3. Sistemas de ecuaciones lineales

Antes de comenzar la práctica es conveniente recordar algunos detalles.

1) La primera letra de los comandos se escribe siempre en mayúscula.

2) Los comandos siempre tienen opciones que se escriben entre corchetes o llaves. Al escribir, si abres un corchete o una llave, siempre hay que cerrarlos.

3) Para evaluar una celda, pon el cursor dentro de ella o señála en el borde con el ratón. Pulsa entonces las teclas "mayúsculas + intro".

Teoría

Una capacidad relevante de *Mathematica* es la de trabajar con fórmulas con igual facilidad que con números, así como cálculo simbólico, cuya principal aplicación es la resolución de ecuaciones.

Un comando para resolver ecuaciones (sin parámetros) es:

Solve[fórmula1= = fórmula2 , variable]

donde "fórmula" es una expresión cualquiera, y variable es la variable en la que se resuelve la ecuación. Se escriben DOS símbolos "=" para definir una ecuación. En la paleta se pueden encontrar los dos símbolos en un solo botón. En celdas nuevas, escribe y evalúa las siguientes expresiones:

Ejemplo 1) Solve[$x^2 - 5x + 6 == 0, x$]

2) Solve[$x^4 - 1$ == 0, x]

Si se resuelve un sistema de ecuaciones, las ecuaciones se encierran **entre llaves**, y las variables también se encierran **entre llaves.** Evalúa la siguiente expresión de un sistema de ecuaciones lineales en una celda nueva:

Ejemplo 1) Solve[{2 x + 3 y = = 0,

4 x - 7 y = = 4},

{x,y}

]

El problema del comando Solve es que tan solo nos permite resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones para los que es posible aplicar un método algebraico sencillo, como los sistemas de ecuaciones lineales, pero en general no para cualesquiera ecuaciones.

Ejemplo Solve[$x^6 + x + 1$ == 0,x]

El Solve nos devolverá la expresión {} cuando no haya solución. Compruébalo usando el comando Solve para el sistema x+y=1,2x+2y=1.

El comando Solve no sirve para resolver sistemas de ecuaciones con parámetros. Veamos ahora cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

El comando Reduce

Este comando se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales con parámetros. La sintaxis es como la de Solve:

Reduce[{ ecuación1, ... , ecuación m} , {var1, ... , var n}]

Por ejemplo, queremos resolver el sistema, discutiéndolo según los valores reales del parámetro a:

a x +y = 1,

x +a y = 1

Entonces escribimos

```
Reduce[
        {a x + y == 1,
        x+a y==1},
        { x,y}
        ]
```

Mathematica nos devuelve la siguiente solución:

$$a == 1 \;\&\&\; y == 1 - x \;||$$
$$(-1 + a)\,(1 + a) \neq 0 \;\&\&\; x == \frac{1}{1+a} \;\&\&\; y == 1 - a\,x$$

Hay que interpretar el resultado:

i) Si a= 1 entonces y=1-x. Es decir, el sistema es compatible indeterminado para a=1 con solución y=1-x.

ii) Si (-1 + a) (1 + a) ≠ 0, entonces x=$\frac{1}{1+a}$, y=1-a x. Es decir, si a≠1 y a≠-1, el sistema es compatible determinado y su solución es x=$\frac{1}{1+a}$, y=1-a $\frac{1}{1+a}$.

Es importante destacar que *Mathematica* solo devuelve soluciones. Esto nos indica que en el ejemplo anterior no hay ninguna solución para a=-1, es decir, si a=-1 el sistema es incompatible.

Tampoco dice nada si una variable puede tomar cualquier valor. Es decir, si una incógnita no aparece en una de las soluciones que *Mathematica* devuelve entonces entenderemos que dicha incógnita toma cualquier valor real. Por ejemplo, consideremos el sistema de ecuaciones lineales: x + a y = 0, 2x + a y=0. Si a=0, entonces es fácil observar que las soluciones vienen dadas por x=0, donde y puede tomar cualquier valor real. Observa la solución que *Mathematica* devuelve para el sistema anterior, escribiendo para ello en una celda nueva:
Reduce[{x+a y ==0,2 x +a y==0}, {x,y}] e interpreta el resultado.

Ejercicios

Cuidado con la notación. Deliberadamente, están bien o mal escritos, y tienes que escribirlos bien.

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el comando Solve:

i) 2x+3y=1, -2x+6y =-1

ii) x-3y+4z=0, x+3y+5z=2, 3x+6y-3z =1

iii) 2x+y+z=0, x-3y+z=2

iv) x+y+z=1, 3x-2y+z=1, 2x-3y=1

2) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el comando Reduce e interpreta el resultado:

i) x+a y=1, x- a y = 1

ii) 2x +a y+3z =0, -x + 3a y +5 z=a, x+6 a y +3z = 2a

iii) 2 x + a y + c z =0, b x +z =2

iv) a x + b y = c, x + y = 4

v) 4ax + y +5z =0, -x -2 a y + z=a, x+6 a y +3 a z = 2a

Ejercicio 1. i)

In[1]:= `Solve[{2 x + 3 y == 1, -2 x + 6 y == -1}, {x, y}]`

Out[1]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}, y \to 0\right\}\right\}$

Por tanto la única solución es x = $\frac{1}{2}$, y = 0.

Ejercicio 1. ii)

In[2]:= `Solve[{x - 3 y + 4 z == 0, x + 3 y + 5 z == 2, 3 x + 6 y - 3 z == 1}, {x, y, z}]`

Out[2]= $\left\{\left\{x \to -\frac{1}{35}, y \to \frac{31}{105}, z \to \frac{8}{35}\right\}\right\}$

Por tanto la única solución es x = $-\frac{1}{35}$, y = $\frac{31}{105}$, z = $\frac{8}{35}$.

Ejercicio 1. iii)

In[3]:= `Solve[{2 x + y + z == 0, x - 3 y + z == 2}, {x, y, z}]`

— Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

Out[3]= $\left\{\left\{y \to -\frac{1}{2} - \frac{x}{4},\ z \to \frac{1}{2} - \frac{7x}{4}\right\}\right\}$

Por tanto hay infinitas soluciones dadas por $y = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4}$, $z = \frac{1}{2} - \frac{7x}{4}$, donde x puede ser cualquier número real.

Ejercicio 1. iv)

In[4]:= `Solve[{x + y + z == 1, 3 x - 2 y + z == 1, 2 x - 3 y == 1}, {x, y, z}]`

Out[4]= { }

Por tanto no hay ninguna solución al sistema.

Ejercico 2. i)

In[5]:= `Reduce[{x + a y == 1, x - a y == 1}, {x, y}]`

Out[5]= (a == 0 && x == 1) || (x == 1 && a ≠ 0 && y == 0)

Por tanto si a = 0 el sistema es compatible indeterminado y las soluciones vienen dadas por x = 1, y puede tomar cualquier valor. Por otro lado si a ≠ 0 el sistema es compatible determinado y la solución es x = 1, y = 0.

Ejercicio 2. ii)

In[6]:= `Reduce[{2 x + a y + 3 z == 0, -x + 3 a y + 5 z == a, x + 6 a y + 3 z == 2 a}, {x, y, z}]`

Out[6]= $(a == 0\ \&\&\ x == 0\ \&\&\ z == 0)\ ||\ \left(x == -\frac{7a}{61}\ \&\&\ a \neq 0\ \&\&\ y == \frac{23}{61}\ \&\&\ z == -\frac{3a}{61}\right)$

Por tanto si a = 0 el sistema es compatible indeterminado y las soluciones vienen dadas por x = 0, y puede tomar cualquier valor, z = 0. Por otro lado si a ≠ 0 el sistema es compatible determinado y la solución es $x = -\frac{7a}{61}$, $y = \frac{23}{61}$, $z = -\frac{3a}{61}$.

Ejercicio 2. iii)

In[7]:= **Reduce[{2 x + a y + c z == 0, b x + z == 2}, {x, y, z}]**

Out[7]= $\left(a \neq 0 \,\&\&\, y == \frac{-2 c - 2 x + b c x}{a} \,\&\&\, z == 2 - b x\right) \,||\, \left(a == 0 \,\&\&\, -2 + b c \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{2 c}{-2 + b c} \,\&\&\, z == 2 - b x\right)$

Por tanto si $a \neq 0$ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones vienen dadas como x puede tomar cualquier valor, $y = \frac{-2 c - 2 x + b c x}{a}$, $z = 2 - b x$. Por otro lado si $a = 0$ y $b c \neq 0$ el sistema es también compatible indeterminado y las soluciones son $x = \frac{2 c}{-2 + b c}$, y puede tomar cualquier valor, $z = 2 - b x = 2 - b \frac{2 c}{-2 + b c}$. Finalmente si $a = 0$ y $b c = 0$ el sistema es incompatible.

Ejercicio 2. iv)

In[8]:= **Reduce[{a x + b y == c, x + y == 4}, {x, y}]**

Out[8]= $\left(b == \frac{c}{4} \,\&\&\, a == \frac{c}{4} \,\&\&\, y == 4 - x\right) \,||\, \left(a - b \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{-4 b + c}{a - b} \,\&\&\, y == 4 - x\right)$

Por tanto si $a = b = \frac{c}{4}$ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones vienen dadas como x puede tomar cualquier valor, $y = 4 - x$. Por otro lado si $a \neq b$ el sistema es compatible determinado y la única solución es $x = \frac{-4 b + c}{a - b}$, $y = 4 - x = 4 - \frac{-4 b + c}{a - b}$. Finalmente si $a = b \neq \frac{c}{4}$ el sistema es incompatible.

Ejercicio 2. v)

In[9]:= **Reduce[
{4 a x + y + 5 z == 0, -x - 2 a y + z == a, x + 6 a y + 3 a z == 2 a}, {x, y, z}]**

Out[9]= $-1 + 17 a + 24 a^2 + 24 a^3 \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{-2 a - 47 a^2}{-1 + 17 a + 24 a^2 + 24 a^3} \,\&\&\, y == \frac{1}{27} \left(-235 a - 85 x - 108 a x - 120 a^2 x\right) \,\&\&\, z == \frac{1}{27} \left(47 a + 17 x + 24 a^2 x\right)$

Por tanto si a cumple que $-1+17a+24a^2+24a^3\neq 0$ entonces el sistema es compatible determinado y la solución es $x=\dfrac{-2a-47a^2}{-1+17a+24a^2+24a^3}$, $y==\dfrac{1}{27}\left(-235a-85x-108ax-120a^2x\right)$, $z=\dfrac{1}{27}\left(47a+17x+24a^2x\right)$. Si a cumple que $-1+17a+24a^2+24a^3=0$ el sistema es incompatible.