica de  $A$** ,  $\chi_A$ , a la función  $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- b) Toda función de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$  para todo abierto  $G$  (resp. intervalo acotado, semirrecta, semirrecta abierta en el extremo u origen, semirrecta cerrada en el extremo u origen) de  $\mathbb{R}$  es medible.
- c) Si  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  es un espacio de medida completo, entonces toda función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  igual c.p.d. a una función medible, es medible. En particular si  $\Omega$  es un espacio topológico entonces las funciones que son iguales c.p.d. a una función continua (por ejemplo, la función de Dirichlet) son medibles.
- d) Toda función continua c.p.d. de  $\mathbb{R}^N$  en  $\mathbb{R}$  (por ejemplo, la función parte entera) son medibles.
- e) La composición de una función medible de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  con una función continua de  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  es una función medible.

Veamos ahora algunas propiedades que avalan la estabilidad algebraica de las funciones medibles. Antes necesitamos probar el siguiente lema, sabiendo que en  $\mathbb{R}^2$  consideramos la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}^2$ .

**Lema 2.2.2.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sean  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones. Si  $(f, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la función definida por  $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$  para todo  $x \in \Omega$ , entonces  $f$  y  $g$  son medibles si, y sólo si,  $(f, g)$  es medible.*

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sean  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones medibles. Entonces*

- a)  $f + g$ ,  $f \cdot g$  y  $\alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) son funciones medibles.
- b)  $|f|$  y  $1/f$  (siempre que  $f$  no se anule en  $\Omega$ ) son funciones medibles.
- c) Las funciones  $f \vee g$  definida por  $(f \vee g)(x) = \text{Max}\{f(x), g(x)\}$  y  $f \wedge g$  definida por  $(f \wedge g)(x) = \text{Min}\{f(x), g(x)\}$  son dos funciones medibles.
- d) Las funciones  $f^+ = f \vee 0$  y  $f^- = -f \vee 0$  son dos funciones medibles.
- e) Si  $F \in \mathcal{A}$  entonces la función restricción de  $f$  a  $F$ ,  $f|_F$ , resulta ser una nueva función medible.

Veamos ahora algunas propiedades que avalan la estabilidad analítica.

**Proposición 2.2.4.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles definidas en  $\Omega$  y con valores en  $\mathbb{R}$ . Entonces*

a) *El conjunto*

$$E = \{x \in \Omega : \{f_n(x)\} \text{ está mayorada (resp. minorada)}\}$$

*es medible, y si dicho conjunto no es vacío, la función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(x) = \sup\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\} \text{ (resp. } f(x) = \inf\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\})$$

*para todo  $x \in E$ , es medible.*

b) *El conjunto*

$$E = \{x \in \Omega : \overline{\lim} f_n(x) \in \mathbb{R}\} \text{ (resp. } \underline{\lim} f_n(x) \in \mathbb{R})$$

*es medible, y si dicho conjunto no es vacío, la función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(x) = \overline{\lim} f_n(x) \text{ (resp. } f(x) = \underline{\lim} f_n(x))$$

*para todo  $x \in E$ , es medible.*

c) *El conjunto*

$$E = \{x \in \Omega : \{f_n(x)\} \text{ convergente}\}$$

*es medible, y si dicho conjunto no es vacío, la función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(x) = \lim f_n(x)$$

*para todo  $x \in E$ , es medible.*

Una función medible  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **simple** si sólo toma un número finito de valores. Toda función simple  $s$  puede representarse por

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde  $s(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ( $\alpha_i \neq \alpha_j$  siempre que  $i \neq j$ )  $A_i := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_i\}$  y  $\chi_{A_i}$  es la función característica de  $A_i$ .

El siguiente resultado, crucial en todo lo que sigue, nos asegura que toda función  $f$  medible no negativa ( $f \geq 0$ ) es límite de una sucesión creciente  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$  de funciones simples que converge puntualmente a  $f$ .

**Teorema 2.2.5.** *(de aproximación de Lebesgue)*

*Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función medible. Entonces existe una sucesión creciente  $\{s_n\}$  de funciones simples no negativas que converge puntualmente a  $f$ . Si además  $f$  está acotada, dicha convergencia es uniforme en todo  $\Omega$ .*

**Corolario 2.2.6.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Entonces existe una sucesión  $\{s_n\}$  de funciones simples que convergen puntualmente a  $f$ . Si además  $f$  está acotada, dicha convergencia es uniforme en todo  $\Omega$ .

### 2.2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ .

En esta sección abordamos el problema de cómo hallar la integral de una función medible. Comenzamos con las funciones no negativas.

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Representamos por  $G(f)$  a la gráfica de dicha función, esto es,

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in E\}$$

y por  $R(f)$  al **recinto determinado por su gráfica y la recta  $y = 0$** , esto es,

$$R(f) = \{(x, y); x \in E, 0 < y < f(x)\}.$$

.

**Proposición 2.2.7.** Sea  $E$  un conjunto medible en  $\mathbb{R}^N$  y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función medible. Entonces  $G(f)$  y  $R(f)$  son dos conjuntos medibles en  $\mathbb{R}^{N+1}$  y  $\lambda(G(f)) = 0$ .

Nótese que, dado que  $\lambda(G(f)) = 0$ , si las desigualdades estrictas que definen el conjunto  $R(f)$  se sustituyen por igualdades la tesis de la Proposición no ha de modificarse.

**Definición 2.2.8.** Sea  $E \in \mathcal{M}^N$  y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función medible. Se define la **integral de  $f$  en  $E$  como la medida del recinto  $R(f)$** , esto es,

$$\int_E f d\lambda = \lambda(R(f)).$$

Sea  $F \in \mathcal{M}^N$ . Podemos considerar la función  $f|_{E \cap F}$  que ya sabemos medible (no negativa) y aplicar el proceso anterior. En adelante, escribiremos  $\int_{E \cap F} f d\lambda$  en lugar de  $\int_{E \cap F} f|_{E \cap F} d\lambda$ .

Nótese que si  $E$  es de medida nula, entonces  $\int_E f d\lambda = 0$ . En efecto,

$$0 \leq \int_E f d\lambda = \lambda(R(f)) \leq \lambda(E) \times \mathbb{R} = 0.$$

Asociada a la función  $f$  podemos considerar la función  $f\chi_E : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$



Es fácil probar que si  $f$  es medible entonces  $f\chi_E$  es también medible, y en tal caso, dado que  $R(f) = R(f\chi_E)$ , se tiene que

$$\int_E f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^N} f\chi_E \, d\lambda.$$

Veamos una primera consecuencia importante de la definición que hemos hecho.

**Teorema 2.2.9.** *(de la convergencia monótona para funciones medibles no negativas)*

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  un espacio medible y sea  $\{f_n\}$ , una sucesión monótona de funciones medibles no negativas que converge puntualmente en  $E$  a una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Entonces  $f$  es medible y

$$\int_E f \, d\lambda = \lim \left\{ \int_E f_n \, d\lambda \right\}.$$

Comencemos ahora a calcular integral de las funciones más sencillas. Veamos cómo calcular la integral de una función simple no negativa:

**Corolario 2.2.10.** *Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $s : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función simple. Si  $s(E) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  con  $\alpha_i \neq \alpha_j$  si  $i \neq j$  y  $A_i := \{x \in E : s(x) = \alpha_i\}$  entonces*

$$\int_E s \, d\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i).$$

Nótese que si  $E$  es un conjunto medible entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_E \, d\lambda = \int_E 1 \, d\lambda = \lambda(E).$$

Como consecuencia del Teorema de aproximación de Lebesgue y del Teorema de la convergencia monótona para funciones medibles no negativas obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 2.2.11.** *Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  medible y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible no negativa. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples  $\{s_n\}$  que converge puntualmente a  $f$  y se tiene que*

$$\int_E f \, d\lambda = \lim \left\{ \int_E s_n \, d\lambda \right\}.$$

Nótese que la integral de  $f$  es independiente de la sucesión  $\{s_n\}$  de funciones simples considerada. A partir de aquí podríamos calcular la integral de cualquier función no negativa  $f$ , hallando una tal sucesión. Sin embargo este método no resulta práctico por lo que necesitamos hacer otras observaciones

**Proposición 2.2.12.** *(propiedades de la integral para funciones medibles positivas)*

Sea  $E \in \mathcal{M}^N$  y sean  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dos función medibles. Entonces

- a)  $\int_E (f + g) d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_E g d\lambda$ .
- b)  $\int_E \alpha f d\lambda = \alpha \int_E f d\lambda$  ( $\alpha \geq 0$ ).
- c) Si  $f \leq g$  entonces  $\int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$ .
- d)  $\int_E f d\lambda = 0$  si, y sólo si,  $f = 0$  c.p.d.
- e) Si  $f = g$  c.p.d. entonces  $\int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda$ .
- f) Si  $\{E_n; n \in \mathbb{N}\}$  es una familia de conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^N$  disjuntos dos a dos tales que  $E = \cup_n E_n$ , entonces

$$\int_E f d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f d\lambda.$$

La propiedad (6) nos asegura que la integral de una función no depende de su comportamiento en conjuntos de medida nula. De hecho, ya podemos calcular la integral de la función  $f$  de Dirichlet, a saber, puesto que  $\mathbb{Q}$  es de medida nula, se tiene que

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \int_{[0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} f d\lambda = \lambda([0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1.$$

### 2.2.3. Funciones integrables

Sea  $E \in \mathcal{M}^N$ . Dada una función medible  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es **integrable en  $E$**  si

$$\int_E |f| d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la **integral de  $f$**  por

$$\int_E f d\lambda = \int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda.$$

Sea  $F \in \mathcal{M}^N$ . Podemos considerar la función  $f|_{E \cap F}$  que ya sabemos medible, de hecho si  $f$  es integrable en  $E$ , claramente  $f|_{E \cap F}$  es integrable en  $E \cap F$ . En adelante, en tal caso, escribiremos  $\int_{E \cap F} f d\lambda$  en lugar de  $\int_{E \cap F} f|_{E \cap F} d\lambda$ .

*Observación 2.2.13.* Nótese que si  $f = g - h$ , donde  $g, h : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  son dos funciones integrables entonces

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda - \int_E h \, d\lambda. \quad (2.2.1)$$

En efecto, es obvio que  $f^+ + h = g + f^-$ , luego dado que cada término es la suma de dos funciones medibles no negativas, tenemos  $\int_E f^+ \, d\lambda + \int_E h \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda + \int_E f^- \, d\lambda$ , y por tanto

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E f^+ \, d\lambda - \int_E f^- \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda - \int_E h \, d\lambda.$$

Dado  $E \in \mathcal{M}$ , representaremos por  $L(E)$  al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en  $E$ , esto es

$$L(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible; } \int_E |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Podemos ahora ver las propiedades de la integral y de las funciones integrables.

**Proposición 2.2.14.** *Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sean  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones medibles*

1)  $L(E)$  es un espacio vectorial y

$$\int_E (\alpha f + g) \, d\lambda = \alpha \int_E f \, d\lambda + \int_E g \, d\lambda, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, f, g \in L(E)).$$

2)

$$|\int_E f \, d\lambda| \leq \int_E |f| \, d\lambda, \quad (f \in L(E))$$

2) Si  $f$  y  $g$  son integrables con  $f \leq g$  entonces  $\int_E f \, d\lambda \leq \int_E g \, d\lambda$ .

3)  $f \in L(E)$  entonces  $|f| \in L(E)$  y

$$|\int_E f \, d\lambda| \leq \int_E |f| \, d\lambda.$$

4) Si  $f$  y  $g$  son medibles e iguales c.p.d., entonces  $f$  es integrable en  $E$  si, y sólo si, lo es  $g$ , y, en tal caso,

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda.$$

5) Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos medibles tales que  $E = A \cup B$  y  $\lambda(A \cap B) = 0$ . Entonces  $f$  es integrable en  $E$  si, y sólo si,  $f|_A$  es integrable en  $A$  y  $f|_B$  es integrable en  $B$ . Además, en caso afirmativo,

$$\int_E f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.$$

- 6) Si  $\{E_n\}$  es una sucesión de subconjuntos medibles, disjuntos dos a dos, entonces  $f$  es integrable en  $\cup_n E_n$  si, y sólo si,  $f$  es integrable en cada  $E_n$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\lambda$  es convergente. En tal caso,

$$\int_{\cup_n E_n} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_{E_n} f \, d\lambda \right).$$

### 2.2.4. Relación de ejercicios

- a) Sean  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $E \in \mathcal{A}$ .

- 1) Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible entonces  $f|_E$  es una función medible cuando se considera el espacio medible  $(E, \mathcal{A}_E)$ .
- 2) Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Probar que  $f$  es medible si, y sólo si, la función  $f\chi_E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

es medible. Además si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  y  $f \geq 0$ , entonces

$$\int_E f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \, d\lambda.$$

- 3) Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Probar que  $f$  es integrable en  $E$  si, y sólo si,  $f\chi_E$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Probar que

$$f = 0 \text{ c.p.d.} \iff \int_E f = 0, \forall E \in \mathcal{M}.$$

- c) Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible. Probar que si  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones medibles en  $\Omega$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:

- 1) El conjunto  $E = \{\omega \in \Omega : \sum_{n \geq 1} f_n(\omega) < \infty\}$  es medible y, si dicho conjunto no es vacío, la función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  definida, para cada  $\omega \in \Omega$  por  $f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ , es medible.
- 2) El conjunto  $E = \{\omega \in \Omega : \sum_{n \geq 1} |f_n(\omega)| < \infty\}$  también es medible.

- d) Dadas  $f, g, h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , probar que

- 1) Si  $f$  es integrable y  $g$  es medible y acotada entonces  $fg$  es integrable.
- 2) Pruébese que la condición de acotación es esencial en la afirmación anterior.
- 3) Si  $f$  es medible y  $g, h$  son integrables con  $g \leq f \leq h$ , entonces  $f$  es integrable.

- 4) Si  $f$  es medible y  $g, h$  son integrables, entonces  $h \vee (f \wedge g)$  y  $h \wedge (f \vee g)$  son integrables, donde para cada par de funciones  $\varphi, \phi$ ,  $\varphi \vee \phi$  y  $\varphi \wedge \phi$  se definen, para cada  $\omega \in \Omega$ , respectivamente por

$$\varphi \vee \phi(\omega) = \max\{\varphi(\omega), \phi(\omega)\} \quad \text{y} \quad \varphi \wedge \phi(\omega) = \min\{\varphi(\omega), \phi(\omega)\}.$$

- e) Sean  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible con  $0 \leq f < 1$ . Probar que existe una sucesión  $\{A_n\}$  de conjuntos medibles tales que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \chi_{A_n}$  converge uniformemente en  $\Omega$ . Probar también que

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu(A_n).$$

- f) Sean  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Supóngase que  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones medibles de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  tal que, para cada natural  $n$ ,

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq f_n(\omega)\}) < \frac{1}{2^n}.$$

Probar que  $\{f_n\}$  converge a  $f$  c.p.d.

[Indicación: Para cada natural  $n$ , considérese

$$A_n = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \neq f_n(\omega)\} \quad \text{y} \quad B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que si  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  entonces  $\mu(B) = 0$  y que  $\{f_n\}$  converge a  $f$  en  $B^C$ .]



## 2.3. Teoremas de convergencia

### Sumario

Es sabido que la integración no tiene un buen comportamiento en los procesos de convergencia. El objetivo de esta lección es ver que tales anomalías desaparecen cuando imponemos ciertas condiciones bien de monotonía bien de dominación. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.3.1 Teorema de la convergencia monótona.

2.3.2 Teoremas de la convergencia dominada y de la convergencia absoluta.

2.3.3 Aplicaciones: Teorema de Riesz e Integrales dependientes de un parámetro.

2.3.4 Relación de ejercicios.

### 2.3.1. Teorema de la convergencia monótona.

Comenzamos esta sección haciendo patente que la integral no tiene un buen comportamiento en los procesos de convergencia.

Ejemplo:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[-n,n]}$ . Nótese que aunque la sucesión  $\{f_n\}$  converge puntualmente a la función nula, sin embargo, la sucesión de las integrales de las funciones  $\{f_n\}$  no converge a la integral de la función límite. En efecto, las funciones  $f_n$  son integrables, de hecho

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 2,$$

y así la sucesión  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$  converge a 2, distinto del valor de la integral de la función nula.

Sí hemos visto precedentes de buena avenencia para la integral de cuando hemos considerado cierta condición de monotonía de la sucesión de funciones, baste recordar el Teorema de la convergencia monótona para funciones medibles no negativas (Teorema ??). Nuestro primer objetivo es seguir ahondando en esta circunstancia.

**Teorema 2.3.1.** (Beppo-Levi 1906) (Teorema de la convergencia monótona) (T.C.M.)  
 Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\{f_n\}$  una sucesión **monótona** de funciones **integrables** en  $E$ . Si la sucesión  $\{\int_E f_n d\lambda\}$  de las integrales está **acotada**, entonces existe una función  $f$  integrable en  $E$  que es límite puntual c.p.d. de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  y se tiene que

$$\int_E f d\lambda = \lim \left\{ \int_E f_n d\lambda \right\}.$$

Nótese que si  $g$  es límite puntual c.p.d. de la sucesión  $\{f_n\}$  del Teorema anterior, entonces los mismos argumentos prueban que también  $g \in L(E)$  y  $\int_E g d\lambda = \lim \left\{ \int_E f_n d\lambda \right\}$ .

Como consecuencia del T.C.M. veamos que las funciones integrables en el sentido de Riemann son también integrables en el sentido de Lebesgue.

**Corolario 2.3.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces

$f$  es integrable en el sentido de Riemann si, y sólo si,  $f$  es continua c.p.d.

En caso afirmativo,  $f \in L([a, b])$  y además

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda.$$

Este resultado justifica que a partir de ahora Si  $I = [a, b]$  y  $f$  es una función integrable en  $[a, b]$  escribamos  $\int_a^b f(x) dx$  en lugar de  $\int_I f d\lambda$ .

El siguiente ejemplo nos muestra otra forma de usar el T.C.M.

Ejemplo:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = (1 + \frac{x^2}{n})^n$  para todo  $x \in ]0, 1]$ .

Nótese que la sucesión  $\{f_n\}$  es creciente y converge puntualmente en  $]0, 1]$  a la función  $f(x) = e^{x^2}$ . Por tanto, la sucesión de integrales está mayorada por el número  $e$ .

Aplicando el T.C.M. obtenemos que la sucesión  $\{f_n\}$  converge puntualmente en el intervalo  $]0, 1]$ , que su límite es integrable y que

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \lim_n \left\{ \int_0^1 (1 + \frac{x^2}{n})^n dx \right\}.$$



### 2.3.2. Teoremas de la convergencia dominada y de la convergencia absoluta.

En esta sección nos interesamos por condiciones de dominación. Comenzamos con el siguiente resultado importante:

**Proposición 2.3.3.** (*Lema de Fatou*)

Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones **medibles no negativas** en  $E$ . Si la **sucesión**  $\{\int_E f_n d\lambda\}$  **de las integrales tiene límite inferior finito**, entonces el **límite inferior** de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  es **finito c.p.d.** y

$$\int_E \underline{\lim}_n \{f_n\} d\lambda \leq \underline{\lim}_n \left\{ \int_E f_n d\lambda \right\}.$$

**Teorema 2.3.4.** (*Teorema de la convergencia dominada*)(T.C.D.)

Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones **integrables** en  $E$ . Si la **sucesión**  $\{f_n\}$  **converge puntualmente a una función  $f$  en  $E$  y existe una función  $g$  integrable en  $E$  tal que  $|f_n| \leq g$** , entonces la **función  $f$  es integrable** y

$$\lim \left\{ \int_E |f_n - f| d\lambda \right\} = 0.$$

En consecuencia

$$\int_E f d\lambda = \lim \left\{ \int_E f_n d\lambda \right\}.$$

**También las funciones absolutamente integrables quedan bajo control**

En el caso en  $I = ]\alpha, \beta[$  admitiendo que  $\alpha$  puede ser  $-\infty$  y  $\beta$  a su vez  $+\infty$ , y que  $f$  sea una función continua en  $I$ ,  $|f|$  es **impropiamente integrable** en el sentido de Riemann en  $I$  si, y sólo si,  $f \in L(I)$ , y en tal caso

$$\int_I |f| d\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx.$$

El siguiente ejemplo nos muestra cómo usar también dicho teorema.

Ejemplo:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considérese la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2} \quad (x \in [0, 1]).$$

Nótese que las funciones  $f_n$  son continuas en  $[0, 1]$  y que la sucesión  $f_n$  converge puntualmente a la función nula.

Nótese que  $|f_n(x)| \leq 1$  y por tanto por el T.C.D.

$$\lim \left\{ \int_0^1 f_n(x) dx \right\} = \int_0^1 (\lim f_n(x)) dx = 0.$$

**Teorema 2.3.5.** (Teorema de la convergencia absoluta)(T.C.A.)

Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones **integrables** en  $E$ . Si la serie  $\sum_{n \geq 1} (\int_E |f_n| d\lambda)$  **converge** entonces la **serie**  $\sum_{n \geq 1} f_n$  **converge absolutamente** en un subconjunto  $E_1$  de  $E$ , cuyo complemento es de medida nula, y

$$\lim \left\{ \int_{E_1} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k \right| d\lambda \right\} = 0.$$

En consecuencia,  $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) \chi_{E_1} \in L(E)$  y

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \chi_{E_1} d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_E f_n d\lambda \right).$$

Algunos ejercicios propuestos mostrarán la potencia del T.C.A.

### 2.3.3. Aplicaciones: Teorema de Riesz e Integrales dependientes de un parámetro.

#### Teorema de Riesz

Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$ . Comencemos dotando de una seminorma al espacio  $L(E)$  de las funciones integrables en  $E$ .

La aplicación  $\|\cdot\| : L(E) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida por  $\|f\| = \int_E |f| d\lambda$ , para cada  $f \in L(E)$  es tal que

- a)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$  ( $f \in L(E)$ ),  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  ( $f, g \in L(E)$ ).

Pero,  $\|f\| = 0$  si, y sólo si,  $f = 0$  c.p.d. Luego la aplicación  $\|\cdot\|$  no pasa de ser una seminorma.

Con el fin de construir una norma, consideramos el conjunto

$$N := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } f = 0 \text{ c.p.d.}\}$$

. Es obvio que  $N$  es un subespacio vectorial de  $L(E)$ . Definimos  $L_1(E)$  como el espacio cociente de  $L(E)$  por  $N$ .

Veamos que la aplicación  $\|\cdot\|_1 : L_1(E) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida por  $\|f + N\|_1 = \|f\|$  para cada  $f \in L(E)$ , es una norma en  $L_1(E)$ . De hecho,  $\|f\| = \inf\{\|f + h\|, h \in N\}$ .

La convergencia en  $L_1(E)$  asociada a dicha norma recibe el nombre de **convergencia en media**.

Probemos que el espacio  $(L_1(E), \|\cdot\|_1)$  es un espacio de Banach.

**Teorema 2.3.6.** (*Teorema de Riesz*)

Sea  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones integrables en  $E$ . Si la sucesión  $\{f_n + N\}$  es una sucesión de Cauchy en  $L_1(E)$  entonces existe  $f \in L(E)$  tal que

$$\lim\left\{\int_E |f - f_n| d\lambda\right\} = 0.$$

Además existe una sucesión parcial  $\{f_{\sigma(n)}\}$  que converge c.p.d a  $f$ .

### Integrales dependiendo de un parámetro

Sea  $X$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$  y  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$ . Considérese una función  $f : A \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada  $t$ , la correspondiente función  $f_t(x) = f(t, x)$  es integrable en  $E$ , y asociada a ésta una nueva función  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(t) = \int_E f_t d\lambda.$$

El objetivo de esta sección es el de encontrar condiciones sobre la función  $f$  que nos aseguren distintas propiedades analíticas de la función  $\varphi$ .

**Proposición 2.3.7.** Sean  $X, E, f$  y  $\varphi$  como arriba. Si

- a) para cada  $x \in E$ , la función  $f^x$  definida por  $f^x(t) = f(t, x)$  tiene límite (resp. es continua) en un punto  $a \in A'$  (resp.  $a \in A$ ) y
- b) existe  $g \in L(E)$  tal que  $|f(t, x)| \leq g(x)$  para todo  $t \in A$  y  $x \in E$ ,

entonces  $\varphi$  tiene límite (resp. es continua) en  $a$  y

$$\lim_{t \rightarrow a} \left( \int_E f(t, x) d\lambda \right) = \int_E (\lim_{t \rightarrow a} f(t, x)) d\lambda.$$

Con idéntica argumentación podemos probar que

**Proposición 2.3.8.** Sea  $X = I$  un intervalo de números reales y sean  $E, f, \varphi$  como arriba. Si

- a) Para cada  $x \in E$ , la función  $f^x$  es derivable en  $I$ ,

- b) Existe  $g \in L(E)$  tal que  $|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(t,x)| = |(f^x)'(t)| \leq g(x)$  para todo  $t \in I, x \in E$ ,

entonces  $\varphi$  es derivable en  $I$  y para cada  $a \in I$ ,

$$\varphi'(a) = \int_E \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(a,x) d\lambda.$$

### 2.3.4. Relación de ejercicios

- a) Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida completo,  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles y  $f, g$  dos funciones medibles. Probar las siguientes afirmaciones:
- 1) Si  $\{f_n\}$  converge c.p.d a  $f$  y a  $g$  c.p.d. entonces  $f = g$  c.p.d.
  - 2) Si  $\{f_n\}$  converge c.p.d a  $f$  y  $f = g$  c.p.d. entonces  $\{f_n\}$  converge c.p.d a  $g$

- b) Considérese, para cada  $n$ , la función  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = n^2 \chi_{[1/(n+1), 1/n]}$ .

Estúdiese la convergencia puntual y compárese  $\int \lim f_n$  con  $\lim \int f_n$ .

- c) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  un conjunto medible de medida finita y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles en  $E$  que converge puntualmente a una función  $f$ . Supongamos que existe una constante  $M \geq 0$  tal que  $|f_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $f$  es integrable y que

$$\lim \int_E |f - f_n| = 0.$$

Dar un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

- d) Calcular  $\lim \int f_n$  para cada una de las siguientes sucesiones  $\{f_n\}$  de funciones de  $]0, 1[$  en  $\mathbb{R}$ :

- 1)  $f_n = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ .
- 2)  $f_n = 1/n \log(x+n)e^{-x}\cos(x)$ .
- 3)  $f_n = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$ .

- e) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  un conjunto medible de medida finita y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones integrables en  $E$  que converge uniformemente a una función  $f$ . Probar que  $f$  es integrable y que

$$\lim \int_E |f - f_n| = 0.$$

Dar un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

f) Para cada natural  $n$ , y para cada  $x \in \mathbb{R}$ , sea  $f_n(x) = a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \cos(nx)$ , donde  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son dos sucesiones de números reales. Pruébese que si la sucesión  $\{f_n\}$  converge c.p.d. a uno en  $[0, 2\pi]$  entonces la sucesión  $\{|a_n| + |b_n|\}$  no está acotada.

g) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  un conjunto medible y  $f$  una función integrable en  $E$ . Probar que

$$n\lambda(\{x \in E : f(x) \geq n\}) \longrightarrow 0.$$

¿Es cierta la anterior afirmación para funciones medibles positivas? En caso negativo, dése un contraejemplo.

h) Pruébese que la función  $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$  es integrable en el intervalo  $[0, 1]$  y que

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

i) Pruébese que la función  $e^{x^2}$  es integrable en el intervalo  $[0, 1]$  y que

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

j) Sean  $I, J$  dos intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$  y  $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$  una función continua verificando:

- 1) Para cada  $t \in I$ , la función  $x \mapsto f(t, x)$  es integrable en  $J$ .
- 2) Para cada  $x \in J$ , la función  $t \mapsto f(t, x)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $I$ .
- 3) La función  $x \mapsto \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right|$  está dominada por una función integrable en  $J$ .
- 4) Sea  $g : I \longrightarrow J$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $I$ .

Probar que para  $a \in J$ , la función

$$F(t) := \int_a^{g(t)} f(t, x) dx$$

es derivable en  $I$  y que, para cada  $t \in I$ ,

$$F'(t) := \int_a^{g(t)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, g(t))g'(t).$$



## CAPÍTULO 3

---

### Técnicas de integración.

---

## 3.1. Técnicas de integración en una variable

### Sumario

El objetivo de esta lección es desarrollar técnicas que nos permitan el cálculo de la integral de una función definida en un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Presentamos la herramienta más definitiva en este sentido: La Regla de Barrow. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.1.1 Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow.

3.1.2 Técnicas de integración.

3.1.3 Criterios de integrabilidad.

3.1.4 Relación de ejercicios.

### 3.1.1. Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow.

Estudiaremos ahora la importante conexión entre los tres conceptos básicos del análisis: continuidad, derivación e integración.

En todo lo que sigue tomaremos  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ .

Se dice que una función  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  es **localmente integrable** si  $f$  es integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en  $] \alpha, \beta[$ .

Obviamente, toda función continua en  $] \alpha, \beta[$  es localmente integrable en  $] \alpha, \beta[$ .

Convenimos que si  $a, b \in ]\alpha, \beta[$  entonces escribiremos normalmente  $\int_a^b f(x)dx$  en lugar de  $\int_{[a,b]} f d\lambda$ . Entenderemos que  $\int_a^a f(x)dx = 0$  y si  $[a, b] \subseteq ]\alpha, \beta[$  entonces  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ . Teniendo en cuenta estos convenios, la Proposición ??.(5), permite afirmar que si  $a, b, c \in ]\alpha, \beta[$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0. \quad (3.1.1)$$

Recordemos también que si  $I$  es un intervalo de números reales y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función,  $f$  es integrable en  $I$  si, y solo si  $f$  es integrable en su interior  $I^{int}$  y que  $\int_I f d\lambda = \int_{I^{int}} f d\lambda$ .

Si  $c \in ]\alpha, \beta[$  llamaremos **integral indefinida de  $f$  con origen en  $c$**  a la función  $F : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida, para cada  $x \in ]\alpha, \beta[$ , por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

**Teorema 3.1.1.** (*fundamental del Cálculo*) (**T.F.C.**)

Sea  $f$  una función localmente integrable en  $] \alpha, \beta[$  y  $a \in ]\alpha, \beta[$ . Definimos  $F : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $x \in ]\alpha, \beta[$ , por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Entonces

- a)  $F$  es continua en  $] \alpha, \beta[$ .
- b)  $F$  es derivable y  $F' = f$  c.p.d. en  $] \alpha, \beta[$ . De hecho, si  $f$  es continua en  $b \in ]\alpha, \beta[$  entonces  $F$  es derivable en  $b$  y  $F'(b) = f(b)$

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. El siguiente resultado es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Para enunciarlo, necesitamos recordar que dada una función  $f$  definida en un intervalo  $I$  se dice que  $f$  **admite primitiva** si existe una función  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable tal que, para cada  $x \in I$ ,  $G'(x) = f(x)$ . Como consecuencia del teorema del Valor Medio,  $G$  está determinada de manera única, salvo una constante aditiva. En particular, si  $F$  es la integral indefinida de una función **continua**  $f$  definida en un intervalo  $I$ , entonces  $F$  es una primitiva de  $f$ . De hecho, en virtud de la igualdad (??),

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (3.1.2)$$



siempre que  $a, b \in I$ .

Veamos que la continuidad de  $f$  no es esencial. Se dice que una función  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  es **localmente acotada** si  $f$  está acotada en todo intervalo cerrado y acotado contenido en  $] \alpha, \beta[$ .

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función que admite una primitiva  $G$ . Entonces*

- a)  $f$  es medible
- b) Si  $f$  es no negativa entonces  $f$  es de hecho localmente integrable.
- c) Si  $f$  es localmente acotada entonces  $f$  es localmente integrable en  $[a, b]$  y, para cada  $a, b \in ]\alpha, \beta[$ ,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad (3.1.3)$$

**Teorema 3.1.3.** (Regla de Barrow)

Sea  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función localmente acotada que admite una primitiva  $G$ .

- a) Si  $f$  es no negativa entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow \beta} G(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha} G(x).$$

En particular,  $f$  es integrable en  $] \alpha, \beta[$  si, y sólo si, existe el límite de  $G$  en  $\alpha$  y en  $\beta$ .

- b) Si  $f$  es integrable entonces existe el límite de  $G$  en  $\alpha$  y en  $\beta$  y

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow \beta} G(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha} G(x).$$

La condición de acotación local impuesta en nuestro Teorema no es esencial, pero una demostración para casos más generales excede nuestro ámbito de trabajo (véase por ejemplo [?]).

En ocasiones escribiremos  $G(x)]_{\alpha}^{\beta}$  en lugar de escribir  $\lim_{x \rightarrow \beta} G(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha} G(x)$ .

**Ejemplo 3.1.4.** La condición de ser no negativa es esencial en 1) es esencial: La función  $f : [\pi, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$  admite primitiva (por tratarse de una función continua) y **pese a que dicha primitiva tiene límites en  $\pi$  y,  $+\infty$ , sin embargo  $f$  No es integrable en  $[\pi, +\infty[$** . En efecto, como consecuencia del T.F.C., la función  $f$  (por tratarse de una función continua)  $f$  admite una primitiva  $G$ . Obsérvese que

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| dx \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1},$$

de donde se deduce que  $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx = +\infty$ , luego  $f$  no integrable en  $[\pi, +\infty[$ .

Comprobemos que tales límites existen. Sea  $F(x) = \int_{\pi}^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$  una primitiva de  $f$ . Nótese que, usando el T.F. C. se prueba que, para cada  $b > \pi$ ,

$$\int_{\pi}^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = -\frac{\cos(b)}{b} - 1/\pi + \int_{\pi}^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx,$$

y puesto que  $1/x^2$  es una función integrable en  $[\pi, b]$  (aplíquese la Regla de Barrow (Teorema ??)), también la función  $\frac{\cos(x)}{x^2}$  es integrable en  $[\pi, b]$ . Tomando límites, se tiene que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_{\pi}^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx \right) = -1/\pi + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx < +\infty.$$

Ocorre a menudo que si intentamos evaluar algunas primitivas no obtenemos ninguna información no trivial. Por tanto el problema de evaluar la integral de una función continua  $f$ , para aplicar la Regla de Barrow, consiste en conseguir una primitiva de  $f$  susceptible de ser evaluada (o tener límite) en los puntos  $\alpha$  y  $\beta$ . Por tanto, algunas veces, conviene transformar la función  $f$  en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

**Corolario 3.1.5.** (teorema del cambio de variable) Sean  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  y  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en  $]a, b[$  con  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$ . Sea  $[\alpha, \beta] = g([a, b])$ . Si  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, entonces  $f$  es integrable en  $]\alpha, \beta[$  si, y sólo si, la función  $f \circ g \cdot g'$  es una integrable en  $]a, b[$ . En tal caso,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt. \quad (3.1.4)$$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir  $g(t)$  por  $x$  y  $g'(t)dt$  por  $dx$  y los valores extremos  $t = a, t = b$  por los correspondientes  $x = g(a), x = g(b)$ .

### Nota

Obsérvese que después de esta propiedad, podemos probar que la función  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t \, dt.$$

es derivable de hecho, es una biyección estrictamente creciente verificando que:

- $F(1) = 0$
- $F(xy) = F(x) + F(y)$
- $F(e) = 1$ .

Esto es, la función  $F$  no es otra cosa que la función logaritmo neperiano.

La siguiente técnica, consecuencia sencilla de la Regla de Barrow (Teorema ??), es especialmente útil cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

**Corolario 3.1.6.** *(teorema de integración por partes)*

Sean  $F, G : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables y tales que  $F'G$  y  $FG'$  son integrables en  $] \alpha, \beta[$ . Entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x).G'(x)dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x).G(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x).G(x) - \int_{\alpha}^{\beta} F'(x).G(x)dx.$$

### 3.1.2. Métodos de integración

En esta sección nos ocuparemos del problema práctico de evaluar la integral de toda función racional y de algunas funciones no racionales.

#### Integración de funciones racionales

Daremos un método general para la evaluación de la integral de una función racional cuya "única" dificultad consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función racional y sean  $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las correspondientes funciones polinómicas tales que,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  con  $Q(x) \neq 0$ , para cada  $x \in [a, b]$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad (en caso contrario se manipula algebraicamente) que:

- 1)  $P$  y  $Q$  son dos polinomios primos entre sí.
- 2) El polinomio  $Q(x)$  es de mayor grado que  $P(x)$ .
- 3) El coeficiente líder del polinomio  $Q(x)$  es uno.

En la situación anterior, el problema de evaluar la integral de  $f$  se resuelve usando sendos resultados algebraicos: la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales y la descomposición en fracciones simples de una función racional con coeficientes reales.

**Proposición 3.1.7.**

1) Descomposición en factores irreducibles

Todo polinomio  $Q(x)$  con coeficientes reales y con coeficiente líder igual a uno puede escribirse en la forma:

$$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_p)^{n_p}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q},$$

donde  $p$  y  $q$  son números enteros no negativos,  $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q, c_1, c_2, \dots, c_q$  son números reales, donde  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$  son las raíces reales del polinomio  $Q$  y para cada  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $n_p$  es el orden de multiplicidad de la raíz  $a_k$ ; y finalmente  $m_1, m_2, \dots, m_q$  son números naturales.

La descomposición anterior en factores es única y

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_q)$$

es el grado del polinomio.

2) Descomposición en fracciones simples

Si el polinomio  $Q(x)$  se descompone en la forma dada en (1.) y  $P(x)$  es un polinomio primo con  $Q(x)$  de grado menor que el de  $Q(x)$ , la función racional  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  puede escribirse de forma única como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A^{11}}{x-a_1} + \frac{A^{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A^{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \\ & + \frac{A^{21}}{x-a_2} + \frac{A^{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A^{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \dots + \\ & \frac{A^{p1}}{x-a_p} + \frac{A^{p2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A^{pn_1}}{(x-a_p)^{n_p}} + \dots + \\ & \frac{B^{11}x+C^{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B^{12}x+C^{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \frac{B^{1m_1}x+C^{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \\ & \frac{B^{21}x+C^{21}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B^{22}x+C^{22}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \frac{B^{2m_2}x+C^{2m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}} + \dots + \\ & \frac{B^{q1}x+C^{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B^{q2}x+C^{q2}}{[(x^2+b_qx+c_q)^2]} + \frac{B^{qm_q}x+C^{qm_q}}{[(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}]}, \end{aligned}$$

donde  $A_{ij}$  ( $1 \leq i \leq p, (1 \leq j \leq n_p)$ ) y  $(B^{ij}, C_{ij} \ (1 \leq i \leq q \text{ y } 1 \leq j \leq m_q \text{ y } a_1, a_2, \dots, a_p, B_1, B_2, \dots, B_q, c_1, c_2, \dots, c_q \ C^{ij} \text{ son números reales. Se tiene además que } A^{kn_k} \neq 0 \text{ para } k \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ y } (B^{jm_j})^2 + (C^{jm_j})^2 > 0 \text{ para } j \in \{1, 2, \dots, q\}.$

La principal dificultad a la hora de aplicar la proposición anterior consiste, como ya se ha dicho, en encontrar la descomposición en factores del polinomio  $Q(x)$ . Salvado este problema, la descomposición en fracciones simples dada por la segunda parte de la proposición puede ya obtenerse sin dificultad, aunque sí puede ser laboriosa.

La descomposición en fracciones simples dada anteriormente, junto con la linealidad de la integral nos permite limitarnos a considerar las integrales de cada uno de los tipos de fracciones simples que aparecen en la descomposición, a saber

### Tipo 1

$$f(x) = \frac{A}{x - c},$$

para todo  $x \in [a, b]$ , y donde  $A, c \in \mathbb{R}$  y  $c$  no pertenece al intervalo  $[a, b]$ . En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = A \cdot \log\left(\frac{b - c}{a - c}\right).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2 - x^2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx.$$

### Tipo 2

$$f(x) = \frac{A}{(x - c)^n},$$

para todo  $x \in [a, b]$ , y donde  $A, c \in \mathbb{R}$  y  $c$  no pertenece al intervalo  $[a, b]$ . En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A}{n - 1} \left[ \frac{1}{(a - c)^{n-1}} - \frac{1}{(b - c)^{n-1}} \right].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx + C}{x^2 + cx + d},$$

para todo  $x \in [a, b]$ , donde  $B, C, c, d \in \mathbb{R}$ . En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2} \int_a^b \frac{2x + c}{x^2 + cx + d} dx + (C - cB/2) \int_a^b \frac{dx}{x^2 + cx + d}.$$

La primera integral se puede resolver haciendo el cambio de variable  $u = x^2 + cx + d$ , con lo que nos queda

$$\int_{a^2+ac+d}^{b^2+bc+d} \frac{du}{u} = \log \frac{b^2 + bc + d}{a^2 + ac + d}.$$

La segunda integral se puede resolver escribiendo  $x^2 + cx + d = (x - r)^2 + b^2$  para hacer el cambio de variable  $u = \frac{x-r}{s}$ , con lo que nos queda

$$\frac{1}{s} \int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s} [\arctan\left(\frac{b-r}{s}\right) - \arctan\left(\frac{a-r}{s}\right)].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4+x^3-x-1} dx.$$

Tipo 4 Esto es,

$$f(x) = \frac{r(x)}{(x^2 + cx + d)^n},$$

para todo  $x \in [a, b]$ , donde  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$  y  $r(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $2n - 1$ .

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex + f}{x^2 + cx + d} + \left[ \frac{F(x)}{(x^2 + cx + d)^{n-1}} \right]',$$

donde  $F(x)$  es un polinomio de grado  $2n-3$  a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por  $(x^2 + cx + d)^n$ , y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex + f}{x^2 + cx + d} dx + \frac{F(b)}{(b^2 + cb + d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2 + ca + d)^{n-1}}.$$

La integral que queda es una de tipo 3).

**Ejercicio:** Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+4} dx.$$

### Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello, sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

Empezaremos fijando una notación que nos permitirá exponer de manera rápida y sin ambigüedad los distintos métodos de integración que vamos a tratar. En lo que sigue  $I$  será un intervalo del tipo  $[a, b]$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  será una función continua. Para calcular la integral de  $f$  usaremos sistemáticamente el cambio de variable  $x = g(t)$ , donde  $g$  es una función biyectiva de un cierto intervalo  $J$  sobre  $I$  y de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $J$ . Si notamos por  $h(t) = f \circ g(t) \cdot g'(t)$ , para todo  $t \in J$ , transformaremos la integral de la función inicial en la integral de la función  $h$  en el intervalo  $J$ . Si  $h$  es racional, aplicaremos los conocimientos dados en la primera parte de la lección. En las demás ocasiones será preciso un nuevo cambio de variable. Encontraremos así un nuevo intervalo  $K$  y una nueva función  $\varphi$  tal que  $t = \varphi(u)$ , donde  $\varphi$  es una función biyectiva de  $K$  sobre  $J$  y de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $K$ . Si notamos por  $k(u) = h \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u)$ , para todo  $u \in k$ , transformaremos la integral de la función  $h$  en la integral de la función  $k$  en el intervalo  $K$ , y vuelta a empezar.

#### a) Funciones trigonométricas

Sea  $f$  una función que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que  $f$  es una función periódica de periodo  $2\pi$  podremos limitarnos a considerar  $I \subseteq [-\pi, \pi]$ . Hacemos en este caso el cambio de variable

$$x = g(t) = 2 \arctan(t).$$

La función  $g$  que aparece es una función racional. De hecho,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{y} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ejercicio: Calcúlese  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$

Podemos destacar algunos casos particulares en

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{\cos^m(x)} dx \quad a, b \in I$$

- a) Si  $n$  es impar, se hace el cambio  $x = \arccos(t)$ , siempre que  $I \subseteq [0, \pi]$ .
- b) Si  $m$  es impar, se hace el cambio  $x = \operatorname{arcsen}(t)$ , siempre que  $I \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$ .
- c) Si  $n$  y  $m$  son pares se usan las fórmulas

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

b) Funciones trascendentes

Sea  $f$  una función  $f$  que es cociente de sumas y productos de la función  $e^x$  con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable  $x = g(t) = \log(t)$ . La función  $h$  que aparece es de nuevo una función racional.

Ejercicio: Calcular  $\int_1^2 \frac{dx}{shx}$

c) Irracionales en x

Sea  $f$  una función que es cociente de sumas y productos de potencias racionales de  $x$ . Si  $f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}})$ , entonces hacemos el cambio de variable  $x = t^m$ , donde  $m = m.c.m.\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

d) Irracionales cuadráticas

Vamos a distinguir tres tipos fundamentalmente:

- 1) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones  $x$  y  $\sqrt{x^2 - 1}$

En este caso, siempre que  $I \subseteq [1, +\infty[$  ó  $I \subseteq ]-\infty, 1]$ , hacemos el cambio de variable ó bien  $x = g(t) = \frac{1}{\cos t}$  y por tanto la función  $h$  que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien  $x = g(t) = ch(t)$  y la función  $h$  que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.



Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

- 2) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones  $x$  y  $\sqrt{1 - x^2}$

En este caso, siempre que  $I \subseteq [-1, 1]$  hacemos el cambio de variable  $x = g(t) = \text{sen}(t)$  y por tanto la función  $h$  que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

- 3) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones  $x$  y  $\sqrt{1 + x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien  $x = g(t) = tg(t)$  y por tanto la función  $h$  que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien  $x = g(t) = sh(t)$  y la función  $h$  que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

### Nota

Las funciones  $f(x)$  que son cociente de sumas y productos de  $x$  y de  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  se pueden reducir a uno de los tres casos anteriores ya que

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 - b^2/4a + c,$$

y por tanto, si hacemos un primer cambio  $u = x + b/2a$  y posteriormente

- si  $a > 0$  y  $b^2 - 4ac > 0$ , hacemos un nuevo cambio,  $t = \frac{\sqrt{au}}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$ , resulta una integral del tipo  $\sqrt{t^2 - 1}$
- Si  $a > 0$  y  $b^2 - 4ac < 0$ , hacemos un nuevo cambio,  $t = \frac{\sqrt{au}}{\sqrt{c - b^2/4a}}$ , resulta una integral del tipo  $\sqrt{t^2 + 1}$ .
- Si  $a < 0$  y  $b^2 - 4ac < 0$ , hacemos un nuevo cambio,  $t = \frac{\sqrt{-au}}{\sqrt{c - b^2/4a}}$  resulta una integral del tipo  $\sqrt{1 - t^2}$

### 3.1.3. Criterios de integrabilidad

De igual manera que sólo sabemos calcular la suma de algunas series y por tanto limitábamos nuestro esfuerzo al conocimiento de si una determinada serie es o no convergente, ocurre con la integral de funciones. En esta sección daremos algunos criterios de integrabilidad para una cierta función.

Entre los distintos criterios distinguiremos el método de comparación. Antes hagamos notar que:

- a) Por el T.C.D., si  $f, g : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones medibles tales que  $g$  es integrable y  $|f| \leq g$  entonces  $f$  es también integrable en  $] \alpha, \beta[$ .
- b) Si  $c \in ]\alpha, \beta[$  entonces  $f$  es integrable en  $] \alpha, \beta[$  si, y sólo si,  $f$  es integrable en  $] \alpha, c[$  y  $f$  es integrable en  $[c, \beta[$ . En tal caso

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^c f(x) dx + \int_c^{\beta} f(x) dx.$$

Esta segunda observación nos permite dividir el problema en dos. Nosotros nos centramos en intervalos de la forma  $[a, \beta[$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

- c) Si  $f$  es localmente integrable en  $[a, b[$  con  $b \in \mathbb{R}$  y existe  $c \in [a, b[$  tal que  $f$  está acotada en  $[c, b[$  (en particular si  $f$  tiene límite en  $b$ ) entonces  $f$  es integrable en  $[a, b[$ .

**Proposición 3.1.8.** Sea  $a \in \mathbb{R}$  y sean  $f, g : [a, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones localmente integrables tales que

- a)  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, \beta[$  y
- b)  $\lim_{x \rightarrow \beta} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = L$ .

Entonces

- a) Si  $L \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, \beta[$  si, y sólo si,  $g$  es integrable en  $[a, \beta[$ .
- b) Si  $L = 0$  y  $g$  es integrable en  $[a, \beta[$  entonces  $f$  es integrable en  $[a, \beta[$ .
- c) Si  $L = +\infty$  y  $f$  es integrable en  $[a, \beta[$  entonces  $g$  es integrable en  $[a, \beta[$ .

Es aconsejable que la función  $g$  que usamos en la comparación sea lo más sencilla posible (sería conveniente una función que sepamos integrar). En todo caso, necesitamos del conocimiento de la integrabilidad del máximo posible de funciones. Con esta idea, estudiamos primeramente la función potencial:

Consideremos la función  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^a$ , donde  $a$  es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si $0 < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	$x^a$ es integrable en $[a, \beta[$	para	todo valor de $a$
Si $0 = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	$x^a$ es integrable en $[a, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a > -1$
Si $0 < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	$x^a$ es integrable en $[a, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a < -1$
Si $0 = \alpha, \beta = +\infty$	entonces	$x^a$ no es integrable en $[a, \beta[$	para	ningún valor de $a$

Y en segundo lugar la función exponencial.

Consideremos la función  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^{ax}$ , donde  $a$  es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	$e^{ax}$ es integrable en $[a, \beta[$	para	todo valor de $a$
Si $-\infty = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	$e^{ax}$ es integrable en $[a, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a > 0$
Si $-\infty < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	$e^{ax}$ es integrable en $[a, \beta[$	$\Leftrightarrow$	$a < 0$
Si $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$	entonces	$e^{ax}$ no es integrable en $[a, \beta[$	para	ningún valor de $a$

### 3.1.4. Relación de ejercicios

a) Calcúlense las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll}
 \int_0^1 \arctg(x) \, dx, & \int_0^1 x^2 e^x \, dx, \\
 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^2}, & \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx, \\
 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \log(\operatorname{sen} x) \, dx, & \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx. \\
 \int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}, & \int_0^1 \frac{dx}{\cosh x}. \\
 \int_2^3 \frac{1 + 2x - x^2}{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2} dx., & \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}. \\
 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}, & \int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}. \\
 & \int_1^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}.
 \end{array}$$

b) Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t) \, dt. & \text{b) } F(x) = \int_3^{x^2} \frac{1}{1 + \sin^6 t + t^2} \, dt \\
 \text{c) } F(x) = \int_3^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen}(s)}{s} ds} 1/(\operatorname{sen}^2(t^2) + 1) \, dt
 \end{array}$$

$$d) F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2 + \operatorname{sen}^2(t)} dt.$$

$$e) F(x) = \int_a^b \frac{t}{1+t^2 + \operatorname{sen}(t)} dt \quad f) F(x) = \int_a^b \frac{tx}{1+t^2 + \operatorname{sen}(t)} dt$$

c) Probar que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

$$1) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \operatorname{arcsen}(2/3) - \operatorname{arcsen}(7/12), \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right).$$

$$2) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \pi/2, \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \pi/6.$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = (3\pi + \ln 2)/10, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = (\sqrt{3}\pi/12).$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \pi/2, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen}^2(x) dx = \pi.$$

$$5) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}).$$

$$6) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} dx = 3\pi, \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = 4/3.$$

$$7) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) dx = \pi/16, \quad \int_0^1 (1-x^{2/3}) x dx = 8/35.$$

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$9) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}} \quad (y > 0), \quad \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \pi, \quad \int_0^1 \ln(x) dx = -1.$$

$$10) \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \left( \frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2} \right) dy = \frac{2\ln(x)}{x^2-1} \quad (x \neq \pm 1).$$

d) Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones:

$$1) \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \text{ en } ]0, \pi].$$

$$2) x^a e^{-bx} \quad (a \in \mathbb{R}, b > 0) \text{ en } \mathbb{R}^+.$$

$$3) x/(e^x - 1) \text{ en } \mathbb{R}^+.$$

$$4) x^a \ln(x) \quad (a \in \mathbb{R}) \text{ en } \mathbb{R}^+.$$

$$5) 1/\sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x) \text{ en } ]0, 1[.$$

$$6) x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \text{ en } ]0, 1[.$$

$$7) \ln(x) \ln(1+x) \text{ en } ]0, 1[.$$

$$8) x^a \operatorname{sen}(x) \quad (a \in \mathbb{R}) \text{ en } ]1, +\infty[.$$

e) Justificar, haciendo uso en cada caso de un conveniente teorema de convergencia, las siguientes igualdades:

$$1) \lim \int_0^1 \frac{n x \ln(x)}{1+n^2 x^2} dx = 0.$$

$$2) \lim \int_0^1 \frac{n \sqrt{x}}{1+n^2 x^2} dx = 0.$$

$$3) \lim \int_0^1 \frac{n^{3/2} x}{1+n^2 x^2} dx = 0.$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}, \quad (a, b > 0) \text{ y deducir que}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

$$6) \int_0^1 \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}, (a, b > 0).$$

f) Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$1) F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x} dx \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

$$2) F(t) = \int_0^{\pi} \ln(1+t\cos x) dx \quad \forall t \in ]-1, 1[.$$

$$3) F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{1+x^2} dx \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

g) Probar que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

es derivable. Utilizar el método de integración por partes en la expresión de  $F'$  para obtener  $F'(t) = -tF(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Deducir de ello que la función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  dada por  $t \mapsto F(t)e^{-t^2/2}$  tiene derivada nula. Por último concluir, usando el Teorema del valor medio, que

$$F(t) = Ce^{-t^2/2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde  $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$



## 3.2. Técnicas de integración en varias variables

### Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Consideraremos métodos que proporcionan la integrabilidad de una función aunque no el valor de la integral, métodos que proporciona ambas cuestiones y métodos que, asegurada la integrabilidad, nos proporcionen el valor de la integral. Con respecto al problema del cálculo, nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá relacionando la integral en  $\mathbb{R}^n$  con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.2.1 Teorema de Fubini.

3.2.2 Teorema de Tonelli.

3.2.3 Teorema del cambio de variable: Cambio de coordenadas.

3.2.4 Relación de ejercicios.

### 3.2.1. Teorema de Fubini

Recuérdese que el problema del cálculo de la integral de una determinada función, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió usando la regla de Barrow. Sin embargo, no disponemos de una tal regla en  $\mathbb{R}^N$  con  $N > 2$ . Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, sabido que la función es integrable, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en  $\mathbb{R}$ .

Dada una función  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos la función  $f_x : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  que viene definida por  $f_x(y) = f(x, y)$ . Análogamente, consideramos la función  $f^y : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  que viene definida por  $f^y(x) = f(x, y)$ .

Convenimos que si  $x \in I$ , donde  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}^N$ , entonces escribiremos normalmente  $\int_I f(x)dx$  en lugar de  $\int_I f \, d\lambda$ .

**Teorema 3.2.1.** *(de Fubini) Sean  $p, q$  dos números naturales y sea  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Entonces*

- Para casi todo  $y \in \mathbb{R}^q$ , la función  $f^y$  es integrable en  $\mathbb{R}^p$  y si  $g$  es la función definida c.p.d. en  $\mathbb{R}^q$  por  $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, d\lambda$  entonces  $g\chi_{\mathbb{R}^q}$  es integrable en  $\mathbb{R}^q$ .*
- Para casi todo  $x \in \mathbb{R}^p$ , la función  $f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^q$  y si  $h$  es la función definida c.p.d. en  $\mathbb{R}^p$  por  $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, d\lambda$  entonces  $h\chi_{\mathbb{R}^p}$  es integrable en  $\mathbb{R}^p$ .*

$$c) \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^q} g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^p} h \, d\lambda.$$

Apliquemos nuestro teorema para calcular la integral en un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ . Para ello, consideremos las siguientes notaciones:

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ , notaremos, para cada  $x \in \mathbb{R}^p$ , por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada  $y \in \mathbb{R}^q$ , por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in E\}.$$

**Corolario 3.2.2.** *Si  $E$  es un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  entonces, para casi todo  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $E(x)$  es subconjunto medible de  $\mathbb{R}^q$ , y, para casi todo  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $E(y)$  es subconjunto medible de  $\mathbb{R}^p$*

*Demostración.* Es obvio que, para todo  $x \in \mathbb{R}^p$  e  $y \in \mathbb{R}^q$ , se tiene  $\chi_E(x, y) = \chi_{E(x)}(y)$ . Supongamos primeramente que  $E$  es de medida finita. En este caso, la función  $\chi_E$  es integrable y puedo aplicarle el Teorema de Fubini, para asegurar que  $\chi_{E(x)} = (\chi_E)_x$  es integrable c.p.d. en  $\mathbb{R}^q$ , luego medible c.p.d., y por consiguiente,  $E(x)$  es medible para todo  $x$  salvo un subconjunto de medida nula de  $\mathbb{R}^p$ .

Si  $E$  no es de medida finita, construimos los consabidos conjuntos  $E_n = E \cap B(0, n)$ . A partir de aquí construimos los conjuntos  $Z_n := \{x \in \mathbb{R}^p; E_n(x) \text{ no es medible}\}$  que son por construcción de medida nula. Nótese que si  $x \notin \cup_n Z_n$  entonces  $E(x)$  puede escribirse como unión numerable ( $E = \cup_n E_n$ ) de conjuntos medibles. Por tanto  $E(x)$  es medible para todo  $x$  salvo posiblemente en el subconjunto de medida nula  $\cup_n Z_n$  de  $\mathbb{R}^p$ .

■

**Teorema 3.2.3.** *(Teorema de Fubini. Caso  $p = 1, q = 1$ )*

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  medible y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[ \int_{E(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left[ \int_{E(y)} f(x, y) dx \right] dy,$$

siendo  $\alpha_1 = \inf E_1$ ,  $\beta_1 = \sup E_1$ ,  $\alpha_2 = \inf E_2$ ,  $\beta_2 = \sup E_2$ , donde

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}; E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R}; E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando  $E = I \times J$ , siendo  $I, J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\int_E f(x, y) = \int_I \left[ \int_J f(x, y) dy \right] dx = \int_J \left[ \int_I f(x, y) dx \right] dy.$$



*Demostración.* Basta caer en la cuenta de que, para cada  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $(f\chi_E)_x = f_x\chi_{E(x)}$ , y que para cada  $y \in \mathbb{R}^q$ ,  $(f\chi_E)^y = f^y\chi_{E(y)}$  y aplicar el Teorema de Fubini a la función  $f\chi_E$ .

■

**Ejemplo:** Calcúlese el área de la elipse de semiejes  $a$  y  $b$ .

Análogamente podemos aplicar el Teorema de Fubini para obtener el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.4.** (*Teorema de Fubini. Caso  $p = 2, q = 1$* )

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  medible y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} \left[ \int_{E(z)} f(x, y) d(x, y) \right] dz,$$

siendo  $\alpha_3 = \inf E_3$ ,  $\beta_3 = \sup E_3$ , donde

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R}; E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para  $(p = 1, q = 2)$  sin más que considerar los conjuntos  $E[x]$  y  $E[y]$ .

**Ejemplo:** Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes  $a, b$  y  $c$ .

*Observación 3.2.5.* Recuérdese que la integral en dos variables de una función no negativa puede ser vista como un cierto volumen. Además, si  $E$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^3$ , tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}; E(x) \neq \emptyset\} = [a, b].$$

el teorema de Fubini nos asegura que

$$\lambda(E) = \int_E 1 d(x, y, z) = \int_a^b \left( \int_{E(x)} 1 d(y, z) \right) dx = \int_a^b \lambda(E(x)) dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función integrable en  $[a, b]$ . Supongamos que el recinto  $R(f)$  se hace girar alrededor del eje  $x$ . El conjunto así generado es llamado **sólido de revolución generado por  $f$  al girar sobre el eje  $x$** ,  $S_x(f)$ , esto es,

$$S_x(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Obsérvese que, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$\lambda(S_x(f)) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

### 3.2.2. Teorema de Tonelli

En esta sección abordamos los métodos que nos permitan dilucidar la integrabilidad de la función.

**Teorema 3.2.6.** *(de Tonelli) Sean  $p, q$  dos números naturales y sea  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Consideremos las siguientes integrales iteradas:*

- a)  $\int_{\mathbb{R}^p} g \, d\lambda$  donde la función  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  viene definida por  $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} |f^y| \, d\lambda$  para todo  $y \in \mathbb{R}^q$ ,
- b)  $\int_{\mathbb{R}^q} h \, d\lambda$  donde la función  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  viene definida por  $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} |f_x| \, d\lambda$  para todo  $x \in \mathbb{R}^p$ .

*Si alguna de las integrales iteradas es finita entonces  $f$  es integrable en  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ .*

Nótese que si  $f$  es no negativa entonces podemos aplicar simultáneamente los Teoremas de Fubini y Tonelli. De hecho,

**Corolario 3.2.7.** *Sean  $p, q$  dos números naturales y sea  $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función medible. Entonces  $f$  es integrable en  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  si, y sólo si, es finita alguna de las siguientes integrales iteradas:*

- a)  $\int_{\mathbb{R}^p} g \, d\lambda$  donde la función  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por  $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, d\lambda$  para todo  $y \in \mathbb{R}^q$ ,
- b)  $\int_{\mathbb{R}^q} h \, d\lambda$  donde la función  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por  $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, d\lambda$  para todo  $x \in \mathbb{R}^p$ .

*En tal caso, existen las integrales iteradas y estas coinciden con la integral de la función  $f$ .*

### 3.2.3. Teorema del cambio de variable: Cambio de coordenadas

En algunas ocasiones interesa cambiar la función inicial por otra función. Este cambio viene arbitrado por el siguiente teorema del cambio de variable:

**Teorema 3.2.8.** Sean  $U$  y  $V$  dos abiertos de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\varphi$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  de  $U$  sobre  $V$ . Si  $E \subseteq V$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, entonces  $f$  es integrable en  $E$  si, y sólo si,  $f \circ \varphi | \det(J_\varphi) |$  es integrable en  $\varphi^{-1}(E)$ . En tal caso

$$\int_E f \, d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(E)} f \circ \varphi | \det(J_\varphi) | \, d\lambda.$$

Este teorema suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

#### Coordenadas polares, $n = 2$

Tomamos  $U = \mathbb{R}^+ \times ] - \pi, \pi[$ ,  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ , y la aplicación  $\phi : U \rightarrow V$  definida por

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

En este caso

$$\det J_\phi(\rho, \theta) = \rho > 0, \quad \forall (\rho, \theta) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d(\rho, \theta).$$

#### Coordenadas cilíndricas, $n = 3$

Tomamos  $U = \mathbb{R}^+ \times ] - \pi, \pi[ \times \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z); x \leq 0\}$ , y la aplicación  $\phi : U \rightarrow V$  definida por

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

En este caso

$$\det J_\phi(\rho, \theta, z) = \rho > 0, \quad \forall (\rho, \theta, z) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d(\rho, \theta, z).$$

#### Coordenadas esféricas, $n = 3$

Tomamos  $U = \mathbb{R}^+ \times ] - \pi, \pi[ \times ] 0, \pi/2, \pi/2[$ ,  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z); x \leq 0\}$ , y la aplicación  $\phi : U \rightarrow V$  definida por

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

En este caso

$$\det J_\phi(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \cos \varphi > 0, \quad \forall (\rho, \theta, \varphi) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho^2 \cos \varphi d(\rho, \theta, \varphi).$$

### 3.2.4. Relación de ejercicios

a) Calcúlense las siguientes integrales:

a)  $\int_I \sin^2 x \sin^2 y \, d(x, y), \quad I = [0, \pi] \times [0, \pi].$

b)  $\int_I \frac{x^2}{1+y^2} \, d(x, y), \quad I = [0, 1] \times [0, 1].$

c)  $\int_I y \log x \, d(x, y), \quad I = [1, e] \times [1, e].$

d)  $\int_I x^3 y^3 \, d(x, y), \quad I = [0, 1] \times [0, 1].$

e)  $\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2} \, d(x, y), \quad I = [0, 1] \times [0, 1].$

f)  $\int_I x \log(xy) \, d(x, y), \quad I = [2, 3] \times [1, 2].$

g)  $\int_I y \cos(xy) \, d(x, y), \quad I = [0, 1] \times [1, 2].$

b) Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , calcúlese su integral en los siguientes casos:

a)  $f(x, y) = 1$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x^3$ ,  $y = x$ .

b)  $f(x, y) = x^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $xy = 16$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 8$ .

c)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

d)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  la región limitada por la recta que pasa por  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  y la circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radio 1.

e)  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

f)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x$ .

g)  $f(x, y) = xy^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = 2x$ ,  $x = 1$ .

h)  $f(x, y) = xy$  siendo  $A$  la región limitada por la semicircunferencia superior  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  y el eje  $OX$ .

i)  $f(x, y) = 4 - y^2$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = 2x$  y  $y^2 = 8 - 2x$

j)  $f(x, y) = e^{x^2}$  siendo el conjunto  $A$  el triángulo formado por las rectas  $2y = x$ ,  $x = 2$  y el eje  $x$

c) Calcúlese  $\int_A f$  en cada uno de los casos siguientes:

a)  $f(x, y) = 1 - x - y$ ,  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x + y \leq 1\}$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x^2 + y^2 \leq 1\}$

c)  $f(x, y) = x + y$ ,  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x^2 \leq y \leq 2x^2\}$

d)  $f(x, y) = x^2 y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

e)  $f(x, y) = y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$

f)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$

- g)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$   
h)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$   
i)  $f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$   
j)  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$   
k)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$   
l)  $f(x, y) = x y$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$   
m)  $f(x, y) = x^2 y$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$   
n)  $f(x, y) = x$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$
- d) Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:
- a)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $A = \bar{B}((0, 0), 1)$   
b)  $f(x, y) = y$ ,  $A = \{(x, y) \in B((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}) : y \geq 0\}$   
c)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \bar{B}((1, 0), 1)$   
d)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$
- e) Calcúlense las siguientes integrales dobles:
- a)  $f(x, y) = x$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$   
b)  $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$   
c)  $f(x, y) = \exp(\frac{x}{y})$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 \leq x \leq y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$   
d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$   
e)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2), x \geq 0\}$   
f)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
- f) **Área de la cardioide.** La curva en  $\mathbb{R}^2$ , cuya ecuación en coordenadas polares viene dada por  $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$  ( $a \in \mathbb{R}^+$ ;  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  se llama una cardioide. Sea  $E = \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 < \rho \leq 2a(1 + \cos\theta)\}$ . Calcúlese  $\lambda(E)$ .
- g) Probar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi/2$ .  
Indicaciones:
- a) Probar, usando los Teoremas de Fubini y Tonelli, que la función  $F(x; y) = e^{-xy} \sin x$  es integrable en  $]0, n[ \times ]0, +\infty[$  y que
- $$\int_0^n \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^n e^{-xy} \sin(x) dx \right] dy.$$
- b) Para cada natural  $n$ , sea  $f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por
- $$f_n(y) = \int_0^n e^{-xy} \sin(x) dx.$$

Pruébese, integrando por partes, que  $\{f_n(y)\}$  converge a  $\frac{1}{1+y^2}$ . Pruébese además que  $|f_n(y)| \leq \frac{2}{1+y^2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

c) Deducir finalmente, utilizando el teorema de la convergencia dominada que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \pi/2$ .

h) Calcúlese el volumen de la región  $A$  definida por:

a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - ry \leq 0\}$ .

b)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2, z(x^2 + y^2) \leq 1, z \geq 0\}$ .

c)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$ .

d)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$ .

(e) **Bóveda de Viviani**  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z\}$ .

(f) **cucuruchu de helado invertido**

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2, x^2 + y^2 \leq z/2, z \leq 1\}.$$

(g) **Volumen del toro** de radios  $r$  y  $R$  (flotador).

i) **Sólidos de revolución generados por un giro alrededor del eje  $OY$ .**

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$  un conjunto medible. Consideremos el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in E\}$$

o (sólido de revolución obtenido al girar el conjunto  $E$  contenido en el plano  $XY$  en torno al eje  $OY$ ). Probar que  $S$  es medible y que

$$\lambda(S) = 2\pi \int_E x d(x, y).$$

j) Un leñador corta una pieza  $C$  con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo  $\pi/4$ . Calcúlese el volumen de dicha cuña.

k) Calcúlese el volumen del sólido de revolución generado por la curva  $y = \operatorname{sen}^2(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , cuando ésta gira en torno al eje  $x$ .

l) Hállese el volumen generado al girar alrededor del eje  $OX$  la gráfica de  $f(x) = \frac{18x}{x^2 + 9}$ .

m) Una bola de madera de radio 9 cm es tralada con una broca de radio 1 cm. Si la apertura ha completado un eje de la bola, ¿cuánto material de la bola ha sido eliminado con la broca?

n) Calcúlense las siguientes integrales triples:

a)  $\int_I \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} d(x, y, z)$ ,  $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

- b)  $\int_A z e^{-(x^2+y^2)} d(x, y, z)$  ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2(x^2 + y^2) \leq z^2, z \geq 0, z \leq 1\}$ .
- c)  $\int_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z)$  ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4\}$ .
- d)  $\int_A (x + y - 2z) d(x, y, z)$  ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0, z \leq 3\}$ .
- e)  $\int_A \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^n d(x, y, z)$  ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ).
- f)  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$
- g)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$
- h)  $f(x, y, z) = x^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, 4z^2 \geq 3(x^2 + y^2)\}$
- i)  $f(x, y, z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$
- j)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$
- k)  $f(x, y, z) = z^2$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$
- l)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$
- $\tilde{n}$ ) Demuéstrese que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{2\pi/a}$ , donde  $a > 0$ .
- o) Calcúlese  $\int_A f$  en cada uno de los casos siguientes:
- 1)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$
  - 2)  $f(x, y) = 1$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x^2 \leq y\}$
  - 3)  $f(x, y, z) = z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$
  - 4)  $f(x, y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 2\}$
- p) Estúdiese la integrabilidad de las siguientes funciones:
- 1)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ( $\alpha > 0$ ).
  - 2)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x)\text{sen}(y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ( $1 < \alpha < 2$ ).





---

## Bibliografía

---

- [1] J.C. BURKILL, The Lebesgue integral. *Cambridge University Press, London* (1963).
- [2] R.L. WHEEDEN AND A. ZYGMUND, Measure and Integral, An introduction to Real Analysis. *CRC Press, Taylor and Francis Group, A Chapman and Hall Book* (2015).

