5. Ecuaciones diferenciales Ordinarias

Antes de comenzar la práctica es conveniente recordar algunos detalles.

1) La primera letra de los comandos se escribe siempre en mayúscula.

2) Los comandos siempre tienen opciones que se escriben entre corchetes o llaves. Al escribir, si abres un corchete o una llave, siempre hay que cerrarlos.

3) Para evaluar una celda, pon el cursor dentro de ella o señála en el borde con el ratón. Pulsa entonces las teclas "mayúsculas + intro".

Teoría

Una capacidad relevante de *Mathematica* es la de trabajar con fórmulas con igual facilidad que con números, así como cálculo simbólico, cuya principal aplicación es la resolución de ecuaciones como vimos en las prácticas anteriores. De igual manera puede utilizarse Mathematica para la resolución de EDO's con cálculo simbólico y con soluciones numéricas.

El comando para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es:

DSolve[EDO , función, variable]

donde "EDO" es una expresión cualquiera que involucra a una función y sus derivadas; “función” es la incógnita de la ecuación, esto es, la función que vamos buscando; y “variable” es la variable de la que depende la función que aparece en la EDO. En la “EDO” se escriben DOS símbolos "=" para definir la igualdad de la ecuación. En la paleta se pueden encontrar los dos símbolos en un solo botón. En celdas nuevas, escribe y evalúa la siguiente expresión:

Ejemplo DSolve[y’[x]==y[x],y[x],x]

Si queremos resolver un PVI entonces tenemos que añadir las condiciones iniciales como si fueran otra ecuación más. Por ejemplo:

```
DSolve[ {y’’[x]==-y[x],
        y[0]==1,
        y’[0]==5},
        y[x],
        x ]
```

Ejercicios:

(1) Resuelve algunas de las siguientes EDOs y PVIs utilizando el comando DSolve.

a) yy' = x^2.

b) y' = y cos x.

c) xy' + $x^2 y = x e^{\frac{-x^2}{2}}$, y(0)=1.

d) $(x - 1)\, y' + xy = 1$, $y(2)=1$.

e) $3\, xy^2 y' + y^3 + \frac{1}{x} = 0$.

f) $\left(1 + x^2\right) yy' = -xy^2$, $y(0)=1$.

g) $y'' + 2\, y' + y = e^{-x} \ln x$.

h) $y'' + 3\, y' + 2\, y = \mathrm{sen}(e^x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

(2) Utiliza el comando Plot (ya aprendido en prácticas anteriores) para dibujar las soluciones a los apartados c,d,f y h del ejercicio anterior.

Ejercicio 1.

1. a)

In[1]:= `DSolve[y[x] y'[x] == x^2, y[x], x]`

Out[1]= $\left\{\left\{y[x] \to -\sqrt{\frac{2}{3}}\, \sqrt{x^3 + 3\, C[1]}\right\}, \left\{y[x] \to \sqrt{\frac{2}{3}}\, \sqrt{x^3 + 3\, C[1]}\right\}\right\}$

1. b)

In[2]:= `DSolve[y'[x] == y[x] Cos[x], y[x], x]`

Out[2]= $\left\{\left\{y[x] \to e^{\mathrm{Sin}[x]}\, C[1]\right\}\right\}$

1. c)

In[3]:= `DSolve[{x y'[x] + x^2 y[x] == x Exp[-x^2/2], y[0] == 1}, y[x], x]`

Out[3]= $\left\{\left\{y[x] \to e^{-\frac{x^2}{2}}\, (1 + x)\right\}\right\}$

1. d)

In[4]:= `DSolve[{(x - 1) y'[x] + x y[x] == 1, y[2] == 1}, y[x], x]`

Out[4]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{-1 + x}\right\}\right\}$

1. e)

In[5]:= `DSolve[3 x y[x]^2 y'[x] + y[x]^3 + 1/x == 0, y[x], x]`

$$\text{Out[5]=}\ \left\{\left\{y[x] \to \frac{(C[1]-\text{Log}[x])^{1/3}}{x^{1/3}}\right\}, \left\{y[x] \to -\frac{(-1)^{1/3}\ (C[1]-\text{Log}[x])^{1/3}}{x^{1/3}}\right\}, \left\{y[x] \to \frac{(-1)^{2/3}\ (C[1]-\text{Log}[x])^{1/3}}{x^{1/3}}\right\}\right\}$$

1. f)

In[6]:= `DSolve[{(1 + x^2) y[x] y'[x] == -x y[x]^2, y[0] == 1}, y[x], x]`

— *DSolve::bvnul :*
For some branches of the general solution, the given boundary conditions lead to an empty solution. ≫

$$\text{Out[6]=}\ \left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right\}\right\}$$

1. g)

In[7]:= `DSolve[y''[x] + 2 y'[x] + y[x] == Exp[-x] Log[x], y[x], x]`

$$\text{Out[7]=}\ \left\{\left\{y[x] \to e^{-x} C[1] + e^{-x} x\, C[2] + \frac{1}{4} e^{-x} x^2\ (-3 + 2\,\text{Log}[x])\right\}\right\}$$

1. h)

In[8]:=
```
DSolve[
 {y''[x] + 3 y'[x] + 2 y[x] == Sin[Exp[x]], y[0] == 1, y'[0] == 1}, y[x], x]
```

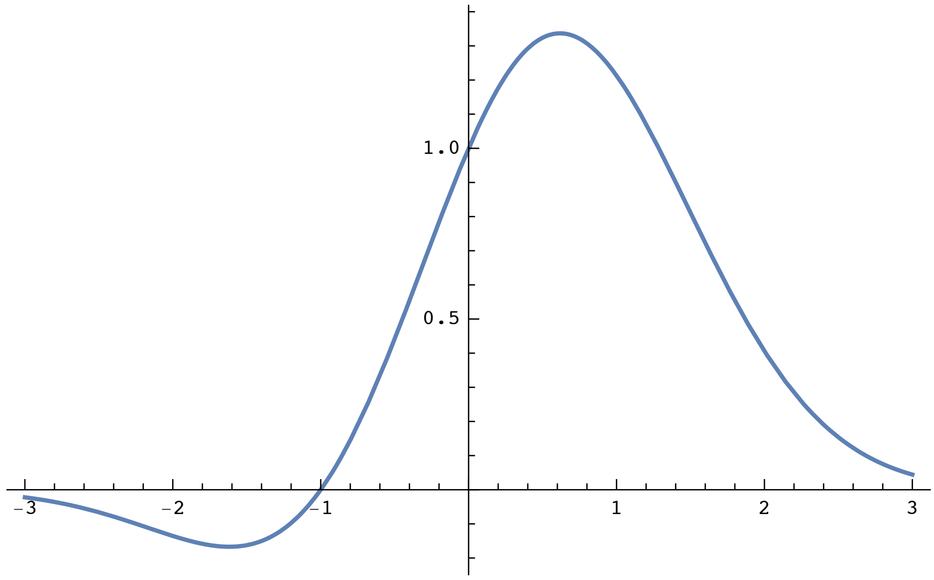
$$\text{Out[8]=}\ \left\{\left\{y[x] \to e^{-2x}\left(-2 + 3 e^{x} - \text{Cos}[1] + e^{x}\,\text{Cos}[1] + \text{Sin}[1] - \text{Sin}\left[e^{x}\right]\right)\right\}\right\}$$

Ejercicio 2.

Dibujo del apartado c :

In[9]:= `Plot[`$e^{-\frac{x^2}{2}}$` (1 + x), {x, -3, 3}]`

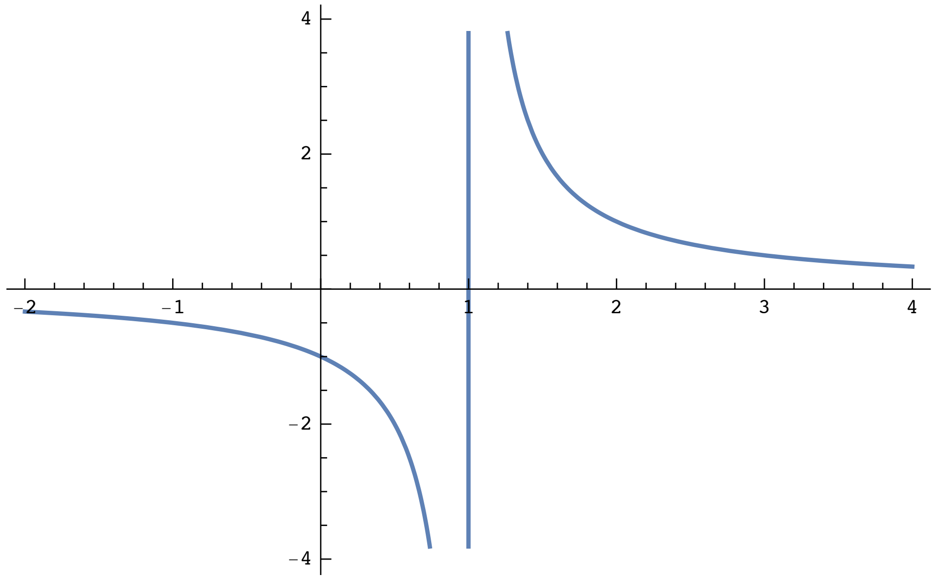
Out[9]=



Dibujo del apartado d :

In[10]:= `Plot[`$\frac{1}{-1+x}$`, {x, -2, 4}]`

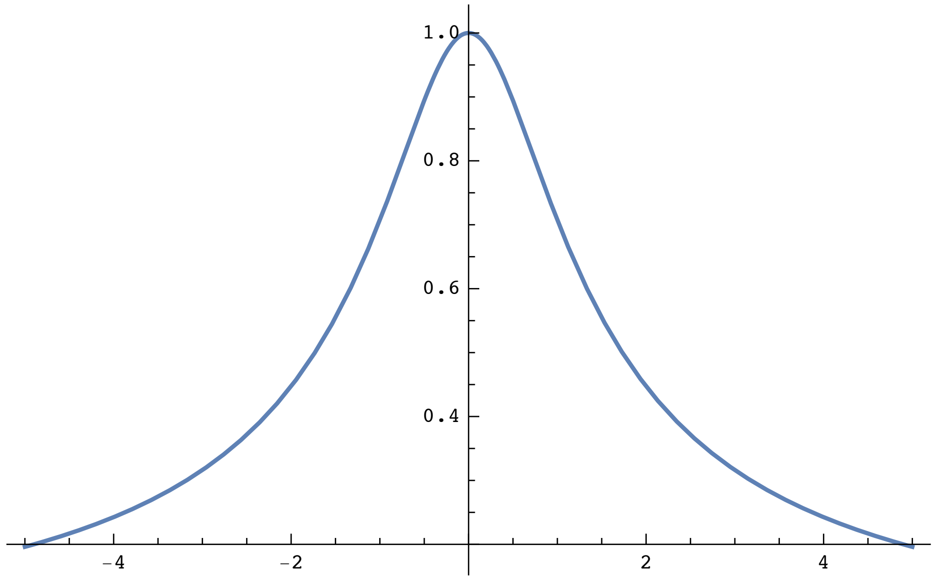
Out[10]=



Dibujo del apartado f :

In[11]:= **Plot**$\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \{x, -5, 5\}\right]$

Out[11]=



Dibujo del apartado h :

In[12]:= **Plot**$\left[e^{-2x}\left(-2+3\,e^{x}-\mathrm{Cos}[1]+e^{x}\,\mathrm{Cos}[1]+\mathrm{Sin}[1]-\mathrm{Sin}\left[e^{x}\right]\right), \{x, -1, 5\}\right]$

Out[12]=