CONEXIONES EN EL FIBRADO DE REFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN. CONEXIONES CONFORMES

Ignacio Sánchez Rodríguez

Tesis doctoral. Junio 1994

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

CONEXIONES EN EL FIBRADO DE REFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN. CONEXIONES CONFORMES

Memoria presentada por Ignacio SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas.
Dirigida por Eduardo AGUIRRE DABÁN

Madrid, Junio 1994

a Eloisa

Quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos que
me han ofrecido su apoyo y han contribuido con sus sugerencias
a la realización de esta memoria, especialmente
a Eduardo Aguirre que además de buen director
ha sido un gran compañero de trabajo,
a mis amigos Manuel Gutiérrez y Fernando Sanjosé,
a los profesores Miguel Amores, Javier Lafuente y Jaime Muñoz;
al Departamento de Geometría y Topología
de la Facultad de Matemáticas, U. C. M.,
por las facilidades que me ha ofrecido en todo momento y
al Departamento de Economía Financiera y
Contabilidad I de la Facultad de C.C.E.E., U. C. M.,
del que formo parte, por su favorable disposición.
No olvido la estancia de un año en la Universidad de Kent en
Canterbury, becado por la Universidad Complutense de Madrid,
amablemente acogido por el profesor J.S.R. Chisholm.
Esta tesis ha contado con el apoyo económico de la U.C.M.
a través de los Proyectos de Investigación
PR180/91-3547 y DGICYT PB92-0220.

Introducción y objetivos

La noción de contacto de orden superior, formalizada por Ehresmann ([Ehr]) dentro de la teoría de "jets", conduce a la noción de *fibrados de referencias de orden superior* ([Ko1], [G-S], [Yue]). Estos fibrados son generalizaciones naturales del fibrado de referencias lineales y poseen, además, cierto carácter de fibrados "universales" respecto de la noción de objeto geométrico "natural" ([Ter], [P-T]). Las conexiones en los fibrados de referencias de orden superior han sido estudiadas en un contexto más general por Yuen ([Yue]).

En la primera parte de esta tesis (Caps. II a V) hacemos un estudio del fibrado principal de las *referencias de segundo orden* $F^2(M)$ sobre una variedad diferenciable M, y de las conexiones principales definidas en él, *conexiones de segundo orden*; nuestro estudio se basa en la identificación de $F^2(M)$ con cierto subfibrado del fibrado de referencias lineales $L(LM)$, la llamada "primera prolongación" de LM (para otros estudios específicos de $F^2(M)$ véase [Sal], [CDL] y referencias allí).

El fibrado de referencias de segundo orden, aparte de ser la generalización más sencilla del fibrado de referencias lineales, ofrece prometedoras perspectivas de aplicación para la elaboración de modelos en física donde el segundo orden parece ser relevante (aplicaciones de $F^2(M)$ al estudio de la elasticidad de materiales están siendo investigadas en la actualidad, [L-E]).

La noción de *G-estructura* como reducción del fibrado de referencias lineales LM, bajo un subgrupo de Lie G de $GL(n,\mathbf{R})$, unifica, también desde los años 50, un gran número de estructuras de la geometría diferencial (véase a este respecto [Ber], [Ste], [Che], [Ko2]). El estudio de la equivalencia local entre estructuras geométricas tiene su origen en las ideas de Cartan ([Ca1], [Ca3]) y conduce a la noción de *sucesivas prolongaciones de una G-estructura*, cada una de las cuales (siempre posibles de construir, aunque no de forma

unívoca) es un cierto fibrado de referencias lineales sobre la anterior ([Ste], [S-S], [Ko2]). Puede ocurrir que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G sea de "tipo finito r"; en tal caso, dada una G-estructura, cada r-prolongación resulta ser una paralelización de la $(r-1)$-prolongación correspondiente; ello se utiliza, por ejemplo, para demostrar que el grupo de automorfismos de una G-estructura de tipo finito es un grupo de Lie ([Ko2]).

La *integrabilidad* (véase [Ber], [Fuj]) de una G-estructura $P(M,G) \subset LM$, esto es, el si ésta contiene o no secciones *coordenadas* del fibrado de referencias lineales en torno a cada punto de M, puede, en ciertos casos, reducirse ([Gui]) a una secuencia de problemas tales que el planteamiento de cada uno de ellos presupone la resolución afirmativa del anterior. A cada orden r el problema ("$(r-1)$-integrabilidad") consiste en saber si la G-estructura tiene, sobre cada punto de M, "contacto de orden $(r-1)$" con secciones coordenadas del fibrado LM en torno a dicho punto; si la respuesta es afirmativa, se puede construir lo que llamamos "r-levantamiento" P^r de P, constituido por los r-jets en $0 \in \mathbf{R}^n$ de todos aquellos difeomorfismos (entre abiertos) de $\mathbf{R}^n$ en M que proporcionan dicho orden de contacto. P^r resulta ser ([Gui]) un subfibrado principal sobre M del fibrado $F^r(M)$ de referencias de orden r. Las obstrucciones a que los eslabones de esta secuencia de problemas resulten triviales dependen de cierta cohomología (Spencer) sobre el álgebra $\mathfrak{g}$ de G; si $\mathfrak{g}$ es de tipo finito, dicha secuencia es finita ([Gui]). Es conocido ([Gui]) que la 1-integrabilidad de una G-estructura $P(M,G)$ y que, por tanto, se pueda construir su 2-levantamiento $P^2 \subset F^2(M)$ es equivalente a la existencia de conexiones lineales simétricas adaptadas a la G-estructura.

En la segunda parte de esta tesis (Cap. VI) estudiamos los subfibrados de $F^2(M)$ obtenidos como 2-levantamientos de G-estructuras 1-integrables, especialmente el caso en que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es de tipo finito 2; en este caso, analizamos las "formas de tipo Cartan" canónicas que se inducen y su relación con las conexiones de segundo orden. Nuestro estudio se basa en la identificación del 2-levantamiento P^2 de una G-estructuras 1-integrable P con la primera prolongación P_1 de P, que en este caso es única. Las estructuras conformes (en dimensión $n \geq 3$) caen dentro de esta categoría de G-estructuras; llevaremos a cabo (Cap.VII) dos aplicaciones al caso de las estructuras conformes: primero identificando la conocida "conexión normal de Cartan" de una estructura conforme (introducida por Cartan en [Ca2]; véase [Ogi], [Och], [Tan], [Ko2], [Sch]) como cierta forma de tipo Cartan canónica; y segundo encontrando, por cada conexión lineal simétrica adaptada a la estructura conforme, una conexión de segundo orden no trivial. Mencionemos a este respecto las interesantes aplicaciones, suscitadas ya hace algunos años, de los 2-levantamientos de estructuras conformes (en $n = 4$) a la descripción de las teorías de la gravitación ([Hen]).

Pasemos ahora a una descripción somera de los resultados más interesantes de la memoria que aquí se presenta. Comentarios más pormenorizados pueden encontrarse en las introducciones a los distintos capítulos. Las notaciones y convenios utilizados se fijan en el capítulo I. Cuando, a lo largo del texto, nos referimos a las definiciones, lemas, notas, teoremas y corolarios (que numeramos por separado), lo hacemos con las letras D., L., N., T. y C., respectivamente.

En el capítulo II estudiamos los grupos de estructura $G^r(n)$ de los fibrados de referencias $F^r(M)$; destacamos su estructura de producto semidirecto. Nos centramos en $G^2(n)$ y deducimos explícitamente su representación adjunta y una representación natural que denotamos por $\mathcal{A}^2$. Brevemente estudiamos también $G^3(n)$ pues, más adelante, usaremos su correspondiente representación natural $\mathcal{A}^3$ (L.7).

En el capítulo III estudiamos el fibrado de referencias de segundo orden; la clave de nuestro estudio está en la identificación de $F^2(M)$ como la primera prolongación (única) de LM (T.1), lo que permite ver un 2-jet en $F^2(M)$ como una referencia lineal sobre LM determinada por un subespacio horizontal de una conexión lineal simétrica.

En el capítulo IV estudiamos la forma canónica de $F^2(M)$, las conexiones de segundo orden y sus ecuaciones de estructura (T.2). Estos resultados han sido publicados en [A-S]. También estudiamos el caso particular de la conexión de segundo orden inducida por una conexión lineal simétrica, de la que calculamos su "torsión", derivada covariante de la forma canónica, y su curvatura (T.3).

Es bien conocido ([Ati]) que las escisiones de la secuencia exacta de fibrados vectoriales $0 \to AdLM \to TLM/GL(n,\mathbf{R}) \to TM \to 0$ están en correspondencia biyectiva con las conexiones lineales en M. En el capítulo V probamos (T.4) que el fibrado central de esta secuencia es isomorfo al fibrado asociado a $F^2(M)$ y a la representación $\mathcal{A}^2$. También estudiamos el fibrado tangente de segundo orden T^2M y su relación con el fibrado anterior. Destacamos algunos aspectos de las conexiones inducidas en estos fibrados asociados por una conexión de segundo orden.

El capítulo VI contiene los resultados más interesante y originales de esta memoria; en el capítulo VII damos dos aplicaciones a las estructuras conformes. Dada una G-estructura $P(M,G)$, definimos su primera prolongación $P_1^E \subset LP$, respecto de cada elección de un subespacio E complementario del espacio de los cobordes $B^{0,2}(\mathfrak{g})$ en el espacio de los cociclos $Z^{0,2}(\mathfrak{g})$ (la cohomología que nos referimos es la bigraduada de Spencer del álgebra $\mathfrak{g}$). La 1-integrabilidad de P (esto es, la posibilidad de definir el 2-levantamiento P^2), que es equivalente como se sabe a la existencia de conexiones simétricas en P, resulta también

equivalente (T.6) a la unicidad de la primera prolongación, P_1. En este caso P_1 y P^2 se identifican y admiten una estructura de fibrado principal sobre M (L.48), con grupo de estructura $G^2 \subset G^2(n)$ (el "2-levantamiento" de G, isomorfo a $G \otimes \mathfrak{g}_1$); cuando $\mathfrak{g}$ es de tipo 2 probamos (T.7) que las conexiones en P^2 con igual conexión inducida simétrica (en P) vienen caracterizadas por su "torsión". Definimos ahora la segunda prolongación $(P^2)_1^F \subset L(P^2)$, respecto de cada elección de un subespacio F complementario de $B^{1,2}(\mathfrak{g})$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$; esta construcción no es la estándar (véase [Ste], [Ko2]); si F es G-invariante y $\mathfrak{g}$ es de tipo 2, probamos (T.8) que se induce en P^2 una 1-forma canónica ζ^F a valores en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$, que llamamos "de tipo Cartan", y de cuya curvatura damos la ecuación de estructura (T.9). Bajo ciertas condiciones esta 1-forma ζ^F es lo que se llama una "conexión de Cartan" en P^2; así ocurre cuando G es el grupo lineal conforme en dimensión $n \geq 3$, resultando entonces (T.12 en Cap.VII) que para una cierta elección del subespacio F, ζ^F es la llamada "conexión normal de Cartan" de la estructura conforme, que como es sabido controla la integrabilidad de ésta ([Och]). Probamos asimismo (T.10) que, si $\mathfrak{g}$ es de tipo finito 2, cada conexión simétrica λ en P genera, a partir de una 1-forma de tipo Cartan sobre P^2, una conexión en P^2, y viceversa; aplicado este resultado al caso de estructuras conformes, se pone de manifiesto (T.13 en Cap.VII) que, si se elige como 1-forma de tipo Cartan la conexión normal de Cartan de la estructura conforme, la conexión generada en P^2 no es la inducida por λ (en el sentido del Cap.IV). Por último probamos (L.52) un resultado (análogo a otro de Bernard [Ber] en el orden 1, ver L.44) que afirma que una función G-equivariante de P en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$ cuya clase de cohomología en $H^{1,2}(\mathfrak{g})$ sea la llamada "segunda función de estructura" de $P(M, G)$ se corresponde con la "torsión" de una conexión en P^2 (con conexión inducida en P simétrica y fijada previamente de forma arbitraria); en base a este resultado establecemos (T.11) la equivalencia entre la 2-integrabilidad de P, la existencia de conexiones en P^2 con "torsión" nula y la unicidad de la segunda prolongación de P

Una última observación sobre la extensión de esta memoria. Hay bastantes resultados incluidos que son conocidos, lo que en general indicamos explícitamente. El motivo de incluirlos es, por una parte, la gran dispersión de los mismos en la literatura, lo que aconsejaba en lo posible hacer un tratamiento autocontenido del tema; y por otra parte, la dificultad de encontrar demostraciones explícitas para muchos de ellos o la conveniencia de presentar demostraciones alternativas. Salvo casos muy concretos todas las demostraciones son originales. Hemos procurado separar cuidadosamente las demostraciones y las notas del resto de la linea argumental; esperamos que esto sea de utilidad y facilite su lectura.

Contenido

I Notaciones y convenios adoptados. **1**

1 Sobre grupos de Lie. Productos semidirectos. 1

1.1 Conjuntos de aplicaciones lineales. 1

1.2 Grupos de Lie. 2

1.3 Producto semidirecto de grupos de Lie. 3

2 Sobre espacios vectoriales. 4

2.1 En $\mathbf{R}^n$. 4

2.2 En $\mathfrak{gl}(n)$. 4

2.3 En $L^r(n)$. 5

3 Sobre variedades diferenciables. 6

3.1 Definiciones generales. 6

3.2 Formas diferenciales. 8

3.3 Fibrados. 9

4 Sobre el fibrado de referencias lineales. 11

4.1 Conceptos generales. 11

4.2 Coordenadas en LM. Supresión de índices. 13

II Los grupos de "jets" invertibles. **17**

1 Para orden arbitrario. 18

1.1 Su construcción. 18

1.2 Su estructura de producto semidirecto. 19

1.3 Su álgebra de Lie. 19

1.4 La representación natural A^r de $G^r(n)$. 20

2 El grupo de orden 2. 23

2.1 Carta usual de $G^2(n)$. 23

2.2 Carta alternativa de $G^2(n)$. 23

3 Representaciones del grupo de orden 2. 25

3.1 Propiedades de los homomorfismos Q^2 y q^2. 25

3.2 La representación adjunta. 26

3.3 La representación en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$. 28

4 El grupo de orden 3. 30

III Los fibrados de referencias. **37**
1 Para orden arbitrario. 38
1.1 Su construcción. 38
1.2 Como fibrados de referencias lineales. 40
1.3 La forma canónica. 41
2 El fibrado de referencias de segundo orden. 42
2.1 La primera prolongación de LM. 43
2.2 El isomorfismo entre $F^2(M)$ y $(LM)_1$. 50

IV Conexiones de segundo orden **57**
1 Forma canónica y campos fundamentales. 58
1.1 Forma canónica sobre $F^2(M)$. 58
1.2 Campos fundamentales de $F^2(M)$. 60
2 Conexiones de segundo orden. 62
2.1 Definición. Conexión lineal inducida. 62
2.2 Campos estándar horizontales. 65
3 Ecuaciones de estructura. 67
4 Conexiones de segundo orden inducidas. 72
4.1 Secciones de $F^2(M)(LM, S^2(n))$. 72
4.2 Conexiones de segundo orden inducidas 74

V Fibrados asociados al segundo orden. **81**
1 Fibrados asociados. 82
1.1 Definición y propiedades generales. 82
1.2 Fibrados vectoriales. 83
1.3 Sobre algunos fibrados asociados importantes. 84
1.4 Conexiones inducidas en fibrados asociados. 86
1.5 Sobre los fibrados asociados a LM. 87
2 El fibrado asociado a $F^2(M)$ y a A^2. 89
2.1 El fibrado vectorial T^LM. 90
2.2 Isomorfimo canónico de T^LM y $A^2F^2(M)$. 94
2.3 Alzado natural a T^LM de campos de vectores sobre M. . 97
3 El fibrado tangente de segundo orden. 98
3.1 El fibrado tangente de orden r. 99
3.2 T^2M como fibrado asociado a $F^2(M)$. 100
3.3 Relación entre T^2M y T^LM. 103
4 Conexiones en fibrados asociados al orden dos. 108
4.1 Alzados horizontales a $F^2(M)$ de curvas en M. 109
4.2 Conexiones inducidas en T^LM y T^2M. 110
4.3 Tensores de torsión y curvatura de segundo orden 113

VI G-estructuras 1-integrables. **117**
1 Levantamientos de grupos de matrices. 118
1.1 Prolongaciones de álgebras de matrices. 118
1.2 Cohomología de Spencer de $\mathfrak{g}$. 120
1.3 Levantamientos de grupos de matrices. 122
1.4 Levantamiento al orden 2 de G. 126
1.5 Levantamiento al orden 3 de G. 129
2 Integrabilidad de G-estructuras. 133
3 Primera prolongación de G-estructuras. 138
3.1 Primera prolongación P_1^E de una G-estructura P. 139
3.2 El caso E invariante y $\mathfrak{g}_1 = 0$. 145
3.3 Unicidad de la primera prolongación y 1-integrabilidad. . 149
3.4 Conexiones de segundo orden para G-estructuras 1-integrables. 156
3.5 Fibrados asociados a P^2. 157
4 Segunda prolongación de G-estructuras. 158
4.1 Segunda prolongación $(P^2)_1^F$ de una G-estructura P 1-integrable. 160
4.2 El caso F invariante y $\mathfrak{g}_2 = 0$. 168
4.3 Unicidad de la segunda prolongación y 2-integrabilidad. . 177

VII Aplicación a la geometría conforme. **181**
1 Conceptos algebraicos. 182
1.1 El grupo lineal conforme. 182
1.2 El álgebra lineal conforme y sus prolongaciones. 183
1.3 Cohomología de Spencer de $\mathfrak{o}(n)$ y $\mathfrak{c}(n)$. 187
1.4 El levantamiento al orden dos del grupo lineal conforme. 189
1.5 El grupo conforme completo. 192
2 Estructuras conformes de segundo orden. 195
2.1 $O(n)$-estructuras y $C(n)$-estructuras. 195
2.2 Primera prolongación de una $C(n)$-estructura. 196
3 Conexiones de Cartan en estructuras conformes. 198
3.1 Conexiones de Cartan. 198
3.2 La conexión normal de Cartan de una estructura conforme. 199

Bibliografía. **206**

Capítulo I

Notaciones y convenios adoptados.

En este capítulo fijamos las notaciones y convenios empleados en el trabajo, precisamos las definiciones básicas más usadas, especialmente aquellas que tienen un uso diferente según los autores, y recordamos algunos resultados que conviene tener presentes por las frecuentes referencias que haremos a ellos.

Destaquemos la introducción que hemos hecho de las notaciones contenidas en la definición D.1 (apartado 2.3), de gran efecto simplificador, y la supresión, en la medida de lo posible, de índices en el uso de expresiones coordenadas (apartado 4.2), ganando en claridad de exposición.

1 Sobre grupos de Lie. Productos semidirectos.

1.1 Conjuntos de aplicaciones lineales.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita.

$GL(E)$ es el grupo de Lie de automorfismos (lineales) de E.

$\mathfrak{gl}(E)$ es el álgebra de Lie de endomorfismos (lineales) de E. El álgebra de Lie de $GL(E)$ es $\mathfrak{gl}(E)$.

Si además E es un álgebra:

$End(E)$ es el álgebra de Lie de endomorfismos del álgebra E (endomorfismos del espacio vectorial que preservan el producto o corchete).

$Aut(E)$ es el grupo de Lie de automorfismos del álgebra E (automorfismos del espacio vectorial que preservan el producto o corchete). $Aut(E)$ es un subgrupo de Lie cerrado de $GL(E)$ ([GHV, II, p.97]).

$Der(E)$ es el álgebra de Lie de derivaciones lineales de E. El álgebra de Lie de $Aut(E)$ es $Der(E)$ ([GHV, II, p.97]).

Si E y F son espacios vectoriales:

$L(E,F)$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en F.

Si además E y F son álgebras, $Hom(E,F)$ es el espacio vectorial de homomorfismos de álgebras (aplicaciones lineales que preservan el producto o corchete) de E en F.

1.2 Grupos de Lie.

Sea A un grupo de Lie. Denotemos el elemento identidad de A por I_A. Sea $\mathfrak{a}$ el álgebra de Lie de A entendida como el espacio vectorial tangente a A en I_A, $T_{I_A}A$, con el corchete inducido por el corchete de Lie de campos invariantes por la izquierda.

$Aut(A)$ es el grupo de automorfismos de A (homomorfismos biyectivos del grupo de Lie A en sí mismo). Si A es simplemente conexo $Aut(A)$ es un grupo de Lie isomorfo a $Aut(\mathfrak{a})$ ([GHV, II, p.98]). Si A es conexo $Aut(A)$ es un grupo de Lie ([GHV, II, p.98]).

Sean A y B dos grupos. $Hom(A,B)$ es el conjunto de homomorfismos de grupos entre A y B.

Denotaremos por $Int^A : A \times A \to A$, la acción por la izquierda de A sobre sí mismo por automorfismos internos, $Int^A(a,b) := aba^{-1}$. Escribiremos también $Int^A_a(b) \equiv Int^A(a,b)$; así considerado, resulta que $Int^A \in Hom(A, Aut(A))$ ([GHV, II, p.98]).

Denotaremos por $Ad^A \in Hom(A, GL(\mathfrak{a}))$ la representación adjunta del grupo A (cuando el grupo A se sobrentienda, la denotaremos simplemente por Ad).

Denotaremos por $ad^{\mathfrak{a}} \in Hom(\mathfrak{a}, \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}))$ la representación adjunta del álgebra $\mathfrak{a}$ (cuando el álgebra $\mathfrak{a}$ se sobrentienda, la denotaremos simplemente por ad).

1.3 Producto semidirecto de grupos de Lie.

Sean A y B dos grupos y $Q \in Hom(A, Aut(B))$. Definimos el *producto semidirecto* $A \otimes B$ *asociado a* Q como el grupo obtenido en el producto cartesiano $A \times B$ con la ley de producto $(a\ ,\ b) \cdot (a'\ ,\ b') = (a \cdot a'\ ,\ Q(a'^{-1})(b) \cdot b')$. El elemento identidad es (I_A, I_B) y el elemento inverso viene dado por $(a,b)^{-1} = (a^{-1}, Q(a)(b^{-1}))$. Identificando B con $(I_A\ ,\ B)$, resulta que B es un subgrupo invariante o normal de $A \otimes B$.

Una definición equivalente es la siguiente: Diremos que un grupo G *es un producto semidirecto de* A *y* B si existe una secuencia exacta con escisión

$$1 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} G \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} A \longrightarrow 1,$$

es decir, si existen α, β y γ homomorfismos tales que α y γ son inyectivos, β es sobreyectivo, $Ker\ \beta = Im\ \alpha$ y $\beta \circ \gamma = I_A$.

Si existe una tal secuencia, entonces G resulta ser isomorfo al producto semidirecto $A \otimes B$ asociado a $Q \in Hom(A, Aut(B))$ determinado por la condición

$$\alpha(Q(a)(b)) = \gamma(a) \cdot \alpha(b) \cdot \gamma(a^{-1}),$$

donde el isomorfismo viene dado por la aplicación[1]

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\cong} & A \otimes B \\ g & \longmapsto & (\beta(g), \alpha^{-1}(\gamma(\beta(g^{-1})) \cdot g)) \end{array}$$

(obsérvese que $\gamma(\beta(g^{-1})) \cdot g \in Ker\,\beta$, y, por tanto, la aplicación está bien definida) y el isomorfismo inverso viene dado por $(a,b) \mapsto \gamma(a) \cdot \alpha(b)$. La definición se extiende de manera natural a grupos de Lie y el álgebra de Lie de $A \otimes B$ resulta ser una *suma semidirecta* $\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$, siendo $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ las álgebras de Lie de A y B, es decir, resulta ser un álgebra de Lie modelada sobre el espacio vectorial producto $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ de tal manera que $\mathfrak{b}$, identificada con $(0, \mathfrak{b})$ (respectivamente, $\mathfrak{a}$, identificada con $(\mathfrak{a}, 0)$), es un ideal (resp., una subálgebra) de $\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ ([GHV, II, p.98], [Per, p.230]).

[1] En este trabajo usaremos el signo $\equiv$ para relacionar dos notaciones o conceptos equivalentes que serán indistintamente empleados en el texto; y usaremos el signo $\cong$ para relacionar dos conceptos que, aunque equivalentes, estarán distinguidos en su uso salvo que explícitamente se advierta lo contrario.

2 Sobre espacios vectoriales.

2.1 En $\mathbf{R}^n$.

$\{e_i\} \equiv \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$.

$\{u^i\} \equiv \{u^1, u^2, \ldots, u^n\}$ es la base dual de la anterior, $u^i(e_j) = \delta^i_j$.

I es la aplicación identidad en $\mathbf{R}^n$; en componentes no es otra que $I \equiv (u^1, u^2, \ldots, u^n)$.

Si $v \in \mathbf{R}^n$, sus coordenadas estándar son $v^i := u^i(v)$. Se escribirá $v \equiv (v^i)$.

$T(n)$ es el grupo de traslaciones en $\mathbf{R}^n$, y T_v es la traslación por $v \in \mathbf{R}^n$.

$GL(n) \equiv GL(n, \mathbf{R})$ es el grupo general lineal de transformaciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$ o el grupo de matrices reales invertibles $(n \times n)$.

2.2 En $\mathfrak{gl}(n)$.

$\mathfrak{gl}(n) \equiv \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ es el álgebra de endomorfismos de $\mathbf{R}^n$ o el álgebra de matrices reales $(n \times n)$, identificada con el álgebra de Lie de $GL(n)$. Con esta identificación, las representaciones adjuntas $Ad^{GL(n)}$ de $GL(n)$ y $ad^{\mathfrak{gl}(n)}$ de $\mathfrak{gl}(n)$ vienen dadas por:
$Ad^{GL(n)}_a(\alpha) = a\alpha a^{-1}$ y $ad^{\mathfrak{gl}(n)}_\alpha(\beta) \equiv [\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$, $\forall\, a \in GL(n)$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{gl}(n)$.

Si $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ y $v \in \mathbf{R}^n$, se escribirá $\alpha v \equiv \alpha(v)$.

$\{E^i_j\} \equiv \{E^1_1, E^2_1, E^3_1, \ldots, E^{n-1}_n, E^n_n\}$ es la base canónica de $\mathfrak{gl}(n)$, $E^j_i e_k = \delta^j_k e_i$. Se obtiene así la identificación canónica $\mathfrak{gl}(n) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ (que no recibe ningún nombre especial). Se verifica que $[E^j_i, E^s_t] = \delta^j_t E^s_i - \delta^s_i E^j_t$.

$\{u^i_j\} \equiv \{u^1_1, u^1_2, u^1_3, \ldots, u^n_{n-1}, u^n_n\}$ es la base dual de la anterior, $u^i_j(E^k_l) = \delta^i_l \delta^k_j$.

Si $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$, sus coordenadas estándar son $\alpha^i_j := u^i_j(\alpha) = u^i(\alpha e_j)$. Se escribirá $\alpha \equiv (\alpha^i_j)$.

Sobrentenderemos siempre a $GL(n)$ incluido canónicamente como subconjunto abierto de $\mathfrak{gl}(n)$; como tal, tiene las mismas coordenadas estándar que $\mathfrak{gl}(n)$. En particular, si $a \in GL(n)$, $a^i_j := u^i_j(a)$ y $a \equiv (a^i_j)$. Las coordenadas de la matriz inversa de (a^i_j) se escribirán $(a^{-1})^i_j$.

2.3 En $L^r(n)$.

Sea $L^r(n) \equiv L(\mathbf{R}^n \times \overset{r}{\cdots} \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ el espacio vectorial de las aplicaciones r-lineales de $\overbrace{\mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n}^{r \text{ veces}}$ en $\mathbf{R}^n$.

$\{E_i^{j_1 \ldots j_r}\} \equiv \{E_1^{1\ldots1}, E_1^{1\ldots2}, \ldots, E_n^{n\ldots n}\}$ es la base canónica de $L^r(n)$,

$$E_i^{j_1 \ldots j_r}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_r}) = \delta_{k_1}^{j_1} \ldots \delta_{k_r}^{j_r} e_i.$$

Se obtiene así la identificación canónica $L^r(n) \cong \mathbf{R}^{n^{r+1}}$.

$\{u^i_{j_1 \ldots j_r}\}$ es la base dual de la anterior, $u^i_{j_1 \ldots j_r}(E_l^{k_1 \ldots k_r}) = \delta_l^i \delta_{j_1}^{k_1} \ldots \delta_{j_r}^{k_r}$.

Si $t \in L^r(n)$, sus coordenadas estándar son

$$t^i_{j_1 \ldots j_r} := u^i_{j_1 \ldots j_r}(t) = u^i(t(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})).$$

Se escribirá $t \equiv (t^i_{j_1 \ldots j_r})$.

$S^r(n)$ ($A^r(n)$) es el subespacio de $L^r(n)$ de aplicaciones r-lineales simétricas (antisimétricas). En el caso $r = 1$ es $S^1(n) \equiv L^1(n) \equiv \mathfrak{gl}(n)$.

Si $t \in S^r(n)$ ($t \in A^r(n)$), sus coordenadas estándar $t^i_{j_1 \ldots j_r}$ son simétricas (antisimétricas) en los índices inferiores. Tomando $(t^i_{j_1 \ldots j_r})$, con $j_1 \leq \cdots \leq j_r$ ($j_1 < \cdots < j_r$), como coordenadas de $S^r(n)$ ($A^r(n)$) se obtiene la identificación canónica $S^r(n) \cong \mathbf{R}^{n\binom{n+r-1}{r}}$, ($A^r(n) \cong \mathbf{R}^{n\binom{n}{r}}$), y corresponde a la base de $S^r(n)$ ($A^r(n)$) obtenida de la base canónica $\{E_i^{j_1 \ldots j_r}\}$ por simetrización (antisimetrización) en los índices $\{j_1, \ldots, j_r\}$.

Si $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ y $t \in L^r(n)$, denotaremos $\alpha t \equiv \alpha t(\cdot, \ldots, \cdot) \in L^r(n)$ y $t(\alpha, \ldots, \alpha) \equiv t(\alpha\,\cdot, \ldots, \alpha\,\cdot) \in L^r(n)$.

> **Nota 1** Si $v \in \mathbf{R}^n$ y $t \in L^r(n)$, con $r > 1$, denotaremos $t(v) \equiv t(v, \cdot, \ldots, \cdot) \in L^{r-1}(n)$. Así visto, resulta que $t \in L(\mathbf{R}^n, L^{r-1}(n))$. En este trabajo usaremos la identificación $L^r(n) \equiv L(\mathbf{R}^n, L^{r-1}(n))$ que se obtiene por este procedimiento; sobre todo el caso $r = 2$, en el cual se identifican $L^2(n) \equiv L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n))$.

La siguiente definición introduce unas notaciones que usaremos frecuentemente

Definición 1

a. *Sea* $t_a := at(a^{-1}, \ldots, a^{-1})$, $\forall\, a \in GL(n)$, $\forall\, t \in L^r(n)$.

b. *Sea* $t^\alpha := \alpha t - t(\alpha\cdot,\cdot,\dots,\cdot) - \cdots - t(\cdot,\dots,\cdot,\alpha\cdot)$, $\forall\,\alpha\in\mathfrak{gl}(n)$, $\forall\,t\in L^r(n)$.

Si llamamos $Q(a): t \to t_a$, entonces $Q \in Hom(GL(n), GL(L^r(n)))$. Si llamamos $q(\alpha): t \to t^\alpha$, entonces $q \in Hom(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{gl}(L^r(n)))$. Teniendo en cuenta que la derivada de la aplicación $GL(n) \to GL(n)$, $a \mapsto a^{-1}$, en I es igual a la aplicación $\mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(n)$, $\alpha \mapsto -\alpha$, es fácil probar que $q = Q_*|_I$. Es inmediato verificar que si $t \in S^r(n)$ entonces $t_a \in S^r(n)$ y $t^\alpha \in S^r(n)$.

Dado $t \in L^r(n)$ definimos el *simetrizado* (*antisimetrizado*) de t, $\mathbb{S}(t) \in S^r(n)$ ($\mathbb{A}(t) \in A^r(n)$), por la expresión ($\forall\, v_1,\dots,v_r \in \mathbf{R}^n$):

$$\mathbb{S}(t)(v_1,\dots,v_r) := \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P_r} t(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)})$$

$$(\,\mathbb{A}(t)(v_1,\dots,v_r) := \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P_r} (-1)^\sigma t(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)})\,),$$

con P_r el conjunto de las permutaciones de $\{1,\dots,r\}$ (y con $(-1)^\sigma = \pm 1$ el signo de σ).

3 Sobre variedades diferenciables.

3.1 Definiciones generales.

En este trabajo entenderemos por *variedad* una variedad diferenciable, C^∞, real y cuya topología es Hausdorff y admite una base numerable. Si no se advierte lo contrario, las *aplicaciones* (secciones, proyecciones, etc.) entre variedades las entenderemos como aplicaciones diferenciables, C^∞.

Sea M una variedad y sea $m \in M$. T_mM es el espacio tangente a M en m y TM es el fibrado tangente de M. Si U es un abierto de M, identificamos $TU \equiv TM|_U$.

$\mathcal{F}(M)$ es el conjunto de funciones diferenciables de M en $\mathbf{R}$.

Si E es un espacio vectorial, $\mathcal{F}(M,E)$ es el conjunto de funciones diferenciables de M en E.

Nota 2 Si $f \in \mathcal{F}(M,E)$, escribiremos $f|_m \equiv f(m) \in E$. La notación no estándar $f|_m$ se usará solamente en algunos casos para evitar una acumulación de paréntesis.

$\mathfrak{X}(M)$ es el conjunto de campos (de vectores) sobre M. Si $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}(M)$, escribiremos $\mathrm{X}|_m \in T_m M$.

Sea N otra variedad y sea $f : M \to N$ una aplicación. Denotaremos por $f_* : TM \to TN$ la aplicación tangente (o derivada) de f y por $f_*|_m$ la restricción de f_* a $T_m M$. Si $X \in T_m M$, escribiremos $f_* X \equiv f_*(X)$.

Diremos que f es un *difeomorfismo* si f es biyectiva y diferenciable y f^{-1} es diferenciable. Diremos que f es un *difeomorfismo local*, una *inmersión* o una *submersión*, si $f_*|_m$ es un isomorfismo, un monomorfismo o un epimorfismo, respectivamente, $\forall\, m \in M$.

Si f es inyectiva y una inmersión diremos que es una *inmersión inyectiva*. Si f es una inmersión inyectiva que, además, es un homeomorfismo de M en $f(M)$ con la topología relativa a N, diremos que f es una *inmersión regular*.

Si S es una variedad y, a la vez, un subconjunto de M tal que la inclusión $i : S \to M$ es una inmersión diremos que S es una *subvariedad* de M, y si i es una inmersión regular diremos que S es una *subvariedad regular* de M.

Una *curva* γ *en* M será entendida siempre como $\gamma : \mathcal{J} \subset \mathbf{R} \to M$, $\tau \mapsto \gamma\tau$, con $\mathcal{J}$ un intervalo abierto de $\mathbf{R}$. La *curva de vectores tangentes a* γ, que denotaremos por γ_*, es la curva en TM $\gamma_*\tau := \gamma_*(\frac{d}{du}\big|_\tau)$, siendo u la carta identidad en $\mathbf{R}$ y $\frac{d}{du}$ el campo de vectores estándar sobre $\mathbf{R}$.

Un espacio vectorial E tiene una estructura canónica de variedad. TE es canónicamente isomorfo a $E \times E$ y, si no se advierte otra cosa, para cada $v \in E$ identificaremos $T_v E \equiv E$.

> Si $b_1, \ldots, b_n$ es una base de E y $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ son las coordenadas inducidas en E, la identificación $T_v E \equiv E$ consiste en $\partial_{\varepsilon^i}|_v \overset{\equiv}{\longleftrightarrow} b_i$.

Sean E y F espacios vectoriales. Sea $g : V \to F$ una aplicación de un abierto $V \subset E$ en F:

$Dg : V \to L(E, F)$, $v \mapsto Dg|_v$, es la *aplicación diferencial de* g. Identificaremos $Dg|_v \equiv g_*|_v$ una vez identificados $T_v E$ y $T_{g(v)} F$ con E y F, respectivamente.

$D^r g : V \to L(E, (L(E \times \overset{r-1}{\cdots} \times E, F) \cong L(E \times \overset{r}{\cdots} \times E, F)$ es definido por recurrencia como $D^r g := D(D^{r-1} g)$. Se tiene que $D^r g|_v$ es una aplicación r-lineal simétrica.

Sea $E = \mathbf{R}$; entonces se tiene el isomorfismo $L(\mathbf{R}, F) \to F$, $\alpha \mapsto \alpha(1)$, que permite identificar $L(\mathbf{R}, F) \cong F$ y también, por recurrencia, $L(\mathbf{R}\times \overset{r}{\cdots} \times\mathbf{R}, F) \cong F$. Así, para $\gamma : \mathcal{J} \subset \mathbf{R} \to F$, se puede considerar que $D^r\gamma|_\tau \in F, \forall \tau \in \mathcal{J}$. En estos casos usaremos la notación $\left.\frac{d^r\gamma}{du^r}\right|_\tau \equiv D^r\gamma|_\tau$.

3.2 Formas diferenciales.

$\Lambda^r(M)$ es el conjunto de formas diferenciales de grado r (r-formas) sobre una variedad M. Si $\mu \in \Lambda^r(M)$, denotaremos por $\mu|_m \equiv \mu(m)$ la aplicación r-lineal antisimétrica determinada por μ, $\mu|_m : T_mM \times \cdots \times T_mM \to \mathbf{R}$. Si $X_1, \ldots, X_r \in T_mM$, escribiremos $\mu(X_1, \ldots, X_r) \equiv \mu|_m(X_1, \ldots, X_r)$. Entenderemos que $\Lambda^0(M) \equiv \mathcal{F}(M)$.

La diferencial exterior de μ es $d\mu$. El producto exterior de $\mu \in \Lambda^j(M)$ y $\mu' \in \Lambda^k(M)$ es ([GHV, I, sec.3.19])

$$\mu \wedge \mu'(X_1, \ldots, X_{j+k}) := \frac{(j+k)!}{j!k!}\mathbb{A}(\mu \otimes \mu')(X_1, \ldots, X_{j+k}) =$$
$$= \frac{1}{j!k!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \mu(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(j)})\mu'(X_{\sigma(j+1)}, \ldots, X_{\sigma(j+k)}),$$

donde la suma se hace sobre todas las permutaciones σ de $\{1, \ldots, j+k\}$ y $(-1)^\sigma = \pm 1$ es el signo de σ.

Dada una aplicación $f : M \to N$, $f^* : \Lambda^r(N) \to \Lambda^r(M)$ es la *imagen recíproca* de f.

Si E un espacio vectorial, $\Lambda^r(M, E)$ es el conjunto de r-formas E-valuadas.

Sean E un álgebra de Lie y F un espacio vectorial, sea $\mathcal{R}$ una representación de E en F, es decir, $\mathcal{R} \in Hom(E, \mathfrak{gl}(F))$, y sean $\mu \in \Lambda^j(M, E)$ y $\nu \in \Lambda^k(M, F)$. Definimos el *producto exterior asociado a* $\mathcal{R}$, $\mu \dot\wedge_{\mathcal{R}} \nu \in \Lambda^{j+k}(M, F)$, por

$$\mu \dot\wedge_{\mathcal{R}} \nu(X_1, \ldots, X_{j+k}) :=$$
$$\frac{1}{j!k!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \mathcal{R}_{\mu(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(j)})}\nu(X_{\sigma(j+1)}, \ldots, X_{\sigma(j+k)}).$$

La diferencial exterior d verifica ([Kos, 1.8])

$$d(\mu \dot\wedge_{\mathcal{R}} \nu) = d\mu \dot\wedge_{\mathcal{R}} \nu + (-1)^j \mu \dot\wedge_{\mathcal{R}} d\nu.$$

Escribiremos $\dot\wedge \equiv \dot\wedge_{\mathcal{R}}$ cuando la representación $\mathcal{R}$ se sobrentienda.

Para el caso en que usemos la representación adjunta ad de E usaremos la notación $[\mu,\mu'] \equiv \mu\dot{\wedge}_{ad}\mu'$; explícitamente, si $\mu \in \Lambda^j(M,E)$ y $\mu' \in \Lambda^k(M,E)$, definimos $[\mu,\mu'] \in \Lambda^{j+k}(M,E)$ por

$$[\mu,\mu'](X_1,\ldots,X_{j+k}) := \frac{1}{j!k!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}[\mu(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(j)}),\mu'(X_{\sigma(j+1)},\ldots,X_{\sigma(j+k)})].$$

3.3 Fibrados.

En este trabajo un *fibrado* será entendido como ([GHV, I, p.38]) una submersión suprayectiva (*proyección*) $\pi : P \to M$ que es *localmente trivializable*; esto es: existe una variedad (*fibra típica*) F tal que, $\forall\, m \in M$, existe un entorno U de m y existe un difeomorfismo (*trivialización local de* P) $\Psi : P|_U \longrightarrow U \times F$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P|_U & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ U & \xrightarrow{id} & U. \end{array}$$

Un fibrado $P(M,F,\pi)$ con fibra típica F, base M, espacio total P, y proyección π, será denotado por $P(M,F)$ ó $P \to M$ ó, simplemente, por P, según lo que se dé por sobrentendido.

Denotaremos por $Sec(P)$ las secciones globales (si existen) de $P \to M$ y por $Sec_m(P)$ las secciones de $P \to M$ definidas en un entorno de $m \in M$.

Por *aplicación fibrada*, $f : P(M,F,\pi) \to P'(M',F',\pi')$, entre dos fibrados (o *morfismo de fibrados*) se entenderá una aplicación (diferenciable) entre ambos que *preserve las fibras*, esto es, tal que: $\pi(p) = \pi(p') \Rightarrow \pi'(f(p)) = \pi'(f(p'))$ ([Die, XVI.12], [GHV, I, p.39]). Una aplicación fibrada $f : P \to P'$ induce una aplicación (necesariamente diferenciable) entre las bases $\bar{f} : M \to M'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ M & \xrightarrow{\bar{f}} & M'. \end{array}$$

Un *isomorfismo de fibrados* es ([Die, 16.12]) una aplicación fibrada que es a su vez un difeomorfismo y que induce un difeomorfismo entre las bases.

Un *subfibrado* P' de un fibrado P es una subvariedad de P que es a su vez un fibrado tal que la inclusión es una aplicación fibrada y la aplicación inducida entre las bases es una inmersión inyectiva.

Un *fibrado principal* P *con grupo de estructura* G es un fibrado $P(M, G, \pi)$ con fibra típica un grupo de Lie G, donde hay definida una acción por la derecha de G sobre P, que se denotará por $R_a z \equiv za$, $\forall\, z \in P$, $\forall\, a \in G$, y que admite, para cada $m \in M$, una trivialización local $\Psi : P|_U \longrightarrow U \times G$, con $m \in U$, verificando la propiedad

$$\Psi(za) = \Psi(z) \cdot a \quad (\text{entendiéndose } (m, a) \cdot a' \equiv (m, aa') \in U \times G).$$

Una *trivialización local en un fibrado principal* P se sobrentenderá que es una que verifica esta propiedad. M se identificará canónicamente con P/G.

Una conexión ω en $P(M, G, \pi)$ se entenderá como la 1-forma de conexión ω o, equivalentemente, como la correspondiente distribución de subespacios ω-horizontales.

Sea $\gamma : \mathcal{J} \to M$ una curva en M con $0 \in \mathcal{J}$. Un *alzado* ω*-horizontal de* γ *a* P es una curva γ_ω en P tal que $\pi \circ \gamma_\omega = \gamma$ y $\gamma_{\omega *}$ es ω-horizontal, esto es, $\omega(\gamma_{\omega *}\tau) = 0$, $\forall\, \tau \in \mathcal{J}$. Dado $p \in P$, con $\gamma 0 = \pi(p)$, existe un único alzado ω-horizontal de γ a P tal que $\gamma_\omega 0 = p$.

Sea X un campo de vectores sobre M. El *alzado* ω*-horizontal de* X *a* P es el único campo X_ω sobre P tal que $\pi_* \circ X_\omega = X \circ \pi$ y $\omega(X_\omega|_p) = 0$, $\forall\, p \in P$ (necesariamente $R_{a*} \circ X_\omega = X_\omega \circ R_a$, $\forall\, a \in G$).

Sean $P(M, G, \pi)$ y $P'(M', G', \pi')$ dos fibrados principales; un *homomorfismo de fibrados principales* es ([K-N, p.53]) un par (f, h) (que se denotará simplemente por f si se sobrentiende h), siendo $f : P \to P'$ una aplicación (fibrada, necesariamente) y $h : G \to G'$ un homomorfismo de grupos de Lie tal que $f(za) = f(z)h(a)$, $\forall\, z \in P$, $\forall\, a \in G$. Un *isomorfismo de fibrados principales* es un homomorfismo (f, h) de fibrados principales tal que f induce un difeomorfismo entre las bases y h es un isomorfismo de grupos de Lie (necesariamente, (f, h) es un isomorfismo de fibrados).

Un *subfibrado principal* P' de un fibrado principal P es ([K-N, p.53]) una subvariedad de P que es a su vez un fibrado principal tal que la inclusión es un homomorfismo de fibrados principales y la aplicación inducida entre las bases es una inmersión inyectiva. Si además la aplicación inducida entre las bases es la aplicación identidad se dirá que P' es una *reducción* de P.

Sea $P(M,G,\pi)$ un fibrado principal. Denotaremos por $Aut(P)$ (*automorfismos de* P) los isomorfismos de P en sí mismo (como fibrado principal) correspondientes al automorfismo identidad de G, y por $Aut_{id}(P)$ (*automorfismos verticales de* P) los automorfismos de P que inducen en la base la aplicación identidad.

Sea (f,h) un homomorfismo de fibrados principales de $P(M,G)$ en $P'(M',G')$, tal que la aplicación inducida entre las bases $\bar{f} : M \to M'$ sea un difeomorfismo. Dada una conexión ω en $P(M,G)$ se denominará *imagen directa de* ω *por* f a la única conexión ω' en P' que verifica ([K-N, II,Prop.6.1]) $f^*\omega' = \bar{h} \circ \omega$ (siendo $\bar{h} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ el homomorfismo de álgebras de Lie correspondiente a $h : G \to G'$).

4 Sobre el fibrado de referencias lineales.

4.1 Conceptos generales.

Sea M una variedad de dimensión n. Sea LM el *fibrado de referencias lineales* de M, entendido como el conjunto de isomorfismos lineales $l : \mathbf{R}^n \to T_mM$, $\forall\, m \in M$ (equivalentemente, LM se puede entender como el conjunto de bases de T_mM, $\forall\, m \in M$, bajo la correspondencia $l \leftrightarrow \{l(e_1),\ldots,l(e_n)\}$).

Denotaremos por π^L la proyección $LM \to M$ y por R^L la acción por la derecha de $GL(n)$ sobre LM; escribiremos $R^L_a l \equiv la := l \circ a$, con $a \in GL(n)$.

Denotaremos por $\theta^L \equiv (\theta^i)$ la 1-*forma canónica* sobre LM, esto es, la 1-forma $\mathbf{R}^n$-valuada siguiente:

$$\theta^L(X) := l^{-1}({\pi^L}_* X),\ \forall\, X \in T_l LM.$$

Se verifica $R^{L\,*}_a \theta^L = a^{-1} \circ \theta^L$.

Denotaremos por $\alpha^\sharp$ el *campo fundamental* sobre LM generado por $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$. Conviene recordar que

$$\alpha^\sharp|_{la} = R^L_{a*}\left((a\alpha a^{-1})^\sharp|_l\right),$$

o también

$$R^L_{a*}\alpha^\sharp = (Ad^{GL(n)}_{a^{-1}}\alpha)^\sharp.$$

Sea λ una *conexión lineal* en M, esto es, una conexión en LM (que identificaremos con la forma de conexión asociada $\lambda \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(n))$). Recordemos que se verifica

$$R_a^{L\,*}\lambda = Ad_{a^{-1}}^{GL(n)} \circ \lambda.$$

Denotaremos por $B^\lambda(v)$ el *campo estándar λ-horizontal* correspondiente a $v \in \mathbf{R}^n$. Conviene recordar que

$$B^\lambda(v)|_{la} = R_{a\,*}^L \left(B^\lambda(av)|_l \right),$$

o también

$$R_{a\,*}^L B^\lambda(v) = B^\lambda(a^{-1}v).$$

Recordemos la torsión Θ_λ y la curvatura Ω_λ de una conexión lineal λ:

$$\begin{cases} \Theta_\lambda := D^\lambda \theta^L, \\ \Omega_\lambda := D^\lambda \lambda, \end{cases}$$

(con D^λ la derivada covariante respecto de λ) que verifican las siguientes ecuaciones de estructura (ver, p. ej., [K-N, III, Th.2.4])

$$\begin{cases} d\theta^L = -\lambda \dot{\wedge} \theta^L + \Theta_\lambda, \\ d\lambda = -\frac{1}{2}[\lambda, \lambda] + \Omega_\lambda, \end{cases}$$

y las identidades de Bianchi

$$\begin{cases} D^\lambda \Theta_\lambda = \Omega_\lambda \dot{\wedge} \theta^L, \\ D^\lambda \Omega_\lambda = 0. \end{cases}$$

Si P es un fibrado principal sobre M con grupo de estructura G, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$, LP será entendido como el conjunto de isomorfismos lineales $z : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} \to T_l P$, $\forall\, l \in P$. Se hará equivalente al conjunto de bases de $T_l P$, $\forall\, l \in P$, sólo si está dada canónicamente una base en $\mathfrak{g}$.

Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Una *G-estructura sobre* una variedad M, $P(M, G)$, es una reducción (ver 3.3) del fibrado de referencias lineales LM con grupo de estructura G. Sea $P(M, G)$ una G-estructura. P es una subvariedad de LM. La proyección de P en M es la restricción de $\pi^L : LM \to M$ a P, y la denotaremos por la misma letra π^L. También, la restricción a P de la 1-forma canónica θ^L sobre LM da lugar a una 1-forma $\mathbf{R}^n$-valuada sobre P, que llamaremos la *1-forma canónica sobre P* y que denotaremos igualmente por θ^L. Si $l \in P$, podemos considerar que $T_l P \subset T_l LM$; entonces, dado $\alpha \in G$,

el campo fundamental $\alpha^\sharp$ sobre P, obtenido de la acción de G sobre P, se identifica con la restricción a P del campo fundamental $\alpha^\sharp$ sobre LM obtenido de la acción de $GL(n)$ sobre LM. Dada una conexión λ en P, ésta induce (por imagen directa) una conexión en LM que denotaremos igualmente por λ.

4.2 Coordenadas en LM. Supresión de índices.

Sea $(x \equiv (x^i), U)$ una carta de M, $x : U \to \mathbf{R}^n$, y sea $m \in U$. Cuando no se preste a confusión, escribiremos las expresiones coordenadas sin índices, como en los siguientes casos:

Si $v \in \mathbf{R}^n$ escribiremos[2]: $v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m \equiv v\, \partial_x|_m$.

Análogamente, si $\xi \in \mathbf{R}^{n*}$, escribiremos: $\xi_i\, dx^i|_m \equiv \xi\, dx|_m$.

Denotamos por $((x_{-1}, x_0), LM|_U)$ la carta inducida en LM de la siguiente manera

$$(x_{-1}, x_0) \equiv (x^i, x^i_j) : \begin{array}{ccc} LM|_U & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times GL(n) \\ l & \longmapsto & (x(\pi^L(l)), x_*|_{\pi^L(l)} \circ l). \end{array}$$

Una forma equivalente de definir la coordenada x_0 es: sobrentendiendo l como una base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de T_mM, $(m = \pi^L(l))$, se tiene que $X_j = x^i_j(l) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m$; o escrito abreviadamente $l = x_0(l)\, \partial_x|_m$.

Denotamos a la matriz inversa de $x_0 \equiv (x^i_j)$ por ${x_0}^{-1} \equiv (({x^{-1}})^i_j)$ (no se debe confundir $(({x^{-1}})^i_j)$, que es una función de U en $GL(n)$, con x^{-1}, la inversa de la carta x).

Denotamos por $\sigma^L_x : U \to LM|_U$, $\sigma^L_x(m) = {x^{-1}}_*|_{x(m)}$ (identificando $T_{x(m)}\mathbf{R}^n$ con $\mathbf{R}^n$) a la sección de LM sobre U inducida por la carta (x, U). Entonces se tiene que: $x_0(l) = a \in GL(n)$ si y sólo si $l = \sigma^L_x(\pi^L(l))a$. Obviamente $(x_{-1}, x_0) \circ \sigma^L_x = (x, I)$.

Denotamos por $\Psi^L_x : LM|_U \to U \times GL(n)$, $\Psi^L_x(l) = (\pi^L(l), x_0(l))$ a la trivialización local de LM inducida por la carta (x, U). Entonces se tiene que: $(x_{-1}, x_0) = (x, I_{GL(n)}) \circ \Psi^L_x$. Y también se tiene que: $\sigma^L_x(m) = {\Psi^L_x}^{-1}(m, I)$.

[2]Si no se advierte lo contrario, en este trabajo usamos el convenio siguiente: si un mismo índice aparece repetido en un término como superíndice y como subíndice se sobrentenderá que delante de ese término habrá un sumatorio extendido a todos los posibles valores de dicho índice.

Para la acción R^L se tiene que:

$$(x_{-1}, x_0)(la) = (x_{-1}(l), x_0(l)a);$$

y se verifica que

$$R^L_{a\,*}(v\,\partial_{x_{-1}}|_l + \alpha\,\partial_{x_0}|_l) = v\,\partial_{x_{-1}}|_{la} + \alpha a\,\partial_{x_0}|_{la}.$$

Para $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ se tiene que :

$$\alpha^\sharp|_l = x^i_k(l)\alpha^k_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right|_l \in T_lLM.$$

Escribiremos abreviadamente: $\alpha^\sharp|_l = x_0(l)\alpha\,\partial_{x_0}|_l$; o también:

$$\alpha^\sharp = x_0\alpha\,\partial_{x_0}.$$

Para la forma canónica θ^L se tiene ([K-N, p.140]):

$$\theta^i = (x^{-1})^i_j dx^j \in \Lambda^1(LM|_U, \mathbf{R}).$$

Escribiremos abreviadamente: $\theta^L = {x_0}^{-1}dx_{-1}$.

Sea λ una conexión lineal. Sean Γ^i_{jk} los coeficientes de la conexión λ en la carta (x, U); éstos definen una función $\Gamma : U \to L^2(n)$, $m \mapsto \Gamma|_m$ (ver nota N.2). Por definición se tiene ([K-N, p.141]):

$$\sigma^{L^*}_x\lambda = (\Gamma^i_{jk}dx^j)E^k_i \in \Lambda^1(U, \mathfrak{gl}(n)).$$

Escribiremos abreviadamente: $\sigma^{L\,*}_x\lambda = \Gamma(dx)$.

> **Nota 3** Nótese que si $X \in T_mM$, con $m \in U$, $dx(X) \in \mathbf{R}^n$ son las coordenadas de X en la carta (x, U) y, entonces, $\Gamma(dx)(X) = \Gamma|_m(dx(X)) \in \mathfrak{gl}(n)$, acorde con la identificación hecha en la nota N.1.

La conexión λ, restringida a $LM|_U$, tiene la expresión ([K-N, p.142]):

$$\lambda = ((x^{-1})^i_k(\Gamma^k_{pq} \circ \pi^L)x^q_j dx^p + (x^{-1})^i_k dx^k_j)E^j_i \in \Lambda^1(LM|_U, \mathfrak{gl}(n)).$$

Escribiremos abreviadamente:

$$\lambda = {x_0}^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(dx_{-1})x_0 + {x_0}^{-1}dx_0.$$

Nótese, análogamente al caso de la nota N.3, que si $X \in T_lLM$, con $l \in LM|_U$, $\lambda(X) = x_0(l)^{-1}\Gamma|_{\pi^L(l)}(dx_{-1}(X))x_0(l) + x_0(l)^{-1}dx_0(X)$.

La conexión lineal simétrica y plana inducida por la carta (x, U) sobre $LM|_U$ es

$$\lambda_x = {x_0}^{-1} dx_0.$$

Para los campos estándar λ-horizontales se tiene:

$$B^\lambda(v)|_l = x^i_k(l)v^k \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_l - \Gamma^i_{kp}|_{\pi^L(l)} x^k_q(l)v^q x^p_j(l) \left.\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right|_l \in T_l LM.$$

Escribiremos abreviadamente:

$$B^\lambda(v)|_l = x_0(l)v\, \partial_{x_{-1}}|_l - \Gamma|_{\pi^L(l)}(x_0(l)v)x_0(l)\, \partial_{x_0}|_l;$$

o también:

$$B^\lambda(v) = x_0 v\, \partial_{x_{-1}} - (\Gamma \circ \pi^L)(x_0 v)x_0\, \partial_{x_0}.$$

Capítulo II

Los grupos de "jets" invertibles.

En este capítulo estudiamos los grupos $G^r(n)$ de r-jets de difeomorfismos entre abiertos de $\mathbf{R}^n$ que preservan el 0. Estos son los grupos de estructura de los fibrados de referencias de orden r que trataremos en el Cap.III. En la sección 1 comentamos, sin demostraciones, las propiedades más importantes de $G^r(n)$, para r arbitrario.

Nuestro interés se centra especialmente en el orden 2. Hay dos propiedades de los grupos $G^r(n)$, a saber:

$G^r(n)$ tiene el subgrupo abeliano $G^{r,r-1}(n)$ (apartado 1.1), isomorfo a $S^r(n)$ (I.2.3).

$G^r(n)$ es canónicamente isomorfo al producto semidirecto del grupo $GL(n)$ y el subgrupo $G^{r,1}(n)$ de $G^r(n)$ invariante y nilpotente (apartado 1.2),

que en el caso $r = 2$, al ser $G^{r,r-1}(n)$ y $G^{r,1}(n)$ el mismo subgrupo $G^{2,1}(n)$, se conjugan en que $G^2(n)$ es canónicamente isomorfo a $GL(n) \otimes G^{2,1}(n)$, con $G^{2,1}(n)$ abeliano e isomorfo a $S^2(n)$ (Sec.2). Destaquemos que para el estudio de $G^2(n)$ y sus representaciones (Sec.3) hemos usado la carta que mejor refleja la estructura de producto semidirecto de $G^2(n)$ (apartado 2.2) y que tiene notables ventajas sobre la carta usada habitualmente (apartado 2.1).

Hacemos también un estudio explícito del grupo $G^3(n)$ (Sec.4), que necesitaremos para abordar ciertas cuestiones en el Cap.VI. En particular, hemos calculado la representación adjunta de $G^3(n)$ (L.6) y también la representación natural $\mathcal{A}^3$ de $G^3(n)$ en el espacio vectorial suma directa $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)$ (L.7).

1 Para orden arbitrario.

En toda esta sección $r \in \mathbf{N}$, $r > 0$.

1.1 Su construcción.

Sea $\mathcal{D}_{0,0}(\mathbf{R}^n)$ el conjunto de difeomorfismos g entre abiertos de $\mathbf{R}^n$ que contienen al 0 y tales que $g(0) = 0$. Establecemos en $\mathcal{D}_{0,0}(\mathbf{R}^n)$ la relación de equivalencia $\overset{r}{\sim}$ definida por:

$$g \overset{r}{\sim} g' \quad \text{sii} \quad D^s g|_0 = D^s g'|_0\,, \quad \forall s \text{ con } 1 \leq s \leq r.$$

Una clase de equivalencia con representante g se denotará[1] por $j^r(g)$ y se denominará un *r-jet invertible en* 0. Sea $G^r(n) := \mathcal{D}_{0,0}(\mathbf{R}^n)/\overset{r}{\sim}$ el conjunto de r-jets invertibles en 0. $G^r(n)$ forma un *grupo de Lie* ([Ko1]) con:

(i) la ley de producto:

$$j^r(g) \cdot j^r(g') := j^r(g \circ g')$$

(el elemento neutro es $j^r(I)$)

(ii) y con la estructura diferenciable que hace de la biyección

$$\begin{array}{rccc} (u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}): & G^r(n) & \longrightarrow & GL(n) \times S^2(n) \times \cdots \times S^r(n) \\ & j^r(g) & \longmapsto & (Dg|_0, D^2g|_0, \ldots, D^r g|_0) \end{array}$$

una carta global (esta biyección induce en $GL(n) \times S^2(n) \times \cdots \times S^r(n)$ un producto $\star$, que detallaremos en los casos $r = 2$ y $r = 3$).

Para todo $0 < r' < r$, la proyección $\beta^{r,r'} : G^r(n) \longrightarrow G^{r'}(n)$, $j^r(g) \longmapsto j^{r'}(g)$, es un homomorfismo de grupos de Lie. Es fácil ver que el subgrupo invariante $G^{r,r'}(n) \equiv Ker\ \beta^{r,r'}$ de $G^r(n)$ es difeomorfo como variedad a $S^{r'+1}(n) \times \cdots \times S^r(n)$ y nilpotente. En particular, el grupo $G^{r,r-1}(n)$ $(r > 1)$, difeomorfo a la variedad afín $S^r(n)$, es abeliano.

En efecto: basta ver que, bajo la carta $(u_0, \ldots, u_{r-1})$, se tiene la correspondencia

$$\begin{array}{rccc} & G^{r,r'} & \longrightarrow & GL(n) \times S^2(n) \times \cdots \times S^{r'}(n) \times S^{r'+1}(n) \times \cdots \times S^r(n) \\ & j^r(g) & \longmapsto & (I, 0, \ldots, 0, D^{r'+1}g\Big|_0, \ldots, D^r g|_0) \end{array}$$

y comprobar que se verifica: $D^{r'+1}(ghg^{-1}h^{-1})\Big|_0 = 0$ $(\forall\, g, h \in \mathcal{D}_{0,0}(\mathbf{R}^n)$ tales que $j^r(g)$, $j^r(h) \in G^{r,r'}(n))$; esto nos dice que el grupo constituido por los conmutadores de elementos de $G^{r,r'}(n)$ está contenido en

[1] Si tratamos con r-jets cuyo origen m no es el $0 \in \mathbf{R}^n$, indicaremos explícitamente esto escribiendo $j^r_m(g)$.

$G^{r,r'+1}(n)$. Iterando el proceso se llega a que el grupo constituido por los conmutadores de orden $(r-r')$ de elementos de $G^{r,r'}(n)$ consta solamente del elemento identidad de $G^r(n)$.

El grupo de *1-jets invertibles en* 0, $G^1(n)$, es canónicamente isomorfo a $GL(n)$, por el isomorfismo $u_0 : j^1(g) \mapsto Dg|_0$. Nosotros identificaremos ambos grupos.

1.2 Su estructura de producto semidirecto.

Para $r > 1$, se ve fácilmente la existencia de la siguiente secuencia exacta con escisión:

$$1 \longrightarrow G^{r,1}(n) \hookrightarrow G^r(n) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} GL(n) \longrightarrow 1,$$

siendo $\hookrightarrow$ la inclusión ($G^{r,1}(n) := \{j^r(g) \in G^r(n) : Dg|_0 = I\}$), $\beta(j^r(g)) := Dg|_0$ y $\gamma(a) := j^r(a)$. Así, $G^r(n)$ es canónicamente isomorfo al producto semidirecto $GL(n) \otimes G^{r,1}(n)$ asociado a $Q^r \in Hom(GL(n), Aut(G^{r,1}(n)))$ (ver I.1.3), definido por

$$Q^r(a)(j^r(g)) := j^r(a \circ g \circ a^{-1}),$$

y donde el isomorfismo viene dado por la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \chi: & G^r(n) & \longrightarrow & GL(n) \otimes G^{r,1}(n) \\ & j^r(g) & \longmapsto & (\, Dg|_0 \,,\, j^r(\, Dg|_0^{-1} \circ g)). \end{array}$$

También existe una secuencia exacta

$$1 \longrightarrow G^{r,r-1}(n) \hookrightarrow G^r(n) \longrightarrow G^{r-1}(n) \longrightarrow 1,$$

pero ésta no escinde (salvo cuando $r = 2$, en cuyo caso esta secuencia es la anteriormente citada), lo que es lo mismo que decir que $G^{r-1}(n)$ no puede verse como subgrupo de $G^r(n)$ (para $r > 2$).

1.3 Su álgebra de Lie.

El *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}^r(n)$ de $G^r(n)$ se identifica, via $(u_0, \ldots, u_{r-1})_*|_{j^r(I)}$, con la suma directa de espacios vectoriales:

$$\sum_{s=0}^{r-1} S^{s+1}(n)$$

(recordar que $S^1(n) \equiv \mathfrak{gl}(n)$), dotada del corchete definido por (véase [Ko2], [Gui])

$$\begin{cases} [t_p, t'_q] := \frac{(p+q+1)!}{p!(q+1)!}\mathbb{S}(t_p(t'_q(\cdot, \overset{q+1}{\ldots}, \cdot), .\overset{p}{.}, \cdot)) - \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}\mathbb{S}(t'_q(t_p(\cdot, \overset{p+1}{\ldots}, \cdot), .\overset{q}{.}, \cdot)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } p+q \leq r-1, \\ [t_p, t'_q] := 0, \quad \text{si } p+q > r-1, \end{cases}$$

con $t_p \in S^{p+1}(n)$, $t'_q \in S^{q+1}(n)$, $p, q \geq 0$ (resulta $[t_p, t'_q] \in S^{p+q+1}(n)$). Lo veremos en detalle en los casos $r = 2$ y $r = 3$. Obsérvese que $\mathfrak{g}^1(n)$ resulta isomorfa al álgebra $\mathfrak{gl}(n)$.

Nota 4 Sea $\mathfrak{X}^r(\mathbf{R}^n)$ el álgebra de Lie de campos de vectores sobre $\mathbf{R}^n$ con coeficientes polinómicos (sin término independiente) en la carta estándar $u \equiv (u^1, \ldots, u^n)$ de $\mathbf{R}^n$ y con corchete de Lie dado por el *truncamiento* a orden r del habitual corchete de Lie entre campos. Un elemento típico de $\mathfrak{X}^r(\mathbf{R}^n)$ será de la forma

$$\sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{(s+1)!} t_s(u, \overset{s+1}{\ldots}, u)\partial_u$$

(donde $t_s \in S^{s+1}(n)$).

Con el corchete de Lie que se acaba de dar en $\sum_{s=0}^{r-1} S^{s+1}(n) \cong \mathfrak{g}^r(n)$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathfrak{g}^r(n) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^r(\mathbf{R}^n) \\ & (t_1, \ldots, t_{r-1}) & \longmapsto & \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{(s+1)!} t_s(u, \overset{s+1}{\ldots}, u)\partial_u \end{array}$$

es un *antiisomorfismo* de álgebras de Lie (véase [Ko2, p.5], [Ter]).

En efecto:

$$-\left[\sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(p+1)!} t_p(u, \overset{p+1}{\ldots}, u)\partial_u, \sum_{q=0}^{r-1} \frac{1}{(q+1)!} t'_q(u, \overset{q+1}{\ldots}, u)\partial_u\right] =$$

$$= -\sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q\geq 0}}^{r-1} \frac{q+1}{(p+1)!(q+1)!} \mathbb{S}(t'_q(t_p(\cdot, \ldots, \cdot), \ldots, \cdot))(u, \overset{p+q+1}{\ldots}, u)\partial_u +$$

$$+ \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q\geq 0}}^{r-1} \frac{p+1}{(p+1)!(q+1)!} \mathbb{S}(t_p(t'_q(\cdot, \ldots, \cdot), \ldots, \cdot))(u, \overset{p+q+1}{\ldots}, u)\partial_u =$$

$$= \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q\geq 0}}^{r-1} \frac{1}{(p+q+1)!} \left(\frac{(p+q+1)!}{p!(q+1)!} \mathbb{S}(t_p(t'_q(\cdot, \ldots, \cdot), \ldots, \cdot)) - \right.$$

$$\left. - \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!} \mathbb{S}(t'_q(t_p(\cdot, \ldots, \cdot), \ldots, \cdot)) \right) (u, \overset{q+p+1}{\ldots}, u)\partial_u.$$

1.4 La representación natural $\mathcal{A}^r$ de $G^r(n)$.

Dado $v \in \mathbf{R}^n$, sea $\mathcal{D}_{0,v}(\mathbf{R}^n)$ el conjunto de difeomorfismos φ entre abiertos de $\mathbf{R}^n$ que contienen al 0 y a v, respectivamente, y tales que $\varphi(0) = v$.

Análogamente a lo hecho para $\mathcal{D}_{0,0}(\mathbf{R}^n)$, establecemos en $\mathcal{D}_{0,v}(\mathbf{R}^n)$ la relación de equivalencia $\overset{r}{\sim}$ definida por

$$\varphi \overset{r}{\sim} \varphi' \quad \text{sii} \quad D^s\varphi|_0 = D^s\varphi'|_0\,, \quad \forall s \text{ con } 1 \leq s \leq r.$$

Una clase de equivalencia con representante φ se denotará por $j^r(\varphi)$ como en el apartado anterior, aunque ahora la imagen del 0 por φ no es necesariamente el 0. Llamemos $F^r(\mathbf{R}^n) := \bigcup(\mathcal{D}_{0,v}(\mathbf{R}^n)/\underset{\sim}{r})$, donde la unión se toma sobre todos los $v \in \mathbf{R}^n$ (ver III.1.1 para la construcción de $F^r(M)$ con una variedad M arbitraria). $F^r(\mathbf{R}^n)$ tiene una estuctura de *fibrado principal sobre* $\mathbf{R}^n$ ([Ko1]), con:

(i) proyección

$$\begin{array}{rccc} \pi^r: & F^r(\mathbf{R}^n) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & \varphi(0), \end{array}$$

(ii) $G^r(n)$-acción por la derecha

$$R^r_{j^r(g)}j^r(\varphi) \equiv j^r(\varphi)\cdot j^r(g) := j^r(\varphi\circ g),$$

(iii) y con trivializaciones locales las siguientes biyecciones definidas para cada carta $(x,U) \in \mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccc} \Psi^r: & F^r(\mathbf{R}^n) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times G^r(n) \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0),\ j^r(T_{-\varphi(0)}\circ\varphi)). \end{array}$$

Para cálculos en coordenadas en $F^r(\mathbf{R}^n)$ usaremos la carta global

$$(u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}) := (I, u_0, u_1, \ldots, u_{r-1})\circ\Psi^r:$$

$$\begin{array}{ccc} F^r(\mathbf{R}^n) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times GL(n) \times S^2(n) \times \cdots \times S^r(n) \\ j^r(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0), D\varphi|_0, D^2\varphi|_0, \ldots, D^r\varphi|_0), \end{array}$$

o bien otras que se detallarán en cada caso. Se ha prescindido de componer con $T_{-\varphi(0)}$ pues las sucesivas derivaciones $D,\ldots,D^r$ no son afectadas por una traslación.

El *fibrado de referencias de primer orden* $F^1(\mathbf{R}^n)$ es canónicamente isomorfo al fibrado de referencias lineales $L\mathbf{R}^n$, bajo el isomorfismo

$$j^1(\varphi) \mapsto (l \equiv \varphi_*|_0 : \mathbf{R}^n \longrightarrow T_{\varphi(0)}\mathbf{R}^n),$$

correspondiente al isomorfismo canónico de los grupos $G^1(n)$ y $GL(n)$ (ver 1.1). Nosotros identificaremos ambos fibrados y denotaremos indistintamente

un elemento de $L\mathbf{R}^n$ por $j^1(\varphi)$ ó $l \equiv \varphi_*|_0$. En esta identificación se tiene que $\pi^1 = \pi^L$.

El isomorfismo canónico de $G^1(n)$ con $GL(n)$ da una representación natural de $G^1(n)$ en $\mathbf{R}^n$. Para $r > 1$, la anterior contrucción de $F^r(\mathbf{R}^n)$ proporciona una representación natural $\mathcal{A}^r$ de $G^r(n)$ en el espacio vectorial $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)$, obtenida por el siguiente procedimiento (lo detallaremos posteriormente para los casos $r = 2$ y $r = 3$):

(i) Sea $g : U \longrightarrow V$ un difeomorfismo entre entornos de $0 \in \mathbf{R}^n$, con $g(0) = 0$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}_g^{r-1} : & F^{r-1}(\mathbf{R}^n)|_U & \longrightarrow & F^{r-1}(\mathbf{R}^n)|_V \\ & j^{r-1}(\psi) & \longmapsto & j^{r-1}(g \circ \psi \circ g^{-1}). \end{array}$$

Es fácil ver que la aplicación tangente

$$\mathcal{I}_{g*}^{r-1}\Big|_{j^{r-1}(I)} : T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$$

depende de hecho de $j^r(g)$ (nótese que, aunque $\mathcal{I}_g^{r-1}(j^{r-1}(\psi))$ depende, en general, del $(r-1)$-jet de g en $\psi(0) \neq 0$, la aplicación tangente $\mathcal{I}_{g*}^{r-1}\Big|_{j^{r-1}(I)}$ depende del r-jet de g en 0).

(ii) Identificando, via Ψ^{r-1}, $F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ con la variedad producto $\mathbf{R}^n \times G^{r-1}(n)$ y, por tanto, $T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ con $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)$, se obtiene la representación de $G^r(n)$ $(r > 1)$ que se quería:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}^r : & G^r(n) & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)) \\ & j^r(g) & \longmapsto & (\mathcal{I}_{g*}^{r-1}\Big|_{j^{r-1}(I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n) \to \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)). \end{array}$$

Es fácil ver, utilizando las cartas en $F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ a que se ha hecho antes referencia, que la representación $\mathcal{A}^r$ es inyectiva.

Identificando, via $(u_0, \ldots, u_{r-2})_*|_{j^r(I)}$, $\mathfrak{g}^{r-1}(n)$ con $\sum_{s=0}^{r-2} S^{s+1}(n)$, se obtiene la representación (designada de la misma forma) de $G^r(n)$

$$\mathcal{A}^r : G^r(n) \longrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + \cdots + S^{r-1}(n)).$$

Esta representación de $G^r(n)$ induce una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}^r(n)$ $(r > 1)$:

$$\mathfrak{a}^r \equiv \mathcal{A}_*^r|_{j^{r-1}(I)} : \mathfrak{g}^r(n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)).$$

2 El grupo de orden 2.

2.1 Carta usual de $G^2(n)$.

El *grupo de Lie* $G^2(n)$ se describe usualmente ([CDL],[Sal]) con la carta global

$$\begin{array}{rccc}(u_0,u_1): & G^2(n) & \longrightarrow & GL(n)\times S^2(n)\\ & j^2(g) & \longmapsto & (Dg|_0\,,\ D^2g|_0).\end{array}$$

Entonces, el producto de 2-jets en $G^2(n)$ induce en $GL(n)\times S^2(n)$ un producto $\star$ dado por

$$(a\,,\,t)\star(a'\,,\,t')=(aa'\,,\,at'+t(a',a')),$$

resultado de aplicar la regla de la cadena a las derivadas de la composición de funciones. Con este producto esta carta es un isomorfismo de grupos de Lie.

El *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}^2(n)$ de $G^2(n)$ se identifica ([CDL, p.194]), via $(u_0,u_1)_*|_{j^2(I)}$ (véase 1.3), con la suma directa de espacios vectoriales $\mathfrak{gl}(n)+S^2(n)$, dotada del corchete dado en 1.3

$$[(\alpha,t)\,,(\alpha',t')]:=([\alpha,\alpha']\,,\,\alpha t'-t'(\alpha,\cdot)-t'(\cdot,\alpha)-\alpha' t+t(\alpha',\cdot)+t(\cdot,\alpha')).$$

Este corchete surgirá asimismo del cálculo explícito de la representación adjunta del álgebra (L.3.b).

2.2 Carta alternativa de $G^2(n)$.

La secuencia exacta con escisión (ver 1.2)

$$1\longrightarrow G^{2,1}(n)\hookrightarrow G^2(n)\underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}}GL(n)\longrightarrow 1$$

permite establecer (ver I.1.3) un isomorfismo entre $G^2(n)$ y el producto semidirecto $GL(n)\circledS G^{2,1}(n)$ asociado a $Q^2\in Hom(GL(n),Aut(G^{2,1}(n)))$ definido por

$$Q^2(a)(j^2(g)):=j^2(a\circ g\circ a^{-1}),$$

donde el isomorfismo viene dado por la aplicación:

$$\begin{array}{rccc}\chi: & G^2(n) & \longrightarrow & GL(n)\circledS G^{2,1}(n)\\ & j^2(g) & \longmapsto & (Dg|_0\,,\ j^2(Dg|_0^{-1}\circ g)).\end{array}$$

Como $G^{2,1}$ es isomorfo a su vez, via u_1, al grupo abeliano $S^2(n)$ obtenemos el isomorfismo

$$\begin{array}{rccc}(u_0,\bar{u}_1):=(I,u_1)\circ\chi: & G^2(n) & \longrightarrow & GL(n)\circledS S^2(n)\\ & j^2(g) & \longmapsto & (Dg|_0\,,\ Dg|_0^{-1}\,D^2g|_0),\end{array}$$

donde, ahora, el producto semidirecto está asociado al homomorfismo, que denotaremos igualmente por $Q^2 \in Hom(GL(n), Aut(S^2(n)))$, definido por

$$Q^2(a)(t) := at(a^{-1}, a^{-1}),$$

y la ley de producto en $GL(n) \otimes S^2(n)$ viene dada por

$$(a\,,\,t)\cdot(a'\,,\,t') = (aa'\,,\,a'^{-1}t(a',a') + t'),$$

lo que implica $(a,t)^{-1} = (a^{-1}, -at(a^{-1}, a^{-1}))$.

El isomorfismo $(u_0, \bar{u}_1)$ es, a su vez, una *carta global de* $G^2(n)$, *que hace explícita la estructura de producto semidirecto de* $G^2(n)$*; las ventajas que tiene hace que nosotros la usemos preferentemente en este trabajo.* El siguiente lema aclara la relación entre las cartas (u_0, u_1) y $(u_0, \bar{u}_1)$.

Lema 1 *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} (u_0,u_1)\circ(u_0,\bar{u}_1)^{-1}: & GL(n)\otimes S^2(n) & \longrightarrow & (GL(n)\times S^2(n)\,,\,\star) \\ & (a\,,\,t) & \longmapsto & (a\,,\,at) \end{array}$$

es un isomorfismo de grupos de Lie que induce la aplicación identidad entre las álgebras de Lie.

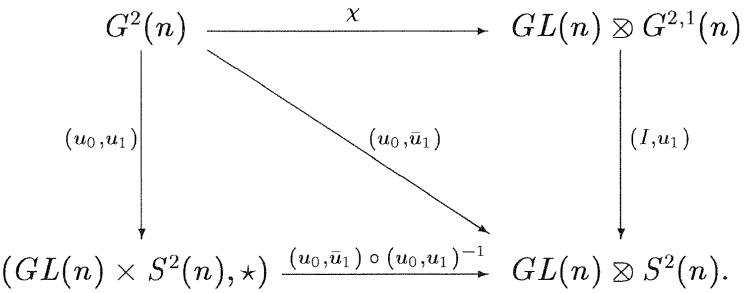
> **Demostración:** La aplicación definida es un isomorfismo trivialmente. Consecuentemente induce un isomorfismo entre las álgebras de Lie de ambos grupos; calculando en coordenadas $((u_0, u_1)\circ(u_0, \bar{u}_1)^{-1})_*|_{(I,0)}$ se ve fácilmente que este isomorfismo es la identidad en $\mathfrak{gl}(n) + S^2(n)$.

Como resultado general para productos semidirectos de grupos de Lie (véase [GHV, II, p.98]) puede probarse que el álgebra de Lie de $GL(n) \otimes S^2(n)$ es la suma semidirecta $\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)$, con el corchete de Lie dado por

$$[(\alpha\,,\,t)\,,(\alpha'\,,\,t')] = ([\alpha,\alpha']\,,\,q^2(\alpha)(t') - q^2(\alpha')(t)),$$

siendo $q^2 \in Hom(\mathfrak{gl}(n), End(S^2(n)))$, definido por $q^2 := Q^2_*|_I$. Un sencillo cálculo muestra que $q^2(\alpha)(t) = \alpha t - t(\alpha, \cdot) - t(\cdot, \alpha)$ (ver la letra pequeña posterior a D.1 en I.2.3), quedando el mismo corchete que el dado en 2.1 para el álgebra de Lie de $G^2(n)$, lo que era de esperar por el lema anterior.

Lo anterior puede resumirse en el siguiente diagrama de isomorfismos entre grupos de Lie:



3 Representaciones del grupo de orden 2.

3.1 Propiedades de los homomorfismos Q^2 y q^2.

Recordemos a continuación las notaciones introducidas en la definición D.1 (ver I.2.3).

(a) Sea $t_a := Q^2(a)(t) = at(a^{-1}, a^{-1})$, $\forall a \in GL(n)$ $\forall t \in S^2(n)$.

(b) Sea $t^\alpha := q^2(\alpha)(t) = \alpha t - t(\alpha, \cdot) - t(\cdot, \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ $\forall t \in S^2(n)$.

El siguiente lema resume las propiedades de estos homomorfismos.

Lema 2 *Sean* $\mu, \nu \in \mathbf{R}$, $v, w, v' \in \mathbf{R}^n$, $a, b \in GL(n)$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{gl}(n)$, $t, s \in S^2(n)$, *entonces se verifica:*

a.

i. $t_a(v, w) = t_a(w, v)$.

ii. $t_a(\mu v + \nu w, v') = \mu t_a(v, v') + \nu t_a(w, v')$.

iii. $(\mu t + \nu s)_a = \mu t_a + \nu s_a$.

iv. $t_{ab} = (t_b)_a$.

v. $t_a(v) = at(a^{-1}v)a^{-1}$.

vi. $(t_a)^i_{jk} = a^i_m t^m_{rs} (a^{-1})^r_j (a^{-1})^s_k$.

b.

i. $t^\alpha(v, w) = t^\alpha(w, v)$.

ii. $t^\alpha(\mu v + \nu w, v') = \mu t^\alpha(v, v') + \nu t^\alpha(w, v')$.

iii. $(\mu t + \nu s)^\alpha = \mu t^\alpha + \nu s^\alpha$.

iv. $t^{(\mu\alpha + \nu\beta)} = \mu t^\alpha + \nu t^\beta$.

v. $t^{[\alpha,\beta]} = (t^\beta)^\alpha - (t^\alpha)^\beta$.

vi. $t^\alpha(v) = [\alpha, t(v)] - t(\alpha v)$.

vii. $t^{t(v)}(w) - t^{t(w)}(v) = 2[t(v), t(w)]$.

viii. $(t^\alpha)^i_{jk} = \alpha^i_m t^m_{jk} - t^i_{mk}\alpha^m_j - t^i_{jm}\alpha^m_k$.

c. $(t^\alpha)_a = (t_a)^{a\alpha a^{-1}}$.

Demostración: Las comprobaciones de las propiedades de los apartados **a** y **b** son todas inmediatas. Las propiedades **i, ii** en **a** y **b** afirman que $Q^2(a)(t)$ y $q^2(\alpha)(t)$ pertenecen a $S^2(n)$. La propiedad **iii** en **a** y **b** afirma que $Q^2(a)$ y $q^2(\alpha)$ son homomorfismos de $S^2(n)$. La propiedad **a.iv** afirma que Q^2 es un homomorfismo de grupos y las propiedades **b.iv** y **b.v** afirman que q^2 es un homomorfismo de álgebras de Lie. Las propiedades **a.v**, **b.vi** y **b.vii** son equivalencias útiles. Por último **a.vi** y **b.viii** son las expresiones en componentes para las bases canónicas de $GL(n)$ y $S^2(n)$. Probemos la parte **c**:

$$\begin{aligned}(t^\alpha)_a(v,w) &= at^\alpha(a^{-1}v, a^{-1}w) = \\ &= a(\alpha t(a^{-1}v, a^{-1}w) - t(\alpha a^{-1}v, a^{-1}w) - t(a^{-1}v, \alpha a^{-1}w)) = \\ &= (a\alpha a^{-1})at(a^{-1}v, a^{-1}w) - at(a^{-1}(a\alpha a^{-1})v, a^{-1}w) - \\ &\qquad - at(a^{-1}v, a^{-1}(a\alpha a^{-1})w) = \\ &= (t_a)^{a\alpha a^{-1}}(v,w).\end{aligned}$$

Nota 5 Las operaciones en $GL(n) \circledS S^2(n)$ con la notación recién introducida se escriben:

(i) $(a,t)\cdot(a',t') = (aa', t_{a'^{-1}} + t')$,

(ii) $(a,t)^{-1} = (a^{-1}, -t_a)$.

3.2 La representación adjunta.

Por lo visto en 2.2, $G^2(n)$ se identifica, via la carta $(u_0, \bar{u}_1)$, con $GL(n) \circledS S^2(n)$; correspondientemente, $\mathfrak{g}^2(n)$ se identifica, via $(u_0, \bar{u}_1)_*|_{j^2(I)}$, con $\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)$. A continuación deducimos la expresión explícita de las representaciones adjuntas de $G^2(n)$ y de $\mathfrak{g}^2(n)$ en la carta $(u_0, \bar{u}_1)$.

Lema 3

a. *La representación adjunta de $G^2(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1)$, es:*

$$\begin{array}{rccl} Ad: & GL(n) \circledS S^2(n) & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)) \\ & (a,t) & \longmapsto & ((\beta,s) \mapsto (a\beta a^{-1}, s_a - (t^\beta)_a)). \end{array}$$

b. *La representación adjunta de $\mathfrak{g}^2(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1)$, es:*

$$\begin{array}{rccl} ad: & \mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n) & \longrightarrow & Der(\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)) \\ & (\alpha,t) & \longmapsto & ((\beta,s) \mapsto ([\alpha,\beta], s^\alpha - t^\beta) \equiv [(\alpha,t),(\beta,s)]). \end{array}$$

Demostración: Los automorfismos internos son

$$\begin{array}{rccl} Int_{(a,t)}: & GL(n) \otimes S^2(n) & \longrightarrow & GL(n) \otimes S^2(n) \\ & (u_0, \bar{u}_1) & \longmapsto & (a,t)(u_0,\bar{u}_1)(a,t)^{-1} = \\ & & & = (au_0a^{-1}\,,\, (t_{u_0^{-1}})_a + \bar{u}_{1\,a} - t_a). \end{array}$$

Teniendo en cuenta que

(i) la primera componente de $Int_{(a,t)}(u_0, \bar{u}_1)$ es el automorfismo interno Int_a de $GL(n)$ y, por tanto, su derivada en $I \in GL(n)$ es la representación adjunta en $GL(n)$,

(ii) la derivada de la aplicación $GL(n) \to S^2(n)$, $u_0 \mapsto t_{u_0^{-1}}$, en I es igual a la aplicación $\mathfrak{gl}(n) \to S^2(n)$, $\beta \mapsto -t^\beta$,

(iii) la derivada de la aplicación $S^2(n) \to S^2(n)$, $\bar{u}_1 \mapsto (\bar{u}_1)_a$, en $0 \in S^2(n)$ es igual a la aplicación $S^2(n) \to S^2(n)$, $s \mapsto s_a$,

(iv) t_a es constante respecto de u_0 y $\bar{u}_1$,

es fácil probar que $Ad_{(a,t)} := Int_{(a,t)*}|_{(I,0)}$ verifica que $Ad_{(a,t)}(\beta, s) = (a\beta a^{-1}, s_a - (t^\beta)_a)$. Podemos escribir simplificadamente

$$Ad^{G^2(n)}: (a,t) \longmapsto \begin{pmatrix} Ad_a^{GL(n)} & 0 \\ -(t^{(\cdot)})_a & (\cdot)_a \end{pmatrix} \in Aut(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n)).$$

Para el apartado **b**, podemos escribir

$$Ad: (u_0, \bar{u}_1) \longmapsto ((\beta, s) \mapsto (u_0\beta u_0{}^{-1}, s_{u_0} - (\bar{u}_1^\beta)_{u_0})).$$

Teniendo en cuenta que

(i) la aplicación $u_0 \longmapsto (\beta \mapsto u_0\beta u_0{}^{-1})$ es la representación adjunta en $GL(n)$,

(ii) la aplicación $u_0 \longmapsto (s \mapsto s_{u_0})$ es el homomorfismo Q^2, y que

(iii) la derivada de la aplicación $GL(n) \otimes S^2(n) \longrightarrow L(\mathfrak{gl}(n), S^2(n))$, $(u_0, \bar{u}_1) \longmapsto (\beta \mapsto (\bar{u}_1^\beta)_{u_0})$ en $(I,0)$ resulta ser $\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n) \longrightarrow L(\mathfrak{gl}(n), S^2(n))$, $(\alpha, t) \longmapsto (\beta \mapsto t^\beta)$,

es fácil probar que $ad_{(\alpha,t)} := Ad_*|_{(I,0)}(\alpha, t)$ es la aplicación $(\beta, s) \mapsto ([\alpha, \beta], s^\alpha - t^\beta)$. Por otra parte, es un resultado general que $ad_{(\alpha,t)}(\beta, s) = [(\alpha, t), (\beta, s)]$. Podemos escribir simplificadamente

$$ad^{\mathfrak{g}^2(n)}: (\alpha,t) \longmapsto \begin{pmatrix} ad_\alpha^{\mathfrak{gl}(n)} & 0 \\ -t^{(\cdot)} & (\cdot)^\alpha \end{pmatrix} \in Der(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n)).$$

Nota 6

a. Se comprueba que la expresión de la representación Ad dada en el Lema coincide con la que se da en [CDL, p.194] usando el cambio de carta del lema L.1.

b. Nótese que el apartado **b** nos sirve como prueba de que el corchete de $\mathfrak{g}^2(n)$ es el dado en 1.3 (recuérdese lo dicho en el lema L.1).

3.3 La representación en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$.

La representación natural $\mathcal{A}^2$ de $G^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ (ver 1.4) da lugar, via $(u_0, \bar{u}_1)$, a una representación de $GL(n) \otimes S^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$, que denotaremos igualmente por $\mathcal{A}^2$. De la misma forma la representación inducida $\mathfrak{a}^2 \equiv \mathcal{A}^2_*\big|_{j^2(I)}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ da lugar, via $(u_0, \bar{u}_1)_*|_{j^2(I)}$, a una representación de $\mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$, que denotaremos igualmente por $\mathfrak{a}^2$. En el siguiente lema se obtienen las expresiones de $\mathcal{A}^2$ y de $\mathfrak{a}^2$.

Lema 4

a. *La representación $\mathcal{A}^2$ de $G^2(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1)$, es:*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^2: & GL(n) \otimes S^2(n) & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \\ & (a,t) & \longmapsto & ((v,\beta) \mapsto (av, a(t(v)) + \beta)a^{-1})). \end{array}$$

b. *La representación $\mathfrak{a}^2$ de $\mathfrak{g}^2(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1)$, es:*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{a}^2: & \mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \\ & (\alpha, s) & \longmapsto & ((v,\beta) \mapsto (\alpha v, s(v) + [\alpha,\beta])). \end{array}$$

Demostración: Para deducir la representación $\mathcal{A}^2$ (ver 1.4) se parte de la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}^1_g: & F^1(\mathbf{R}^n)|_U & \longrightarrow & F^1(\mathbf{R}^n)|_V \\ & j^1(\psi) & \longmapsto & j^1(g \circ \psi \circ g^{-1}), \end{array}$$

construida a partir de un difeomorfismo $g : U \to V$ entre entornos de $0 \in \mathbf{R}^n$, con $g(0) = 0$. Usando la identificación

$$\begin{array}{rccl} (u_{-1}, u_0) := (I, u_0) \circ \Psi^1: & F^1(\mathbf{R}^n) \equiv L\mathbf{R}^n & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & \mathbf{R}^n \times GL(n) \\ & j^1(\psi) & \longmapsto & (\psi(0), D\psi|_0) \end{array}$$

queda

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}^1_g: & U \times GL(n) & \longrightarrow & V \times GL(n) \\ & (u_{-1}, u_0) & \longmapsto & (g(u_{-1}), Dg|_{u_{-1}} u_0 Dg^{-1}|_0). \end{array}$$

Calculando la derivada en $j^1(I) \equiv (0, I)$, y teniendo en cuenta que $Dg^{-1}|_0 = Dg|_0^{-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2_{j^2(g)} := \mathcal{I}^1_{g*}\Big|_{(0,I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) &\longrightarrow \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \\ (v, \beta) &\longmapsto (Dg|_0 v, D^2 g|_0(v)\, Dg|_0^{-1} + \\ &\quad + Dg|_0 \beta\, Dg|_0^{-1}). \end{aligned}$$

Si usamos en $G^2(n)$ la carta $(u_0, \bar{u}_1)$, en la cual $(u_0, \bar{u}_1)(j^2(g)) = (a, t)$ con $a \equiv Dg|_0$, $t \equiv Dg|_0^{-1} D^2 g|_0$, la aplicación $\mathcal{A}^2_{j^2(g)}$ se transforma en $\mathcal{A}^2_{(a,t)}$ dada por

$$\mathcal{A}^2_{(a,t)}(v, \beta) = (av, a(t(v) + \beta)a^{-1}).$$

(Se puede comprobar directamente que $\mathcal{A}^2_{(a,t)\cdot(a',t')} = \mathcal{A}^2_{(a,t)} \circ \mathcal{A}^2_{(a',t')}$.)

Para demostrar **b**, si escribimos $\mathcal{A}^2$ en la forma simplificada:

$$\mathcal{A}^2 : (a, t) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ Ad_a^{GL(n)} t(\cdot) & Ad_a^{GL(n)} \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)),$$

es fácil comprobar que $\mathfrak{a}^2 := \mathcal{A}^2_*|_{(I,0)} \equiv \mathcal{A}^2_*\Big|_{j^2(I)}$ es

$$\mathfrak{a}^2 : (\alpha, s) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ s(\cdot) & ad_\alpha^{\mathfrak{gl}(n)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)),$$

y el resultado se sigue.

Nota 7

a. Si identificamos $\mathfrak{gl}(n) \equiv (0, \mathfrak{gl}(n)) \subset \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$, se obtiene que, $\forall\, (a, t) \in GL(n) \otimes S^2(n)$,

$$\mathcal{A}^2_{(a,t)}\Big|_{\mathfrak{gl}(n)} = Ad_a^{GL(n)}.$$

Como la secuencia exacta $1 \to S^2(n) \hookrightarrow G^2(n) \to GL(n) \to 1$ escinde (esto es, $G^2(n) \cong GL(n) \otimes S^2(n)$), $GL(n)$ puede verse como subgrupo de $G^2(n)$ bajo la inclusión $a \mapsto (a, 0)$, y la representación $\mathcal{A}^2$ restringe a una representación $\overline{\mathcal{A}}^2$ de $GL(n)$

$$\overline{\mathcal{A}}^2 : GL(n) \longrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)), \quad a \longmapsto \mathcal{A}^2_{(a,0)};$$

en vista de lo anterior, se tiene, $\forall\, a \in GL(n)$,

$$\overline{\mathcal{A}}^2_a|_{\mathbf{R}^n} = Ad^{\mathbf{R}^n \otimes G}_{(0,a)}|_{\mathbf{R}^n} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{A}}^2_a|_{\mathfrak{gl}(n)} = Ad_a^{GL(n)}$$

(comparar con lo que ocurre en el grupo de orden 3, N.9).

b. Dado $(a,t) \in GL(n) \otimes S^2(n)$, $\mathcal{A}^2_{(a,t)}$ *no preserva* el corchete de Lie del álgebra afín $\mathbf{R}^n \in \mathfrak{gl}(n)$.

c. Se comprueba que la expresión de la representación $\mathcal{A}^2$ dada en el Lema coincide con la que se da en [CDL, p.194] usando el cambio de carta del lema L.1.

4 El grupo de orden 3.

Siguiendo, más o menos, los pasos dados para el estudio de $G^2(n)$, resumimos brevemente en este apartado las propiedades de $G^3(n)$ que nos van a resultar de más utilidad, sobre todo en el Cap.VI.

El *grupo de Lie* $G^3(n)$ se puede describir con la carta global

$$\begin{array}{rccl}(u_0,u_1,u_2): & G^3(n) & \longrightarrow & GL(n)\times S^2(n)\times S^3(n)\\ & j^3(g) & \longmapsto & (Dg|_0\,,\ D^2g|_0\,,\ D^3g|_0).\end{array}$$

Entonces, el producto de 3-jets en $G^3(n)$ induce en $GL(n)\times S^2(n)\times S^3(n)$ un producto $\star$ dado por

$$(a,t,T)\star(a',t',T') = (aa'\,,\ t(a',a')+at'\,,\ aT'+3\mathbb{S}(t(a'\cdot)t'(\cdot,\cdot))+T(a',a',a')),$$

resultado de aplicar la regla de la cadena a las derivadas de la composición de funciones. Con este producto esta carta es un isomorfismo de grupos de Lie.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}^3(n)$ de $G^3(n)$ se identifica, via $(u_0,u_1,u_2)_*|_{j^3(I)}$ (véase 1.3), con la suma directa de espacios vectoriales $\mathfrak{gl}(n)+S^2(n)+S^3(n)$, dotada del corchete dado en 1.3. No damos ahora la expresión explícita de este corchete que aparecerá de nuevo en el cálculo explícito de la representación adjunta del álgebra (L.6.b).

La secuencia exacta con escisión (ver 1.2)

$$1 \longrightarrow G^{3,1}(n) \hookrightarrow G^3(n) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} GL(n) \longrightarrow 1$$

permite establecer (ver I.1.3) un isomorfismo entre $G^3(n)$ y el producto semidirecto $GL(n)\otimes G^{3,1}(n)$ asociado a $Q^3 \in Hom(GL(n), Aut(G^{3,1}(n)))$ definido por

$$Q^3(a)(j^3(g)) := j^3(a\circ g\circ a^{-1}),$$

donde el isomorfismo viene dado por la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \chi: & G^3(n) & \longrightarrow & GL(n) \circledS G^{3,1}(n) \\ & j^3(g) & \longmapsto & (Dg|_0\ ,\ j^3(Dg|_0^{-1} \circ g)). \end{array}$$

Lema 5 *La aplicación*

$$(u_1, u_2 - \frac{3}{2}\mathbb{S}(u_1(\cdot)u_1(\cdot,\cdot)) : G^{3,1}(n) \longrightarrow (S^2(n) \times S^3(n), \square)$$

es un isomorfismo de $G^{3,1}(n)$ con el grupo (nilpotente) $(S^2(n) \times S^3(n), \square)$, con ley de producto

$$(t, T) \square (t', T') := (t + t', T + \frac{1}{2}[t, t'] + T')$$

(el corchete es el definido en el apartado 1.3).

Demostración: Se comprueba inmediatamente.

Nota 8 Es inmediato verificar que, $\forall\, t, t' \in S^2(n)$,

$$[t, t'] = t'^{t(\cdot)} - t^{t'(\cdot)},$$

entendiendo $t^{t'(\cdot)}(u, v, w) \equiv t^{t'(u)}(v, w)$.

En base al isomorfismo del lema anterior, obtenemos el isomorfismo

$$\begin{array}{l} (u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2) := (I, u_1, u_2 - \frac{3}{2}\mathbb{S}(u_1(\cdot)u_1(\cdot,\cdot))) \circ \chi : \\ G^3(n) \longrightarrow GL(n) \circledS (S^2(n) \times S^3(n), \square) \\ j^3(g) \longmapsto (Dg|_0,\ Dg|_0^{-1} D^2g|_0,\ Dg|_0^{-1} D^3g|_0 - \\ \qquad\qquad -\frac{3}{2}\mathbb{S}(Dg|_0^{-1} D^2g|_0(\cdot) Dg|_0^{-1} D^2g|_0(\cdot,\cdot))), \end{array}$$

donde la ley de producto en $GL(n) \circledS (S^2(n) \times S^3(n), \square)$ viene dada por

$$\begin{array}{rcl} (a, t, T) \cdot (a', t', T') & = & (aa',\ (t_{a'^{-1}}\ ,\ T_{a'^{-1}}) \square (t'\ ,\ T')) \\ & = & (aa',\ t_{a'^{-1}} + t',\ T_{a'^{-1}} + \frac{1}{2}[t_{a'^{-1}}, t'] + T'), \end{array}$$

lo que implica $(a, t, T)^{-1} = (a^{-1}, -t_a, -T_a)$.

Nótese que el término $\frac{1}{2}[t_{a'^{-1}}, t']$ impide que este producto pueda ser un producto semidirecto del tipo $G^2(n) \circledS S^3(n)$. Más aún, $G^2(n)$ no es subgrupo de $G^3(n)$.

Se prueba (análogamente a L.1) que la aplicación $(u_0, u_1, u_2) \circ (u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)^{-1}$ es un isomorfismo entre $(GL(n) \times S^2(n) \times S^3(n), \star)$ y $GL(n) \circledS (S^2(n) \times S^3(n), \square)$ que induce la aplicación identidad entre las álgebras de Lie correspondientes.

Podría pensarse que también es útil el uso de la carta

$$\begin{aligned} G^3(n) &\longrightarrow GL(n) \times S^2(n) \times S^3(n) \\ j^3(g) &\longmapsto (Dg|_0,\ Dg|_0^{-1} D^2 g|_0,\ Dg|_0^{-1} D^3 g|_0), \end{aligned}$$

la cual también hace explícita la estructura de producto semidirecto de $G^3(n)$, pero esta última carta no es la que conviene para la aplicación a G-estructuras como veremos en el Cap.VI.

Por lo que hemos visto arriba, $G^3(n)$ se identifica, via la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, con $GL(n) \boxtimes (S^2(n) \times S^3(n), \square)$ y, correspondientemente, $\mathfrak{g}^3(n)$ se identifica, via $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)_*|_{j^3(I)}$, con $\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n)$. A continuación deducimos la expresión explícita de las representaciones adjuntas de $G^3(n)$ y de $\mathfrak{g}^3(n)$ en la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, obteniéndo de paso la expresión del corchete de Lie de $\mathfrak{g}^3(n)$ que, como se observará, coincide con el dado en 1.3. También deducimos las representaciones naturales $\mathcal{A}^3$ de $G^3(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)$ (ver 1.4) y $\mathfrak{a}^3 \equiv \mathcal{A}^3_*|_{j^3(id)}$ de $\mathfrak{g}^3(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)$.

Lema 6

a. *La representación adjunta de $G^3(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, es:*

$$\begin{aligned} Ad:\ GL(n) \boxtimes (S^2(n) \times S^3(n), \square) &\longrightarrow Aut(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n)) \\ (a, t, T) &\longmapsto ((\beta, s, S) \mapsto \\ &\mapsto (a\beta a^{-1}, s_a - (t^\beta)_a, (S - T^\beta + [t, s] + \tfrac{1}{2}[t^\beta, t])_a)). \end{aligned}$$

b. *La representación adjunta de $\mathfrak{g}^3(n)$ expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, es:*

$$\begin{aligned} ad:\ \mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n) &\longrightarrow Der(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n)) \\ (\alpha, t, T) &\longmapsto ((\beta, s, S) \mapsto \\ &\mapsto ([\alpha, \beta], s^\alpha - t^\beta, S^\alpha - T^\beta + [t, s]) \equiv [(\alpha, t, T), (\beta, s, S)])). \end{aligned}$$

Demostración: Los automorfismos internos son

$$\begin{aligned} Int_{(a,t,T)} : GL(n) \boxtimes (S^2(n) \times S^3(n)) &\to GL(n) \boxtimes (S^2(n) \times S^3(n)) \\ (u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2) &\mapsto (a, t, T)(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)(a, t, T)^{-1} = \\ = (a u_0 a^{-1},\ (t_{u_0^{-1}} + \bar{u}_1 - t)_a,\ &(T_{u_0^{-1}} + \bar{u}_2 + \tfrac{1}{2}([t_{u_0^{-1}}, \bar{u}_1] + [t, \bar{u}_1] + [t, t_{u_0^{-1}}]))_a). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

(i) las dos primeras componentes de $Int_{(a,t,T)}(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$ son el automorfismo interno $Int_(a, t)$ de $GL(n) \boxtimes S^2(n)$ (ver dem. al L.3) y, por tanto, su derivada en $(I, 0) \in GL(n) \boxtimes S^2(n)$ es la representación adjunta en $GL(n) \boxtimes S^2(n)$ (L.3.a),

(ii) la derivada de la aplicación $GL(n) \to S^3(n)$, $u_0 \mapsto (T_{u_0^{-1}})_a$, en $I \in GL(n)$ es igual a la aplicación $\mathfrak{gl}(n) \to S^3(n)$, $\beta \mapsto -(T^\beta)_a$,

(iii) la derivada de la aplicación $S^3(n) \to S^3(n)$, $\bar{u}_2 \mapsto (\bar{u}_2)_a$, en $0 \in S^3(n)$ es igual a la aplicación $S^3(n) \to S^3(n)$, $S \mapsto S_a$,

(iv) la derivada de la aplicación $GL(n) \times S^2(n) \to S^3(n)$, $(u_0, \bar{u}_1) \mapsto ([t_{u_0^{-1}}, \bar{u}_1])_a$, en $(I, 0)$ es igual a la aplicación $\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) \to S^3(n)$, $(\beta, s) \mapsto ([t, s])_a$,

(v) la derivada de la aplicación $S^2(n) \to S^3(n)$, $\bar{u}_1 \mapsto ([t, \bar{u}_1])_a$, en $0 \in S^2(n)$ es igual a la aplicación $S^2(n) \to S^3(n)$, $s \mapsto ([t, s])_a$,

(vi) la derivada de la aplicación $GL(n) \to S^3(n)$, $u_0 \mapsto ([t, t_{u_0^{-1}}])_a$, en $I \in GL(n)$ es igual a la aplicación $\mathfrak{gl}(n) \to S^3(n)$, $\beta \mapsto -([t, t^\beta])_a$,

es fácil probar que $Ad_{(a,t,T)} := Int_{(a,t,T)*}|_{(I,0,0)}$ es la aplicación dada en el apartado **a**. Podemos escribir simplificadamente

$$Ad^{G^3(n)} : (a,t,T) \longmapsto \begin{pmatrix} Ad_a^{GL(n)} & 0 & 0 \\ -(t^{(\cdot)})_a & (\cdot)_a & 0 \\ -(T^{(\cdot)} - \frac{1}{2}[t^{(\cdot)}, t])_a & ([t,\cdot])_a & (\cdot)_a \end{pmatrix} \in$$
$$\in Aut(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n))$$

Para el apartado **b**, podemos escribir

$$Ad : (u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \longmapsto ((\beta, s, S) \mapsto$$
$$\mapsto (u_0 \beta {u_0}^{-1}, s_{u_0} - (\bar{u}_1^\beta)_{u_0}, (-\bar{u}_2^\beta + S + [\bar{u}_1, s] + \tfrac{1}{2}[\bar{u}_1^\beta, \bar{u}_1])_{u_0})).$$

Teniendo en cuenta que

(i) las dos primeras componentes son la representación adjunta en $GL(n) \otimes S^2(n)$,

(ii) las aplicaciones en que se descompone la tercera componente (colocadas abajo en la primera columna) tienen por derivada en el punto $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = (I, 0, 0)$ las siguientes aplicaciones (colocadas abajo en la segunda columna):

$$\begin{aligned} (u_0, \bar{u}_2) &\mapsto (\beta \mapsto (-\bar{u}_2^\beta)_{u_0}) & (\alpha, T) &\mapsto (\beta \mapsto -T^\beta), \\ u_0 &\mapsto (S \mapsto S_{u_0}) & \alpha &\mapsto (S \mapsto S^\alpha), \\ \bar{u}_1 &\mapsto (s \mapsto ([\bar{u}_1, s])_{u_0}) & t &\mapsto (s \mapsto [t, s]), \\ (u_0, \bar{u}_1) &\mapsto (\beta \mapsto \tfrac{1}{2}([\bar{u}_1^\beta, \bar{u}_1])_{u_0}) & (\alpha, t) &\mapsto (s \mapsto 0). \end{aligned}$$

es fácil probar que $ad_{(\alpha,t,T)} := Ad_*|_{(I,0,0)}(\alpha, t, T)$ es la aplicación dada en **b**. Podemos escribir simplificadamente

$$ad^{\mathfrak{g}^3(n)} : (\alpha,t,T) \longmapsto \begin{pmatrix} ad_\alpha^{\mathfrak{gl}(n)} & 0 & 0 \\ -t^{(\cdot)} & (\cdot)^\alpha & 0 \\ -T^{(\cdot)} & [t,\cdot] & (\cdot)^\alpha \end{pmatrix} \in$$
$$\in Der(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n)).$$

Lema 7

a. *La representación $\mathcal{A}^3$ de $G^3(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, es:*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^3: & GL(n) \circledS (S^2(n) \times S^3(n), \square) & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)) \\ & (a,t,T) & \longmapsto & ((v,\beta,s) \mapsto \\ & & & \mapsto (av\,,\, a(t(v)+\beta)a^{-1}\,,\, (T(v) - \tfrac{1}{2}t^{t(v)} - t^{\beta} + s)_a)). \end{array}$$

b. *La representación $\mathfrak{a}^3$ de $\mathfrak{g}^3(n)$, expresada en la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, es:*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{a}^3: & \mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)) \\ & (\alpha,t,T) & \longmapsto & ((v,\beta,s) \mapsto (\alpha v, t(v) + [\alpha,\beta], \\ & & & \qquad T(v) + s^{\alpha} - t^{\beta})). \end{array}$$

Demostración: Seguimos el mismo esquema de la dem. a L.4. Se parte (ver 1.4) de la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}_g^2: & F^2(\mathbf{R}^n)|_U & \longrightarrow & F^2(\mathbf{R}^n)|_V \\ & j^2(\psi) & \longmapsto & j^2(g \circ \psi \circ g^{-1}), \end{array}$$

construida a partir de un difeomorfismo $g : U \to V$ entre entornos de $0 \in \mathbf{R}^n$, con $g(0) = 0$. Usando la identificación

$$\begin{array}{rccl} (u_{-1}, u_0, u_1) := (I, u_0, u_1) \circ \Psi^2: & F^2(\mathbf{R}^n) & \overset{\cong}{\longrightarrow} & \mathbf{R}^n \times GL(n) \times S^2(n) \\ & j^2(\psi) & \longmapsto & (\psi(0), D\psi|_0\,,\, D^2\psi|_0) \end{array}$$

queda

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}_g^2: & U \times GL(n) \times S^2(n) & \longrightarrow & V \times GL(n) \times S^2(n) \\ & (u_{-1}, u_0, u_1) & \longmapsto & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (g(u_{-1})\,,\, Dg|_{u_{-1}} u_0 Dg^{-1}|_0\,,\, D^2g|_{u_{-1}}(u_0 Dg^{-1}|_0, u_0 Dg^{-1}|_0) + \\ + Dg|_{u_{-1}} u_1 (Dg^{-1}|_0, Dg^{-1}|_0) + Dg|_{u_{-1}} u_0\, D^2g^{-1}|_0). \end{aligned}$$

Calculando la derivada en $j^3(I) \equiv (0, I, 0)$, y teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} Dg^{-1}|_0 = Dg|_0^{-1} \\ D^2g^{-1}|_0 = -Dg|_0^{-1} D^2g|_0 (Dg|_0^{-1}, Dg|_0^{-1}), \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^3_{j^3(g)} := \mathcal{I}^2_{g*}\Big|_{(0,I,0)}: & \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n) \\ & (v,\beta,s) & \longmapsto & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (Dg|_0 v\,,\, D^2g|_0(v) Dg|_0^{-1} + Dg|_0 \beta Dg|_0^{-1}\,,\, D^3g|_0(v, Dg|_0^{-1}, Dg|_0^{-1}) + \\ + D^2g|_0(\beta Dg|_0^{-1}, Dg|_0^{-1}) + D^2g|_0(Dg|_0^{-1}, \beta Dg|_0^{-1}) + \\ + Dg|_0 s(Dg|_0^{-1}, Dg|_0^{-1}) - D^2g|_0(v, Dg|_0^{-1} D^2g|_0(Dg|_0^{-1}, Dg|_0^{-1})) - \\ - Dg|_0 \beta Dg|_0^{-1} D^2g|_0(Dg|_0^{-1}, Dg|_0^{-1})). \end{aligned}$$

Usando la carta $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, en la cual $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)(j^3(g)) = (a, t, T)$ con

$$a \equiv Dg|_0, \qquad t \equiv Dg|_0^{-1} D^2 g|_0 \quad \text{y}$$

$$T \equiv Dg|_0^{-1} D^3 g|_0 - \tfrac{3}{2}\mathbb{S}(Dg|_0^{-1} D^2 g|_0(\cdot) Dg|_0^{-1} D^2 g|_0(\cdot,\cdot)),$$

la aplicación $\mathcal{A}^3_{j^3(g)}$ viene dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^3_{(a,t,T)}(v,\beta,s) = (av, a(t(v)+\beta)a^{-1}, aT(v,a^{-1},a^{-1}) + \\ + \frac{1}{2}(at(v,t(a^{-1},a^{-1})) + at(a^{-1},t(v,a^{-1})) + at(a^{-1},t(a^{-1},v))) + \\ + at(\beta a^{-1},a^{-1}) + at(a^{-1},\beta a^{-1}) + as(a^{-1},a^{-1}) - \\ - at(v,t(a^{-1},a^{-1})) - a\beta t(a^{-1},a^{-1}),\end{aligned}$$

y el resultado se obtiene. Para demostrar **b**, si escribimos $\mathcal{A}^3$ en la forma simplificada:

$$\mathcal{A}^3 : (a,t,T) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ Ad_a^{GL(n)} t(\cdot) & Ad_a^{GL(n)} & 0 \\ (T(\cdot) - \frac{1}{2}t^{t(\cdot)})_a & -(t^{(\cdot)})_a & (\cdot)_a \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)),$$

es fácil comprobar que $\mathfrak{a}^3 := \mathcal{A}^3_*|_{(I,0,0)} \equiv \mathcal{A}^3_*\Big|_{j^3(I)}$ es

$$\mathfrak{a}^3 : (\alpha,t,T) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ t(\cdot) & ad_\alpha^{\mathfrak{gl}(n)} & 0 \\ T(\cdot) & -t^{(\cdot)} & (\cdot)^\alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)),$$

y el resultado se sigue.

Nota 9 Si identificamos $\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) \equiv (0, \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)) \subset \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)$ resulta, $\forall\,(a,t,T) \in GL(n) \circledS (S^2(n) \times S^3(n), \square)$,

$$\mathcal{A}^3_{(a,t,T)}|_{\mathfrak{gl}(n)+S^2(n)} = \begin{pmatrix} Ad_a^{GL(n)} & 0 \\ -(t^{(\cdot)})_a & (\cdot)_a \end{pmatrix} = Ad^{GL(n) \circledS S^2(n)}_{(a,t)}.$$

A diferencia de lo que ocurre en el grupo de orden 2 (N.7.a), la secuencia exacta $1 \to S^3(n) \hookrightarrow G^3(n) \to G^2(n) \to 1$ *no escinde*, $G^2(n)$ no puede verse como subgrupo de $G^3(n)$ bajo la inclusión $(a,t) \mapsto (a,t,0)$ (pues ésta no es un homomorfismo) y la representación $\mathcal{A}^3$ *no* restringe a una representación de $GL(n) \circledS S^2(n)$ que fuera de la forma

$$GL(n) \circledS S^2(n) \longrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)), \quad (a,t) \longmapsto \mathcal{A}^3_{(a,t,0)}$$

(ver, sin embargo, en el L.40, Cap.VI, lo que ocurre con subgrupos G de $GL(n)$ con segunda prolongación $\mathfrak{g}_2 = 0$).

Capítulo III

Los fibrados de referencias.

En la sección 1 de este capítulo se dan, sin demostración, una serie de propiedades, más o menos bien conocidas, del fibrado de referencias de orden r, $F^r(M)$ $(r > 0)$, sobre una variedad M de dimensión n, que constituye un fibrado principal con grupo de estructura $G^r(n)$; el objetivo de esta sección es simplemente *enmarcar el contexto* en el que, en la siguiente sección, se llevará a cabo el tratamiento detallado del fibrado $F^2(M)$ de referencias de orden 2. Como bibliografía general para esta sección pueden citarse los trabajos [Kol], [G-S], [Yue] y otros.

A continuación (Sec.2) analizamos el fibrado $F^2(M) \to M$. Lo específico de nuestro estudio estriba en la identificación de $F^2(M)$ con su imagen en $L(LM)$ bajo una inmersión canónica inyectiva; dicha imagen no es otra cosa que la llamada *primera prolongación* $(LM)_1$ de LM. El objetivo de esta identificación (que subyace a la idea de las prolongaciones) es "linealizar" el tratamiento de las derivadas de orden superior. Procedemos así:

Comenzamos definiendo (D.2) el conjunto $(LM)_1 \subset L(LM)$; los elementos de $(LM)_1$ son las referencias lineales sobre LM asociadas de modo natural a los n-subespacios horizontales para las posibles conexiones lineales simétricas sobre M; dichos n-subespacios están, también, en correspondencia (N.10.d) con el conjunto de 1-jets de aquellas secciones (locales) de $LM \to M$ que, tomadas como bases locales de campos de vectores sobre M, tienen todos los corchetes de Lie nulos ("1-jets holónomos").

Se prueba (L.8) que $(LM)_1$ es una G-estructura sobre LM, con $G = S^2(n)$, y una subvariedad regular de $L(LM)$. La correspondiente $S^2(n)$-acción junto con cierta $GL(n)$-acción sobre $(LM)_1$ (naturalmente definida, D.5 y N.13.a) se componen para dar una $GL(n) \otimes S^2(n)$-acción sobre $(LM)_1$ que hace de éste un fibrado principal $(LM)_1(M, GL(n) \otimes S^2(n))$ (L.9).

Existe (L.10) una inmersión inyectiva de $F^2(M)$ en $L(LM)$, cuya imagen

es $(LM)_1$; se prueba (T.1) que dicha inmersión es un isomorfismo de fibrados principales entre $F^2(M)(M, G^2(n))$ y $(LM)_1(M, GL(n) \otimes S^2(n))$, cuyo correspondiente isomorfismo de grupos es el que ha sido estudiado en Cap.II.2.2.

Merece la pena destacar que este isomorfismo permite caracterizar $F^2(M)$ en términos de 2-jets de inversas de cartas normales correspondientes a conexiones lineales simétricas sobre M (L.11). Destaquemos también la introducción, para cada conexión lineal λ, de la función (D.4) $\Upsilon_\lambda : (LM)_1 \to L^2(n)$ que, por así decirlo, parametriza los n-subespacios horizontales para las conexiones lineales simétricas, respecto de los n-subespacios λ-horizontales (cuando la propia λ es simétrica la función Υ_λ toma valores en $S^2(n)$); esta función jugará un papel importante más adelante.

1 Para orden arbitrario.

En toda esta sección $r \in \mathbf{N}$, $r > 0$.

1.1 Su construcción.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $\mathcal{M}$ su atlas maximal y $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ el conjunto de cartas que tienen al 0 en su imagen. Sea $\mathcal{M}_0^{-1}$ el conjunto de inversas de cartas en $\mathcal{M}_0$. Establecemos en $\mathcal{M}_0^{-1}$ la relación de equivalencia $\overset{r}{\sim}$ definida por:

$$\varphi \overset{r}{\sim} \varphi' \text{ sii } \varphi(0) = \varphi'(0) \text{ y } D^s(x \circ \varphi)|_0 = D^s(x \circ \varphi')|_0 \ , \ \forall s \text{ con } 1 \leq s \leq r,$$

siendo x una carta arbitraria en $\mathcal{M}$ con $\varphi(0)$ en su dominio. La definición de $\overset{r}{\sim}$ es independiente de x. Una clase de equivalencia con representante φ se denotará por $j^r(\varphi)$ y es llamada una *referencia de orden r* (o *r-referencia*) *en* $\varphi(0)$. Sea $F^r(M) = \mathcal{M}_0^{-1}/_{\overset{r}{\sim}}$ el conjunto de referencias de orden r. (El caso $M = \mathbf{R}^n$ ya lo hemos tratado en el apartado II.1.4) $F^r(M)$ tiene una estructura de *fibrado principal sobre* M ([Ko1]), con:

(i) proyección

$$\begin{array}{rccc} \pi^r : & F^r(M) & \longrightarrow & M \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & \varphi(0), \end{array}$$

(ii) $G^r(n)$-acción por la derecha

$$R^r_{j^r(g)} j^r(\varphi) \equiv j^r(\varphi) \cdot j^r(g) := j^r(\varphi \circ g),$$

(iii) y trivializaciones locales las siguientes biyecciones definidas para cada carta $(x, U) \in \mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccc} \Psi^r_x : & F^r(M)|_U & \longrightarrow & U \times G^r(n) \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0),\ j^r(T_{-x(\varphi(0))} \circ x \circ \varphi)) \end{array}$$

(recordar que T_v es la traslación en $\mathbf{R}^n$ por $v \in \mathbf{R}^n$).

Dada una carta (x, U) en M, usaremos o bien la carta inducida en $F^r(M)$:

$$(x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}) := (x, u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}) \circ \Psi^r_x :$$

$$\begin{array}{rcl} F^r(M)|_U & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times GL(n) \times S^2(n) \times \cdots \times S^r(n) \\ j^r(\varphi) & \longmapsto & ((x \circ \varphi)(0), D(x \circ \varphi)|_0, D^2(x \circ \varphi)|_0, \ldots, D^r(x \circ \varphi)|_0), \end{array}$$

o bien otras cartas inducidas como detallaremos en los casos $r = 2$ y $r = 3$. Se ha prescindido de componer con $T_{-x(\varphi(0))}$ pues las sucesivas derivaciones $D, \ldots, D^r$ no son afectadas por una traslación.

Para todo $1 < r' < r$, la proyección $\pi^{r,r'} : F^r(M) \longrightarrow F^{r'}(M)$, $j^r(\varphi) \longmapsto j^{r'}(\varphi)$, es un homomorfismo de fibrados principales correspondiente al homomorfismo de grupos $\beta^{r,r'}$ del apartado II.1.1. Además, $F^r(M)$ resulta ser un fibrado principal trivializable sobre $F^{r'}(M)$, con grupo de estructura $G^{r,r'}(n)$.

Se demuestra fácilmente que $\pi^{r,r'} : F^r(M) \longrightarrow F^{r'}(M)$ es un fibrado principal con los siguientes pasos:

(i) $F^r(M) \to F^r(M)/G^{r,r'}(n)$ es fibrado principal ([Die, 16.4.8]).

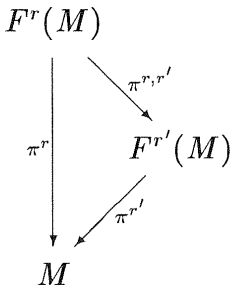
(ii) Se establece la biyección

$$\begin{array}{ccc} F^r(M)/G^{r,r'}(n) & \longleftrightarrow & F^{r'}(M) \\ [j^r(\varphi)] & \longleftrightarrow & j^{r'}(\varphi), \end{array}$$

probándose que es independiente de los representantes $j^r(\varphi)$ en $[j^r(\varphi)]$ y φ en $j^{r'}(\varphi)$ elegidos.

(iii) Utilizando cartas adaptadas se observa que la anterior biyección es un difeomorfismo. El resultado es ya inmediato.

Por ser $G^{r,r'}(n)$ difeomorfo a la variedad afín $S^{r'+1}(n) \times \cdots \times S^r(n)$, el fibrado principal $\pi^{r,r'} : F^r(M) \longrightarrow F^{r'}(M)$ es trivializable ([Die, 16.14.5]).



El *fibrado de referencias de primer orden* $F^1(M)$ es canónicamente isomorfo al fibrado de referencias lineales LM (ver I.4.1), bajo el isomorfismo

$$j^1(\varphi) \mapsto (l \equiv \varphi_*|_0 : \mathbf{R}^n \longrightarrow T_{\varphi(0)}M),$$

correspondiente al isomorfismo canónico de los grupos $G^1(n)$ y $GL(n)$ (ver II.1.1). Nosotros identificaremos ambos fibrados y denotaremos indistintamente un elemento de LM por $j^1(\varphi)$ ó $l \equiv \varphi_*|_0$. En esta identificación se tiene que $\pi^1 \equiv \pi^L$.

> En el caso $r = 1$, y teniendo en cuenta el isomorfismo canónico $F^1(M) \stackrel{\cong}{\to} LM$, la carta (x_{-1}, x_0) de $F^1(M)$ coincide con la inducida por (x, U) en LM (ver I.4.2).

1.2 Como fibrados de referencias lineales.

Para $r > 1$, existe una *inmersión regular canónica*, que denotaremos por ι^r, de $F^r(M)$ en $L(F^{r-1}(M))$, obtenida por el siguiente procedimiento (en la sección 2 lo haremos con todo detalle para el caso $r = 2$):

(i) Sea $\varphi : U \to V$ un difeomorfismo entre un entorno U de $0 \in \mathbf{R}^n$ y un abierto V de M. Definamos

$$\begin{array}{rccc} J^{r-1}\varphi : & F^{r-1}(\mathbf{R}^n)|_U & \longrightarrow & F^{r-1}(M)|_V \\ & j^{r-1}(\psi) & \longmapsto & j^{r-1}(\varphi \circ \psi). \end{array}$$

Es fácil ver que la aplicación tangente

$$(J^{r-1}\varphi)_*\Big|_{j^{r-1}(I)} : T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow T_{j^{r-1}(\varphi)}F^{r-1}(M)$$

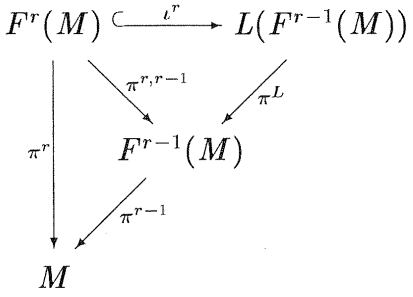
depende de hecho de $j^r(\varphi)$ (nótese que, aunque $J^{r-1}\varphi(j^{r-1}(\psi))$ depende, en general, del $(r-1)$-jet de φ en $\psi(0) \neq 0$, la aplicación tangente $(J^{r-1}\varphi)_*|_{j^{r-1}(I)}$ depende del r-jet de φ en 0).

(ii) Identificando, via Ψ^{r-1}, $F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ con la variedad producto $\mathbf{R}^n \times G^{r-1}(n)$ (ver el apartado II.1.4) y, por tanto, $T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ con $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)$, se obtiene la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \iota^r : & F^r(M) & \longrightarrow & L(F^{r-1}(M)) \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & ((J^{r-1}\varphi)_*|_{j^{r-1}(I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n) \to T_{j^{r-1}(\varphi)}F^{r-1}(M)). \end{array}$$

Es fácil ver, utilizando las cartas locales en $F^{r-1}(M)$ a que se ha hecho antes referencia, que la aplicación ι^r es en efecto una inmersión inyectiva.

(iii) Si consideramos el fibrado principal $\pi^{r,r-1} : F^r(M) \to F^{r-1}(M)$ con grupo de estructura $G^{r,r-1}(n)$ (ver el párrafo anterior) se puede probar que ι^r define a $F^r(M)$ como subfibrado principal de $L(F^{r-1}(M))$ ($\Rightarrow \pi^L \circ \iota^r = \pi^{r,r-1}$) asociado al monomorfismo de grupos $\jmath^r := \mathcal{A}^r|_{G^{r,r-1}(n)} : G^{r,r-1}(n) \to GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n))$. Al ser $\jmath^r(G^{r,r-1}(n))$ un subgrupo cerrado de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n))$, la imagen $\iota^r(F^r(M))$ resulta ser una subvariedad regular de $L(F^{r-1}(M))$.



1.3 La forma canónica.

Consideremos, para $r > 1$, la 1-forma canónica θ^L sobre $L(F^{r-1}(M))$ definida (ver el apartado I.4.1) como la 1-forma $(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n))$-valuada siguiente:

$$\theta^L(X) := l^{-1}(\pi^L{}_*X), \quad \forall\, l \in L(F^{r-1}(M)),\ \forall\, X \in T_l L(F^{r-1}(M)).$$

Pues bien, definimos la 1-*forma canónica* $\theta^r \in \Lambda^1(F^r(M), \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n))$ como

$$\theta^r := \iota^{r\,*}\theta^L.$$

Se puede comprobar que θ^r es de tipo $\mathcal{A}^r$ ([Kol],[Gui]). En IV.1.1 lo comprobaremos explícitamente para el caso $r = 2$.

Si $\phi : F^r(M) \to F^r(M')$ es un difeomorfismo local tal que $\phi = J^r\varphi$, para algún difeomorfismo local $\varphi : M \to M'$, entonces $\phi^*\theta'^r = \theta^r$ (véase [Kol]; también se da el recíproco, véase [G-S]).

2 El fibrado de referencias de segundo orden.

El caso $r = 2$ es el *fibrado de referencias de segundo orden* $F^2(M)$ y es el que vamos a estudiar en este capítulo. Por definición, $F^2(M)$ es el conjunto cociente de $\mathcal{M}_0^{-1}$ sobre la relación de equivalencia $\overset{2}{\sim}$ definida por

$$\varphi \overset{2}{\sim} \varphi' \text{ sii } \varphi(0)=\varphi'(0),\ D(x\circ\varphi)|_0 = D(x\circ\varphi')|_0 \text{ y } D^2(x\circ\varphi)\Big|_0 = D^2(x\circ\varphi')\Big|_0,$$

siendo x una carta en $\mathcal{M}$ con $\varphi(0)$ en su dominio.

Sabemos (ver 1.1) que

$$\begin{array}{rccc} \pi^2: & F^2(M) & \longrightarrow & M \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & \varphi(0) \end{array}$$

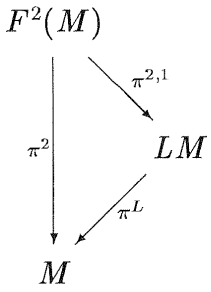
es un fibrado principal con grupo de estructura $G^2(n)$, dándose el isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} (u_0,\bar{u}_1): & G^2(n) & \overset{\cong}{\longrightarrow} & GL(n)\otimes S^2(n) \\ & j^2(g) & \longmapsto & (Dg|_0, Dg|_0^{-1} D^2g|_0); \end{array}$$

y también que

$$\begin{array}{rccc} \pi^{2,1}: & F^2(M) & \longrightarrow & F^1(M)\equiv LM \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & j^1(\varphi) \end{array}$$

es un fibrado principal trivializable cuyo grupo de estructura es el grupo abeliano $G^{2,1}(n) \overset{u_1 \acute{o}\, \bar{u}_1}{\cong} S^2(n)$.



Dada una carta (x,U) en M, se tiene (ver III.1.1) la siguiente trivialización local de $F^2(M)$:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_x^2: & F^2(M)|_U & \longrightarrow & U\times G^2(n) \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0),\ j^2(T_{-x(\varphi(0))}\circ x\circ\varphi)); \end{array}$$

y, consecuentemente, la *carta inducida en* $F^2(M)$:

$$(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1) \equiv (x^i, x^i_j, x^i_{jk}) := (x, u_0, \bar{u}_1) \circ \Psi^2_x \ :$$

$$\begin{array}{ccc} F^2(M)|_U & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times GL(n) \times S^2(n) \\ j^2(\varphi) & \longmapsto & (x(\varphi(0)), D(x \circ \varphi)|_0, D(x \circ \varphi)|_0^{-1} D^2(x \circ \varphi)|_0). \end{array}$$

Es inmediato ver que, en esta carta, la acción R^2 es

$$(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)(j^2(\varphi \circ g)) = (x_{-1}(j^2(\varphi)), x_0(j^2(\varphi))a, a^{-1}\bar{x}_1(j^2(\varphi))(a, a) + t),$$

siendo $a \equiv u_0(j^2(g))$ y $t \equiv \bar{u}_1(j^2(g))$.

> Se podría usar la carta (ver III.1.1) $(x_{-1}, x_0, x_1) := (x, u_0, u_1) \circ \Psi^2_x$, que es lo que se hace habitualmente ([Ko2, p.140],[CDL, p.192],[Sal]); pero esto complica los cálculos al no aprovechar la estructura de producto semidirecto. Para cambiar de coordenadas téngase en cuenta que $x_1 = x_0 \bar{x}_1$ (ver L.1).

Definimos a continuación (apartado 2.1) la *primera prolongación* $(LM)_1$ de LM, que es una subvariedad regular de $L(LM)$, y en el apartado 2.2 veremos con todo detalle la inmersión regular de $F^2(M)$ en $L(LM)$ que fue esbozada en el apartado 1.2 y cómo de esta forma $F^2(M)$ puede identificarse con $(LM)_1$.

2.1 La primera prolongación de LM.

El fibrado principal $L(LM)$ tiene base LM y grupo de estructura $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$. Sus elementos son isomorfismos del tipo $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \to T_l LM$ con $l \in LM$. Consideremos en primer lugar el siguiente subconjunto de $L(LM)$:

Definición 2 *La* primera prolongación[1] $(LM)_1$ de LM *es el conjunto de referencias lineales* $z \in L(LM)$ *que verifican las condiciones siguientes:*

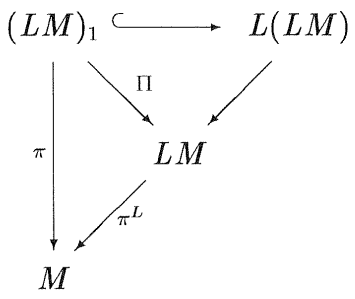
a. $\forall\ \alpha \in \mathfrak{gl}(n),\ z(0, \alpha) = \alpha^\sharp|_l$ *para algún* $l \in LM$.

b. $\forall\ v \in \mathbf{R}^n$ y $\alpha \in \mathfrak{gl}(n),\ \theta^L(z(v, \alpha)) = v$.

c. $d\theta^L|_{(H^z \times H^z)} = 0$, *definiendo* $H^z := z(\mathbf{R}^n, 0)$.

Denotaremos por Π *la proyección* $(LM)_1 \to LM$, *restricción de la proyección* $L(LM) \to LM$. *Denotaremos por* π *la proyección* $(LM)_1 \to M$, $\pi := \pi^L \circ \Pi$ *(recuérdese que* π^L *es la proyección* $LM \to M$*).*

[1] Corresponde a la noción de prolongación de G-estructuras que da Kobayashi en [Ko2, p.22], considerando que LM es la $GL(n)$-estructura sobre M (ver Cap.VI).



Nota 10

a. La condición **a** nos dice que z, aplicado al subespacio $(0, \mathfrak{gl}(n))$, da el subespacio vertical de $T_{\Pi(z)}LM$. Puesto que z es un isomorfismo lineal, la parte $H^z := z(\mathbf{R}^n, 0)$ es transversal a la fibra y será el subespacio horizontal en $\Pi(z)$ para alguna conexión lineal. Ello permite definir el conjunto $\mathcal{C}_z$ de conexiones lineales (ver la siguiente nota (**c**)) que tienen a H^z por subespacio horizontal.

b. La condición **b** nos dice que para cada $\lambda \in \mathcal{C}_z$ se tiene $z(v, 0) = B^\lambda(v)|_l$, siendo $B^\lambda(v)$ el campo estándar λ-horizontal correspondiente a $v \in \mathbf{R}^n$ (ya que $\theta^L(B^\lambda(v)|_l) = v$, $\forall v \in \mathbf{R}^n$). Se obtiene que $z(v, \alpha) = B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l$, independientemente de la $\lambda \in \mathcal{C}_z$ que elijamos. Resulta entonces que $z^{-1} = (\theta^L|_l, \lambda|_l)$, $\forall \lambda \in \mathcal{C}_z$.

Cualquier n-subespacio $H \subset T_lLM$ transversal a la fibra de $L(LM) \to LM$ determina unívocamente un isomorfismo lineal $z : \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \to T_lLM$ que verifica **a** y **b** y tal que $H = H^z$.

c. La condición **c** nos dice que los subespacios horizontales H^z tienen torsión nula ([Ko2, p.21]) por lo que consideraremos, sin perder generalidad, que las conexiones lineales en $\mathcal{C}_z$ son simétricas.

> En efecto, por la primera ecuación de estructura de una conexión lineal λ, la torsión Θ_λ de λ verifica $\Theta_\lambda = \lambda \dot{\wedge} \theta^L + d\theta^L$. Entonces, si $X, Y \in T_lLM$ son λ-horizontales, se tiene que $d\theta^L(X, Y) = \Theta_\lambda(X, Y)$. Por tanto, la condición **c** implica que Θ_λ se anula sobre T_lLM si $\lambda \in \mathcal{C}_z$.

d. Consideremos el conjunto $(LM)_*$ de referencias lineales $z \in L(LM)$ que verifican las condiciones **a** y **b** de la definición

D.2. Es fácil dotar a $(LM)_* \to LM$ de una estructura de fibrado afín, con fibra típica $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n))$, isomorfo al fibrado $J^1(LM) \to LM$ de 1-jets de secciones (locales) del fibrado principal $LM \to M$. Se puede ver que el subconjunto $(LM)_1$ de $(LM)_*$ se corresponde con el subconjunto de $J^1(LM)$ dado por los 1-jets de aquellas secciones locales de $LM \to M$ tales que, interpretadas como bases locales de campos de vectores sobre M, sus corchetes de Lie se anulan. Pero no nos vamos a detener en esta cuestión.

Sobrentenderemos que el grupo aditivo $S^2(n)$ se identifica con el subgrupo de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$ dado por la imagen del monomorfismo $S^2(n) \hookrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$, $t \mapsto \mathcal{A}^2_{(I,t)}$. Obtenemos el siguiente lema:

Lema 8 $\Pi : (LM)_1 \to LM$ *es una reducción de* $L(LM) \to LM$ *con grupo de estructura* $S^2(n) \hookrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$. *Además* $(LM)_1$ *es una subvariedad regular de* $L(LM)$.

Demostración:

(i) $L(LM) \to LM$ es trivializable: Basta tomar cualquier conexión λ en LM, que da una paralelización global de LM ([K-N, Pr.2.6, p.122]) e induce una sección diferenciable global σ_λ de $L(LM) \to LM$. Entonces se tiene un difeomorfismo $\Psi_\lambda : L(LM) \to LM \times GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$, que verifica $\Psi_\lambda(Im\,\sigma_\lambda) = LM \times \{e\}$, con e el elemento identidad de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$. Consecuentemente, $L(LM)$ es reducible a cualquier subgrupo de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$, en particular a $S^2(n)$; y $\Psi_\lambda^{-1}(LM \times S^2(n))$ es una reducción.

(ii) Existe una sección diferenciable de $L(LM) \to LM$ que es sección de $(LM)_1 \to LM$: Basta tomar la sección σ_λ determinada por una conexión λ en LM que sea *simétrica.*

$(LM)_1$ se obtiene como la órbita de $\sigma_\lambda(LM)$ bajo $S^2(n)$: Sea $l \in LM$ y sea $z \in (LM)_1$ con $\Pi(z) = l$ y tal que $\sigma_\lambda(l) = z$. Sea $z' \in (LM)_1$ con $\Pi(z') = l$. Probemos que $\exists t \in S^2(n)$ tal que $z' = z \circ \mathcal{A}^2_{(I,t)}$. Sabemos que $z^{-1} = (\theta^L|_l, \lambda|_l)$, con $\lambda \in \mathcal{C}_z$, y que $z'(v,\alpha) = B^{\lambda'}(v)|_l + \alpha^\sharp|_l$, con $\lambda' \in \mathcal{C}_{z'}$. Se obtiene que $z^{-1}(z'(v,\alpha)) = (v, \lambda(B^{\lambda'}(v)|_l) + \alpha)$. Entonces, la composición $z^{-1} \circ z'$ será igual a $\mathcal{A}^2_{(I,t)}(v,\alpha) = (v, t(v)+\alpha)$, para algún $t \in S^2(n)$, si y sólo si: $\forall v, w \in \mathbf{R}^n$, $\lambda(B^{\lambda'}(v)|_l)w = \lambda(B^{\lambda'}(w)|_l)v$. Ahora bien, cualquier par de conexiones en LM simétricas λ y λ' verifican

$$\lambda(B^{\lambda'}(\cdot)|_l) \in S^2(n) \subset L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n)), \quad \forall l \in LM,$$

ya que la primera ecuación de estructura de la conexión λ, $d\theta^L = -\lambda\hat{\wedge}\theta^L$, aplicada a los vectores $X = B^{\lambda'}(v)|_l$, $Y = B^{\lambda'}(w)|_l$, nos da $d\theta^L(X,Y) = -\lambda(B^{\lambda'}(v)|_l)w + \lambda(B^{\lambda'}(w)|_l)v$, y por la primera ecuación de estructura de la conexión λ', $d\theta^L(X,Y) = 0$.

(iii) De (i), (ii) y de la propiedad de las trivializaciones locales de un fibrado principal se deduce:

$$\begin{aligned}(LM)_1 &= (Im\,\sigma_\lambda)\cdot S^2(n) = {\Psi_\lambda}^{-1}(LM\times\{e\})\cdot S^2(n) = \\ &= {\Psi_\lambda}^{-1}(LM\times S^2(n)),\end{aligned}$$

(siendo λ una conexión simétrica en LM y σ_λ la sección inducida) que, por lo dicho antes, es una reducción de $L(LM) \to LM$ a $S^2(n)$.

(iv) Como $S^2(n)$ es un subgrupo cerrado de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$, entonces $(LM)_1$ es una subvariedad regular de $L(LM)$.

En la siguiente definición recalcamos la acción principal que acabamos de mencionar del grupo $S^2(n)$ en el fibrado $\Pi : (LM)_1 \to LM$.

Definición 3 *La $S^2(n)$-acción sobre $(LM)_1$ es:*

$$\begin{array}{ccc}(LM)_1\times S^2(n) & \longrightarrow & (LM)_1\\ (z,t) & \longmapsto & R_t z \equiv zt := z\circ\mathcal{A}^2_{(I,t)}.\end{array}$$

Nota 11

a. Se verifica que $\Pi\circ R_t = \Pi$.

b. Si $\lambda\in\mathcal{C}_z$ y $\lambda'\in\mathcal{C}_{zt}$ se verifica que:

$$\begin{aligned}zt(v,\alpha) &= B^\lambda(v)|_l + (t(v)+\alpha)^\sharp|_l,\\ B^{\lambda'}(v)|_l &= B^\lambda(v)|_l + (t(v))^\sharp|_l,\\ \lambda'(X) &= \lambda(X) - t(\theta^L(X)),\ \forall X\in T_lLM.\end{aligned}$$

Por el frecuente uso que se va a hacer posteriormente introducimos la siguiente definición:

Definición 4 *Sea λ una conexión lineal sobre M. Definimos la función*

$$\begin{array}{rccl}\Upsilon_\lambda: & (LM)_1 & \longrightarrow & L^2(n)\equiv L(\mathbf{R}^n,\mathfrak{gl}(n))\\ & z & \longmapsto & \Upsilon_\lambda|_z := \lambda(B^{\lambda'}(\cdot)|_{\Pi(z)}) \quad (\forall\lambda'\in\mathcal{C}_z).\end{array}$$

Nota 12

a. En el caso de que λ sea simétrica (recuérdese que $\lambda'\in\mathcal{C}_z$ ya lo es) la función Υ_λ está valuada en $S^2(n)$, como se ha probado en la dem.(ii) a L.8. Por otra parte, si $\lambda\in\mathcal{C}_z$, obviamente $\Upsilon_\lambda|_z = 0$.

b. Se verifica (N.11.b): $\Upsilon_\lambda|_{zt} = \Upsilon_\lambda|_z + t$.

c. Nótese que se verifica

$$\Upsilon_\lambda|_z = -\lambda'(B^\lambda(\cdot)|_{\Pi(z)}) \quad (\forall\, \lambda' \in \mathcal{C}_z).$$

Efectivamente: Sean λ y λ' dos conexiones lineales cualesquiera. Se tiene que, $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$, $\pi^L_*(B^\lambda(v)|_l) = l(v) = \pi^L_*(B^{\lambda'}(v)|_l)$, con lo cual $B^{\lambda'}(v)|_l = B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l$ (para cierto $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$). Se sigue que

$$\lambda(B^{\lambda'}(v)|_l) = \alpha = -\lambda'(B^\lambda(v)|_l).$$

Esta propiedad tendrá importancia en el capítulo siguiente.

d. Por lo dicho en la dem. a L.8, cada conexion lineal simétrica λ induce la trivialización (global) de $(LM)_1 \to LM$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_\lambda : & (LM)_1 & \longrightarrow & LM \times S^2(n) \\ & z & \longmapsto & (\Pi(z),\, \Upsilon_\lambda|_z). \end{array}$$

Conviene destacar que se verifica (ver (b))

$$\Psi_\lambda(zt) = (\Pi(z),\, \Upsilon_\lambda|_z + t).$$

e. Sea (x, U) una carta de M y (x_{-1}, x_0) la carta inducida en LM (ver I.4.2). Sea λ una conexión lineal sobre M, con Γ sus coeficientes en la carta x. Para cada $z \in (LM)_1$ se tiene ($\forall\, \lambda' \in \mathcal{C}_z$, con Γ' sus coeficientes en la carta x, y $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$; ver I.4.2)

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon_\lambda|_z(v) & = & \lambda(B^{\lambda'}(v)|_{\Pi(z)}) = \\ & = & (x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(dx_{-1})x_0 + x_0^{-1}dx_0) \\ & & \qquad (x_0\, v\, \partial_{x_{-1}} - (\Gamma' \circ \pi^L)(x_0\, v)x_0\, \partial_{x_0})|_{\Pi(z)} = \\ & = & (x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(x_0\, v)x_0)|_{\Pi(z)} - \\ & & \qquad -(x_0^{-1}(\Gamma' \circ \pi^L)(x_0\, v)x_0)|_{\Pi(z)} = \\ & = & (x_0^{-1}((\Gamma - \Gamma') \circ \pi^L)(x_0\, v)x_0)|_{\Pi(z)}. \end{array}$$

Entonces, *tanto si* se toma $\lambda = \lambda_x$ (conexión lineal simétrica y plana asociada a la carta x) *como si* se toma $x = x_\lambda$ (carta λ-normal de M centrada en $\pi(z)$ y correspondiente a cualquier referencia lineal sobre $\pi(z)$) se tiene $\Gamma|_{\pi(z)} = 0$ y queda

$$\begin{array}{rcll} \Upsilon_\lambda|_z & = & \lambda(B^{\lambda'}(\cdot)|_{\Pi(z)}) = & \\ & = & -(x_0^{-1}(\Gamma' \circ \pi^L)(x_0, x_0)|_{\Pi(z)}, & \forall\, \lambda' \in \mathcal{C}_z. \end{array}$$

El espacio total $L(LM)$ admite, obviamente, la siguiente $GL(n)$-acción por la derecha: $L(LM) \times GL(n) \to L(LM)$, $(z,a) \mapsto R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,0)}$, que no preserva las fibras de $L(LM) \to LM$ aunque sí las de la proyección $L(LM) \to M$. Es inmediato ver que esta acción preserva $(LM)_1$.

Definición 5 *La $GL(n)$-acción sobre $(LM)_1$ es:*

$$\begin{array}{ccc} (LM)_1 \times GL(n) & \longrightarrow & (LM)_1 \\ (z,a) & \longmapsto & R_a z \equiv za := R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,0)}. \end{array}$$

Nota 13

a. La definición dada de za es, precisamente, aquélla que corresponde a la condición $R^L_{a*}(H^z) = H^{za}$, equivalente a que $\mathcal{C}_{za} = \mathcal{C}_z$.

Efectivamente, $\forall v \in \mathbf{R}^n, za(v,0) = R^L_{a*}(z(av,0))$, lo que prueba la condición. Recíprocamente: si se considera $z' \in (LM)_1$ determinado por $R^L_{a*}(H^z) = H^{z'}$, entonces

(i) $\forall v \in \mathbf{R}^n, \exists w \in \mathbf{R}^n$, tal que $z'(v,0) = R^L_{a*}(z(w,0))$; se sigue de D.2.b que

$$\begin{array}{rcl} v & = & \theta^L(z'(v,0)) = \theta^L(R^L_{a*}(z(w,0))) = \\ & = & a^{-1}\theta^L(z(w,0)) = a^{-1}w; \end{array}$$

con lo cual queda $z'(v,0) = R^L_{a*}(z(av,0))$;

(ii) y por D.2.a se obtiene que

$$z'(0,\alpha) = \alpha^\sharp|_{la} = R^L_{a*}((a\alpha a^{-1})^\sharp|_l) = R^L_{a*}(z(0, a\alpha a^{-1})).$$

Se sigue que

$$z'(v,\alpha) = R^L_{a*}(z(av, a\alpha a^{-1})) = R^L_{a*}(z(\mathcal{A}^2_{(a,0)}(v,\alpha))),$$

lo que implica, por D.5, que $z' = za$.

b. Se verifica que $\Pi \circ R_a = R^L_a \circ \Pi$.

c. Respecto a la función de la definición D.4, se verifica:

$$\Upsilon_\lambda|_{za} = (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}.$$

En efecto: por la nota (**b**), $\Pi(za) = \Pi(z)a$. Por otra parte, $\forall \lambda' \in \mathcal{C}_z$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda(B^{\lambda'}(v)|_{la}) & = & \lambda(R^L_{a*}(B^{\lambda'}(av)|_l)) = a^{-1}\lambda(B^{\lambda'}(av)|_l)a = \\ & = & a^{-1}\,\Upsilon_\lambda|_z(av)a = (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}(v). \end{array}$$

d. Es claro que la acción es diferenciable y libre, ya que la trivialización global Ψ_λ de $(LM)_1 \to LM$, inducida (N.12.d) por una conexión lineal simétrica λ, verifica:

$$\Psi_\lambda(za) = (\Pi(z)a, (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}).$$

e. Conviene señalar que la acción $\widetilde{R^L}$ sobre $L(LM)$, inducida a partir de la acción R^L sobre LM, no preserva el conjunto $(LM)_1$.

Componiendo en el orden adecuado la $GL(n)$-acción y la $S^2(n)$-acción definidas en $(LM)_1$ obtenemos:

Lema 9 *$(LM)_1$ es un fibrado principal sobre M con proyección $\pi := \pi^L \circ \Pi$ y la siguiente $GL(n) \otimes S^2(n)$-acción*

$$\begin{array}{rcl} R : (LM)_1 \times (GL(n) \otimes S^2(n)) & \longrightarrow & (LM)_1 \\ (z,(a,t)) & \longmapsto & R_{(a,t)}z \equiv z(a,t) := (za)t = \\ & & = R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,t)}. \end{array}$$

Demostración: La acción definida lo es por la derecha (se comprueba) y es diferenciable ($R_{(a,t)} = R_t \circ R_a$). Por otra parte, la proyección π es diferenciable pues es la composición de las proyecciones $\pi^L \circ \Pi$. Además posee trivializaciones locales. En efecto: sea $\Psi^L : LM|_U \to U \times GL(n)$ una trivialización local de LM. Sea λ una conexión lineal simétrica y $\Psi_\lambda : (LM)_1 \to LM \times S^2(n)$ la correspondiente trivialización global de $(LM)_1 \to LM$. Entonces

$$\Psi := (\Psi^L, id) \circ \Psi_\lambda : (LM)_1|_U \longrightarrow U \times (GL(n) \otimes S^2(n))$$

es una trivialización local de $(LM)_1 \to M$. Por último, estas trivializaciones locales verifican $\Psi(z(a,t)) = \Psi(z) \cdot (a,t)$, donde la operación $\cdot$ indica la acción por la derecha del grupo $GL(n) \otimes S^2(n)$ sobre el fibrado trivial $U \times (GL(n) \otimes S^2(n))$. En efecto (ver N.12.d y N.13.d):

$$\begin{array}{rcl} \Psi(z(a,t)) & = & (\Psi^L(\Pi(z)a), (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}} + t) = \\ & = & (\Psi^L(\Pi(z))a, (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}} + t) = \\ \text{(N.4(i))} & = & (\Psi^L(\Pi(z)), \Upsilon_\lambda|_z) \cdot (a,t) = \\ & = & \Psi(z) \cdot (a,t). \end{array}$$

Nota 14

a. $\Pi \circ R_{(a,t)} = \Pi \circ R_a = R^L_a \circ \Pi$.

b. $R_{(a,t)} = R_t \circ R_a = R_a \circ R_{t_a}$.

c. $z(a,t)(v,\alpha) = B^\lambda(v)|_{la} + (t(v) + \alpha)^\sharp|_{la}, \ \forall \lambda \in \mathcal{C}_z$.

d. Respecto a la función de la definición D.4, se verifica (por N.12.b y N.13.c):

$$\Upsilon_\lambda|_{z(a,t)} = (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}} + t.$$

2.2 El isomorfismo entre $F^2(M)$ y $(LM)_1$.

Construyamos con todo detalle la correspondencia entre elementos de $F^2(M)$ y referencias lineales sobre LM (recordar el apartado 1.2).

Definición 6 *Sea $\varphi : U \to V$ un difeomorfismo entre un entorno U de $0 \in \mathbf{R}^n$ y un abierto V de M. Definamos*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi} \equiv J^1\varphi : & L\mathbf{R}^n|_U & \longrightarrow & LM|_V \\ & j^1(\psi) & \longmapsto & j^1(\varphi \circ \psi). \end{array}$$

Nota 15

a. $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo de fibrados principales ya que verifica: $\tilde{\varphi}(j^1(\psi) \cdot j^1(g)) = \tilde{\varphi}(j^1(\psi)) \cdot j^1(g)$.

b. De forma natural se puede considerar $\tilde{\varphi}_*|_{j^1(I)}$ como un elemento de $L(LM)$.

Recordemos que, por definición de *referencias lineales* (I.4.1), los elementos de $L(LM)$ son los isomorfismos lineales $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \to T_lLM$, con $l \in LM$. Estos isomorfismos pueden obtenerse como aplicaciones tangentes de difeomorfismos

(i) entre entornos de $(0,0) \in \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ y abiertos de LM (identificando $T_{(0,0)}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \equiv \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$, cosa que hacemos habitualmente cuando se trata de espacios vectoriales, como se advirtió en I.3.1),

(ii) o entre entornos de $(0, I) \in \mathbf{R}^n \times GL(n)$ y abiertos de LM (identificando $T_{(0,I)}(\mathbf{R}^n \times GL(n)) \equiv \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$).

(iii) o entre entornos de $j^1(I) \in L(\mathbf{R}^n) \equiv F^1(\mathbf{R}^n)$ (ver el apartado 1.1) y abiertos de LM (identificando $T_{j^1(I)}F^1(\mathbf{R}^n) \equiv \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$, via el difeomorfismo Ψ^1 definido en II.1.4, y teniendo en cuenta lo dicho en (ii)).

El caso de la nota N.15.b.iii es el que aquí hemos contemplado y nos permite formular el siguiente lema.

Lema 10

a. *El isomorfismo*

$$\tilde{\varphi}_*|_{j^1(I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \longrightarrow T_{j^1(\varphi)}LM$$

depende solamente de $j^2(\varphi)$.

b. *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \iota^2: & F^2(M) & \longrightarrow & L(LM) \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_*|_{j^1(I)} \end{array}$$

es inyectiva.

c. *La imagen de* ι^2 *es* $(LM)_1$.

Demostración: **(a)** Dada una carta (x, U) en M con $\varphi(0) \in U$ y la carta de LM inducida $(x_{-1}, x_0) \equiv (x^i, x^i_j)$ (ver I.4.2), tenemos que $\tilde{\varphi}$ en coordenadas es:

$$\begin{array}{rccc} (x_{-1}, x_0) \circ \tilde{\varphi}|_U: & U \times GL(n) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times GL(n) \\ & (v, a) & \longmapsto & (x(\varphi(v)), D(x \circ \varphi)|_v a). \end{array}$$

Derivando se obtiene que:

$$\begin{array}{rcl} \iota^2(j^2(\varphi))(v,\alpha) & = & \tilde{\varphi}_*|_{j^1(I)}(v,\alpha) = (D(x \circ \varphi)|_0 v)\, \partial_{x_{-1}}|_{j^1(\varphi)} + \\ & & +(D^2(x \circ \varphi)|_0(v) + D(x \circ \varphi)|_0 \alpha)\, \partial_{x_0}|_{j^1(\varphi)}, \end{array}$$

lo que prueba que $\tilde{\varphi}$ depende sólo de $j^2(\varphi)$. Entonces ι^2 está bien definida.

(b) Veamos que es inyectiva. Si $j^2(\varphi) \neq j^2(\varphi')$ y $j^1(\varphi) \neq j^1(\varphi')$ obviamente $\iota^2(j^2(\varphi)) \neq \iota^2(j^2(\varphi'))$ pues son isomorfismos lineales con distinto espacio imagen. Si $j^2(\varphi) \neq j^2(\varphi')$ y $j^1(\varphi) = j^1(\varphi')$ entonces $D^2(x \circ \varphi)|_0 \neq D^2(x \circ \varphi')|_0$, y la expresión de arriba muestra que los isomorfismos correspondientes son distintos.

(c) Sea $z \in (LM)_1$ con $\Pi(z) = l$ y $\lambda \in C_z$. En coordenadas se tiene (ver I.4.2)

$$\begin{array}{rcl} z(v,\alpha) & = & B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l = \\ & = & (x_0 v\, \partial_{x_{-1}} - (\Gamma \circ \pi^L)(x_0 v) x_0\, \partial_{x_0} + x_0 \alpha\, \partial_{x_0})\,|_l, \end{array}$$

con $\Gamma \equiv (\Gamma^i_{jk})$ los coeficientes de λ en la carta x. Por otra parte, la expresión general de un isomorfismo $z: \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \to T_l LM$ es la dada por (aquí es más cómodo hacer explícitos los índices):

$$z(v,\alpha) = (A^i_a v^a + A^{ia}_b \alpha^b_a) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_l + (A^i_{ja} v^a + A^{ia}_{jb} \alpha^b_a) \left.\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right|_l.$$

Entonces $z \in (LM)_1$ si y sólo si se dan las siguientes condiciones:

(i) $(A^i_j) = x_0(l) \in GL(n)$,

(ii) $A^{ij}_k = 0$,

(iii) $(A^{ia}_{jb}\alpha^b_a) = x_0(l)\alpha$ y

(iv) $A^i_{jk} = A^i_{kj}$, ya que los coeficientes Γ^i_{jk} son simétricos en los índices inferiores.

La expresión de $\iota^2(j^2(\varphi))$ dada en la parte **(a)** muestra que efectivamente se verifican las cuatro condiciones, pues $x_0(j^1(\varphi)) = x_*|_0 \circ \varphi_*|_0 = D(x \circ \varphi)|_0$ y $D^2(x \circ \varphi)|_0$ es simétrico. Recíprocamente, si damos un $z \in (LM)_1$ la misma parte **(a)** muestra que basta elegir $j^2(\varphi)$ tal que

$$\begin{aligned} D(x \circ \varphi)|_0 &= x_0(\Pi(z)) \quad \text{y} \\ D^2(x \circ \varphi)|_0 &= -((\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}. \end{aligned}$$

El proceso para recuperar las 2-referencias a partir de elementos de $(LM)_1$ tiene una clara interpretación geométrica. Sea $z \in (LM)_1$, con $\Pi(z) = l \in LM$ y $\pi(z) = m \in M$, y sea $\lambda \in \mathcal{C}_z$. Sea x_λ una *carta λ-normal de M, centrada en m* $(x_\lambda(m) = 0)$ y *correspondiente a* l $(x_{\lambda *}|_m = l^{-1})$ ([K-N, p.147]). Probaremos en el siguiente lema que la referencia de orden 2 en m, $j^2(x_\lambda^{-1})$, se corresponde, via ι^2, con z.

Lema 11 *Sea $z \in (LM)_1$ y para cada $\lambda \in \mathcal{C}_z$ sea x_λ una carta λ-normal de M centrada en $\pi(z)$ correspondiente a la referencia lineal $\Pi(z)$. Entonces se verifica que $\iota^2(j^2(x_\lambda^{-1})) = z$.*

Demostración: A la vista del final de la demostración de L.10.c, sólo hay que probar que (usando como carta auxiliar la propia carta $x = x_\lambda$)

$$\begin{aligned} I(= D(x \circ x_\lambda^{-1})|_0) &= x_0(\Pi(z)) \\ 0(= D^2(x \circ x_\lambda^{-1})|_0) &= -((\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}. \end{aligned}$$

(con Γ los coeficientes de λ en $x = x_\lambda$); lo que es evidente ya que $\Gamma|_{\pi(z)} = 0$).

Nota 16 Se sigue del lema anterior que, dada una conexión λ en LM y una sección local $\sigma \in Sec(LM|_U)$, se tiene la siguiente trivialización local de $F^2(M)$:

$$\begin{array}{rccl} \Psi^2_{\lambda,\sigma}: & F^2(M)|_U & \longrightarrow & U \times G^2(n) \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0), j^2(x_{\lambda,\sigma(\varphi(0))} \circ \varphi)), \end{array}$$

siendo $x_{\lambda,\sigma(m)}$ una carta normal para λ centrada en $m \in U$, correspondiente a la referencia lineal $\sigma(m)$. Estas trivializaciones serán importantes cuando tratemos G-estructuras (Cap.VI).

La siguiente nota compara las trivializaciones inducidas por una carta de M en $(LM)_1$ y en $F^2(M)$, lo cual nos será de utilidad en lo que sigue.

Nota 17 Sea (x, U) una carta de M. Esta da lugar a las siguientes trivializaciones.

a. Una trivialización local de $LM \to M$ (ver I.4.2):

$$\begin{array}{rccl} \Psi^L_x: & LM|_U & \longrightarrow & U \times GL(n) \\ & l & \longmapsto & (\pi^L(l), x_0(l)). \end{array}$$

La correspondiente conexion lineal simétrica y plana λ_x (ver I.4.2) da una trivialización local de $(LM)_1 \to LM$ (ver N.12.d y e):

$$\begin{array}{rccl} \Psi_{\lambda_x}: & (LM)_1|_U & \longrightarrow & LM|_U \times S^2(n) \\ & z & \longmapsto & (\Pi(z), \Upsilon_{\lambda_x}|_z). \end{array}$$

La composición de ambas (como en la dem. de L.9) da una trivialización local de $(LM)_1 \to M$:

$$\begin{array}{rccl} \Psi_x := (\Psi^L_x, id) \circ \Psi_{\lambda_x}: & (LM)_1|_U & \longrightarrow & U \times (GL(n) \otimes S^2(n)) \\ & z & \longmapsto & (\pi(z), x_0(\Pi(z)), \Upsilon_{\lambda_x}|_z). \end{array}$$

b. Una trivialización local de $F^2(M) \to M$ (ver 1.1):

$$\begin{array}{rccl} \Psi^2_x: & F^2(M)|_U & \longrightarrow & U \times G^2(n) \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0), j^2(T_{-x(\varphi(0))} \circ x \circ \varphi)). \end{array}$$

Ésta equivale a la trivialización Ψ_x de (a) según las correspondencias

$$\begin{array}{ccc} F^2(M)|_U & \xrightarrow{\Psi^2_x} & U \times G^2(n) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota^2} & & \downarrow{\scriptstyle (id,(u_0,\bar{u}_1))} \\ (LM)_1|_U & \xrightarrow{\Psi_x} & U \times (GL(n) \otimes S^2(n)) \end{array}$$

Efectivamente, $\forall z \equiv \iota^2(j^2(\varphi)) \in (LM)_1|_U$ ($\Rightarrow \Pi(z) = j^1(\varphi)$ y $\pi(z) = \varphi(0)$) y $\forall \lambda \in \mathcal{C}_z$ con Γ sus coeficientes en la carta x, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \Psi_x(\iota^2(j^2(\varphi))) & = & (\Psi^L_x, id)(\Psi_{\lambda_x}(z)) = \\ & = & (\Psi^L_x, id)(\Pi(z), \Upsilon_{\lambda_x}|_z) = \\ \text{(N.12.e)} & = & (\Psi^L_x(\Pi(z)), \\ & & -(x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}) = \\ & = & (\varphi(0), x_0(\Pi(z)), \\ & & -(x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}); \end{array}$$

y, por otra parte, se tiene:

$$\begin{aligned}(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)(j^2(\varphi)) &\equiv (id, (u_0, \bar{u}_1))(\Psi_x^2(j^2(\varphi))) = \\ &= (id, (u_0, \bar{u}_1))(\varphi(0)\,,\, j^2(T_{-x(\varphi(0))} \circ x \circ \varphi)) = \\ \text{(II.2.2)} \quad &= (\varphi(0), D(x \circ \varphi)|_0, D(x \circ \varphi)|_0^{-1} D^2(x \circ \varphi)|_0) = \\ \text{(Dem.L.10.c)} \quad &= (\varphi(0), x_0(\Pi(z)), -(x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}).\end{aligned}$$

Teorema 1 *La aplicación $\iota^2 : F^2(M) \longrightarrow (LM)_1$, es un isomorfismo de fibrados principales sobre M correspondiente al isomorfismo de grupos dado por la biyección $(u_0, \bar{u}_1) : G^2(n) \to GL(n) \otimes S^2(n)$.*

Demostración: Resulta evidente que ι^2 respeta las fibras e induce la identidad en la base pues $\pi^2(j^2(\varphi)) = \varphi(0)$ y también $\pi(\iota^2(j^2(\varphi))) = \pi^L(\Pi(\iota^2(j^2(\varphi)))) = \pi^L(j^1(\varphi)) = \varphi(0)$. A la vista de las correspondencias entre las trivializaciones locales de $F^2(M)$ y de $(LM)_1$ (ver N.17.c), sólo queda por probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F^2(M) \times G^2(n) & \xrightarrow{R^2} & F^2(M) \\ \downarrow{\scriptstyle (\iota^2, (u_0, \bar{u}_1))} & & \downarrow{\scriptstyle \iota^2} \\ (LM)_1 \times (GL(n) \otimes S^2(n)) & \xrightarrow{R} & (LM)_1. \end{array}$$

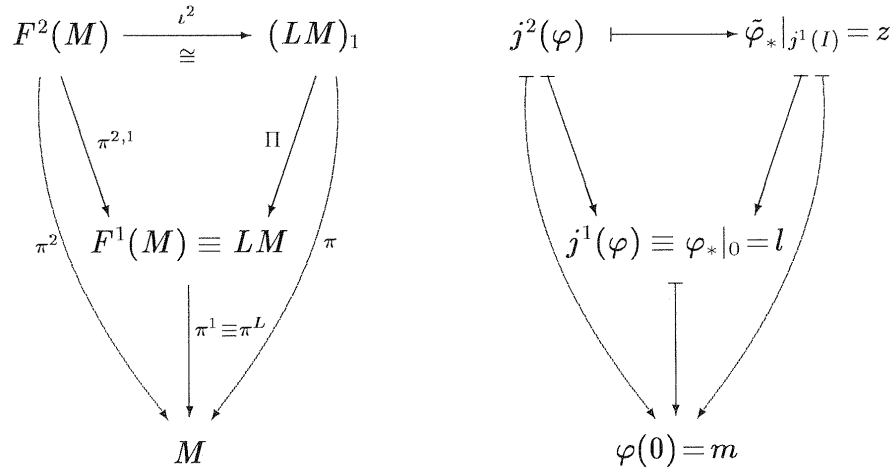
Y en efecto, sea $j^2(g) \in G^2(n)$, y sea $(u_0, \bar{u}_1)(j^2(g)) = (a, t)$, con $a = Dg|_0$ y $t = Dg|_0^{-1} D^2 g|_0$; entonces se tiene (trabajando en la trivialización Ψ_x)

$$\begin{aligned}\Psi_x(\iota^2(R^2_{j^2(g)} j^2(\varphi))) &= \Psi_x(\iota^2(j^2(\varphi \circ g))) = \\ &= ((\varphi \circ g)(0)\,,\, D(x \circ \varphi \circ g)|_0\,,\, D(x \circ \varphi \circ g)|_0^{-1} \\ &\qquad D^2(x \circ \varphi \circ g)|_0) = \\ &= (\varphi(0)\,,\, D(x \circ \varphi)|_0 a\,,\, a^{-1} D(x \circ \varphi)|_0^{-1} \\ &\qquad (D^2(x \circ \varphi)|_0(a, a) + D(x \circ \varphi)|_0 D^2 g|_0)) = \\ &= (\varphi(0)\,,\, D(x \circ \varphi)|_0 a\,,\, (D(x \circ \varphi)|_0^{-1} \\ &\qquad D^2(x \circ \varphi)|_0)_{a^{-1}} + t) = \\ \text{(N.5(i))} \quad &= (\varphi(0)\,,\, D(x \circ \varphi)|_0\,,\, D(x \circ \varphi)|_0^{-1} D^2(x \circ \varphi)|_0) \cdot \\ &\qquad \cdot (a, t) = \\ \text{(N.16.c)} \quad &= \Psi_x(\iota^2(j^2(\varphi))) \cdot (a, t) = \\ &= \Psi_x(R_{(a,t)} \iota^2(j^2(\varphi))).\end{aligned}$$

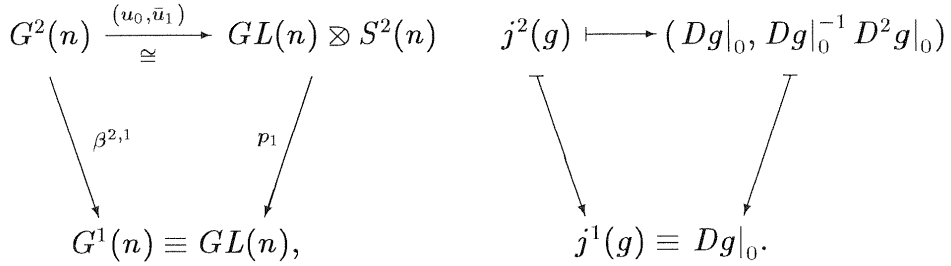
Corolario 1 *Se verifica que $\iota^2 : F^2(M) \to L(LM)$ es una inmersión regular.*

Demostración: Se sigue del teorema T.1 y del lema L.8.

Nota 18 La situación obtenida se resume en el siguiente diagrama:



En lo que sigue usaremos, cuando convenga, las identificaciones que proporciona el anterior diagrama, y también la identificación de grupos, obtenida en el capítulo II, que resumimos en el siguiente diagrama:



Nota 19 Los isomorfismos lineales $z \in (LM)_1$ en las coordenadas de $F^2(M)$. Sea (x, U) una carta de M y $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ la carta inducida de $F^2(M)$ (ver al comienzo de la sección 2). Identifiquemos $F^2(M)$ con $(LM)_1$ (T.1).

a. Sea $z \in F^2(M)$, con $\Pi(z) = l$. Se verifica que $x_{-1}(z) = x_{-1}(l)$ y $x_0(z) = x_0(l)$. Si $\lambda \in \mathcal{C}_z$ y $\Gamma \equiv (\Gamma^i_{jk})$ son sus componentes en la carta (x, U), sabemos que se tiene

$$\begin{aligned} z(v, \alpha) &= B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l = \\ (\text{I.4.2}) &= (x_0 v\, \partial_{x_{-1}} - (\Gamma \circ \pi^L)(x_0 v) x_0\, \partial_{x_0} + x_0 \alpha\, \partial_{x_0})|_l. \end{aligned}$$

Por otra parte, se deduce de la dem. a L.10.c que

$$\bar{x}_1(z) = -x_0(z)^{-1} \Gamma|_{\pi(z)}(x_0(z), x_0(z)) = -(\Gamma|_{\pi(z)})_{x_0(z)^{-1}} = \Upsilon_{\lambda_x}|_z$$

(la última igualdad se sigue de la nota N.12.e). Por tanto se tiene que, *como isomorfismo lineal*, z se escribe en coordenadas

$$\begin{array}{rccl} z: & \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & T_l LM \\ & (v,\alpha) & \longmapsto & (x_0(z)v)\partial_{x_{-1}}|_l + \\ & & & +(x_0(z)\bar{x}_1(z)(v) + x_0(z)\alpha)\partial_{x_0}|_l. \end{array}$$

Nótese que $\{\partial_{x_{-1}}|_l, \partial_{x_0}|_l\}$ es la base coordenada de $T_l LM$ para la carta inducida en LM. También se obtiene en coordenadas que

$$B^\lambda(v)|_l = (x_0(z)v)\partial_{x_{-1}}|_l - (x_0(z)\bar{x}_1(z)(v))\partial_{x_0}|_l.$$

b. Definamos la sección σ_x^2 de $F^2(M)$ sobre U inducida por la carta x:

$$\begin{array}{rccl} \sigma_x^2: & U & \longrightarrow & F^2(M) \\ & m & \longmapsto & j^2(x^{-1} \circ T_{x(m)}), \end{array}$$

cuyas coordenadas son $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1) \circ \sigma_x^2 = (x, I, 0)$. Se verifica que $\Pi \circ \sigma_x^2 = \sigma_x^L$ (ver I.4.2). Se sigue de (a) que, *como isomorfismo lineal*, $\sigma_x^2(m)$ se escribe en coordenadas

$$\begin{array}{rccl} \sigma_x^2(m): & \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & T_{\sigma_x^L(m)} LM \\ & (v,\alpha) & \longmapsto & v\,\partial_{x_{-1}}|_{\sigma_x^L(m)} + \alpha\,\partial_{x_0}|_{\sigma_x^L(m)}. \end{array}$$

Nótese que, para cualquier conexión λ en LM, con Γ sus coeficientes en la carta x, se tiene que

$$\Upsilon_\lambda \circ \sigma_x^2 = \Gamma.$$

En efecto: Para cualquier $\lambda' \in \mathcal{C}_{\sigma_x^2(m)}$, con $m \in U$, la función de coeficientes Γ' de λ' en la propia carta x es igual a 0 en m, como se deduce de

$$B^{\lambda'}(v)|_{\sigma_x^L(m)} = \text{(N.10.b)}\ \sigma_x^2(m)(v,0) = v\,\partial_{x_{-1}}|_{\sigma_x^L(m)}$$

y de la expresión de $B^{\lambda'}(v)$ dada en I.4.2. Entonces, por la nota N.12.e,

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon_\lambda|_{\sigma_x^2(m)}(v) & = & (x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(x_0\,v)x_0)|_{\sigma_x^L(m)} = \\ & = & \Gamma|_m(v). \end{array}$$

Nótese asimismo que la conexión lineal (localmente definida) λ_x simétrica y plana asociada a la carta x (con coeficientes en la carta x: $\Gamma|_m = 0,\ \forall\, m \in U$) verifica $\lambda_x \in \mathcal{C}_{\sigma_x^2(m)},\ \forall\, m \in U$.

Capítulo IV

Conexiones de segundo orden

En este capítulo se analizan las conexiones en el fibrado de referencias de segundo orden $F^2(M)$ (*conexiones de segundo orden*) sobre una variedad M.

En las dos primeras secciones se tratan conceptos estándar: la forma canónica θ en $F^2(M)$, que es (bajo la identificación $F^2(M) \cong (LM)_1$, Cap.III) la definida en $(LM)_1$ como subfibrado de un fibrado de referencias lineales, y que, por tanto, es $(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$-valuada (1.1); los campos fundamentales en $F^2(M)$ (1.2); las definiciones de conexión de segundo orden ω y de la conexión lineal inducida λ_ω (2.1); y, finalmente, la noción de campos estándar horizontales para ω. El tratamiento de estas dos secciones difiere del habitual (véase [Ko2], [Sal] y [CDL]) en el uso sistemático de las identificaciones de $G^2(n)$ con $GL(n) \otimes S^2(n)$ y de $F^2(M)$ con $(LM)_1$ que han sido estudiadas en los capítulos anteriores (lo que, entre otras cosas, conduce a expresiones coordenadas diferentes de las habituales, N.20, 22, 24 y 25).

En la sección 3, una vez definida la "torsión" Θ_ω de una una conexión de segundo orden ω como la diferencial exterior covariante respecto de ω de la forma canónica θ, se obtienen las ecuaciones de estructura de ω (T.2):

La primera, relativa a Θ_ω, se debe a Yuen ([Yue]), quien la obtiene para conexiones en el fibrado (más amplio) de las llamadas referencias "semiholónomas"; aquí damos una demostración algo diferente.

La segunda, relativa a la curvatura Ω_ω de ω, es la bien conocida ecuación de estructura de una conexión en cualquier fibrado principal.

Diferenciando covariantemente las ecuaciones anteriores obtenemos las consiguientes ecuaciones del tipo de las identidades de Bianchi (C.2). Los resultados de estas tres primeras secciones, junto con los de la sección II.2, han sido publicados en [A-S].

Por último (sección 4), y en base a un resultado de Kobayashi (L.17) que establece la correspondencia biyectiva entre conexiones lineales simétricas sobre M y secciones globales equivariantes de la proyección $F^2(M) \to LM$, se introduce (D.15) la noción de conexión de segundo orden ω_λ inducida por una conexión lineal simétrica λ, se estudian sus propiedades (L.18) y se dan las expresiones (T.3) de su torsión y curvatura en función de la torsión y curvatura de la conexión lineal λ y de la función Υ_λ asociada; nótese que, en este caso, la parte $\mathfrak{gl}(n)$-valuada de la torsión de ω_λ es igual a la imagen inversa por la proyección $F^2(M) \to LM$ de la curvatura de λ.

1 Forma canónica y campos fundamentales.

1.1 Forma canónica sobre $F^2(M)$.

El teorema T.1 del capítulo anterior nos permite *identificar* $F^2(M)$ con $(LM)_1$. Admitida esta identificación es inmediato ver que la *1-forma canónica* θ^2 sobre $F^2(M)$ (ver el apartado III.1.3) coincide con la *restricción* de la 1-forma canónica sobre $L(LM)$ al subfibrado $(LM)_1$. La denotaremos simplemente por θ y la podemos redefinir del siguiente modo:

Definición 7 *La 1-forma canónica sobre* $F^2(M)$, $\theta \equiv (\theta_{-1}, \theta_0) \in \Lambda^1(F^2(M), \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$ *se define por*

$$\theta(X) := z^{-1}(\Pi_* X), \quad \forall\, z \in F^2(M),\ \forall\, X \in T_z F^2(M).$$

θ_{-1} *y* θ_0 *son las componentes* $\mathbf{R}^n$*- y* $GL(n)$*-valuadas de* θ.

Lema 12 *Se verifica que:*

a. θ *es pseudotensorial de tipo* $\mathcal{A}^2$, *es decir:* $R^*_{(a,t)}\theta = \mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}\theta$.

b. $\theta_{-1} = \Pi^*\theta^L$ *y* $\theta_0|_z = (\Pi^*\lambda)|_z$, $\forall \lambda \in \mathcal{C}_z$.

c. $d\theta_{-1} = -\theta_0 \dot{\wedge} \theta_{-1}$.

Demostración: ([Ogi, §3], [Ko2, IV, Prop. 5.1 y 5.2], [CDL, 10.2])

(a) Sea $X \in T_z F^2(M)$. Entonces $R_{(a,t)*}X \in T_{z(a,t)}F^2(M)$ y, por la N.13.a, $\Pi_* R_{(a,t)*}X = (\Pi \circ R_{(a,t)})_* X = (R^L_a \circ \Pi)_* X$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \theta(R_{(a,t)*}X) &= (z(a,t))^{-1}((R^L_a \circ \Pi)_* X) = \\ (L.9) &= (R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,t)})^{-1}((R^L_a \circ \Pi)_* X) = \\ &= (\mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}} \circ z^{-1})(\Pi_* X) = \\ &= \mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}\theta(X). \end{aligned}$$

(b) Es inmediato pues (ver N.10.b) $z^{-1} = (\theta^L|_{\Pi(z)}, \lambda|_{\Pi(z)})$, para $\lambda \in \mathcal{C}_z$; así $\theta(X) = z^{-1}(\Pi_* X) = (\theta^L(\Pi_* X), \lambda(\Pi_* X))$.

(c) Tomemos una conexión lineal simétrica $\lambda \in \mathcal{C}_z$, entonces su primera ecuación de estructura nos dice que $d\theta^L = -\lambda \dot{\wedge} \theta^L$, y se obtiene:

$$\begin{aligned} d\theta_{-1}|_z &= (\text{por b})\, d\theta^L \circ (\Pi_*, \Pi_*)|_z = -(\lambda \dot{\wedge} \theta^L) \circ (\Pi_*, \Pi_*)|_z = \\ &= -(\Pi^* \lambda \,\dot{\wedge}\, \Pi^* \theta^L)|_z = (\text{por } \mathbf{b})\ -(\theta_0 \dot{\wedge} \theta_{-1})|_z. \end{aligned}$$

Nota 20 Coordenadas de θ. Sea (x, U) una carta en M y $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ la carta inducida en $F^2(M)$ (ver al comienzo de la sección III.2). La forma canónica sobre $F^2(M)$, $\theta \equiv (\theta_{-1}, \theta_0) \equiv (\theta^i e_i, \theta^i_j E^j_i)$, tiene en coordenadas las siguientes expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned} \theta_{-1}|_z &= x_0(z)^{-1} dx_{-1}|_z \\ \theta_0|_z &= x_0(z)^{-1} dx_0|_z - \bar{x}_1(z)(x_0(z)^{-1} dx_{-1}|_z), \\ &\qquad\qquad \forall\, z \in F^2(M)|_U; \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} \theta_{-1} &= x_0^{-1} dx_{-1} \\ \theta_0 &= x_0^{-1} dx_0 - \bar{x}_1(x_0^{-1} dx_{-1}), \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} \theta^i &= (x^{-1})^i_a dx^a \\ \theta^i_j &= (x^{-1})^i_a dx^a_j - x^i_{aj}(x^{-1})^a_b dx^b). \end{aligned}$$

En efecto: sea $X \in T_z F^2(M)$, con $z \in F^2(M)|_U$ y $l = \Pi(z)$; en coordenadas es

$$X = v\, \partial_{x_{-1}}|_z + \alpha\, \partial_{x_0}|_z + s\, \partial_{\bar{x}_1}|_z,$$

siendo $v \equiv (v^i) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \equiv (\alpha^i_j) \in \mathfrak{gl}(n)$, $s \equiv (s^i_{jk}) \in S^2(n)$. Por definición $\theta(X) := z^{-1}(\Pi_* X)$; como $\Pi_* X = v\, \partial_{x_{-1}}|_l + \alpha\, \partial_{x_0}|_l$ (en coordenadas de LM), se tiene que

$$\begin{aligned} \theta(X) &= z^{-1}(v\, \partial_{x_{-1}}|_l + \alpha\, \partial_{x_0}|_l) = \\ (\text{N.19.a}) &= (x_0(z)^{-1} v, x_0(z)^{-1} \alpha - \bar{x}_1(z)(x_0(z)^{-1} v)), \end{aligned}$$

y las expresiones se siguen.

Se comprueba que la expresión de θ dada aquí en coordenadas $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ se corresponde con la dada en [Ko2, p.141] o [CDL, p.195] en coordenadas (x_{-1}, x_0, x_1) (recordar lo dicho al comienzo de la sección III.2).

1.2 Campos fundamentales de $F^2(M)$.

Los *campos fundamentales* de $F^2(M)$ verifican las siguientes propiedades.

Lema 13 *Sea* $(\alpha,s)^\sharp$ *y* $\alpha^\sharp$ *los campos fundamentales de* $F^2(M)$ *y* LM, *respectivamente, correspondientes a* $(\alpha,s)\in \mathfrak{gl}(n)\oplus S^2(n)$ *y* $\alpha\in\mathfrak{gl}(n)$. *Se verifica:*

a. $(\alpha,s)^\sharp|_{z(a,t)} = R_{(a,t)*}(Ad_{(a,t)}(\alpha,s))^\sharp|_z = R_{(a,t)*}(a\alpha a^{-1}, s_a - (t^\alpha)_a)^\sharp|_z$.

b. $[(\alpha,s)^\sharp,(\beta,t)^\sharp] = [(\alpha,s),(\beta,t)]^\sharp$.

c. $\Pi_*((\alpha,s)^\sharp|_z) = \alpha^\sharp|_{\Pi(z)}$.

d. $\theta((\alpha,s)^\sharp|_z) = (0,\alpha)$.

Demostración: La partes **a** y **b** se siguen de propiedades generales de los campos fundamentales de un fibrado principal.

La parte **c** se sigue de que Π es un homomorfismo de fibrados principales. En efecto: el homomorfismo de grupos correspondiente a Π es

$$\begin{array}{rccc} p_1: & GL(n)\otimes S^2(n) & \longrightarrow & GL(n) \\ & (a,t) & \longmapsto & a\,, \end{array}$$

que induce el homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccc} p_{1*}|_{(I,0)}: & \mathfrak{gl}(n)\oplus S^2(n) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(n) \\ & (\alpha,t) & \longmapsto & \alpha\,. \end{array}$$

Si Exp y exp son las aplicaciones exponenciales de $GL(n)\otimes S^2(n)$ y de $GL(n)$, respectivamente, se verifica que $p_1\circ Exp = exp\circ p_{1*}|_{(I,0)}$ (véase por ejemplo [GHV, p.35]). Es decir, que la $GL(n)$-componente de $Exp(\alpha,s)$ es igual a $exp\,\alpha$. Entonces (por N.14.a) se tiene que $\Pi(z\,Exp(\alpha,s)) = \Pi(z)\,exp\,\alpha$. Ahora, siendo $f\in\mathcal{F}(LM)$, se sigue que

$$\begin{array}{rcl} \Pi_*(\alpha,s)^\sharp|_z(f) & = & (\alpha,s)^\sharp|_z(f\circ\Pi) := \frac{d}{d\epsilon}\big|_0 (f\circ\Pi)(z\,Exp\,\epsilon(\alpha,s)) \\ & = & \frac{d}{d\epsilon}\big|_0 f(l\,exp\,\epsilon\alpha) =: \alpha^\sharp|_{\Pi(z)}(f). \end{array}$$

Probemos la parte **d**:

$$\begin{array}{rcl} \theta((\alpha,s)^\sharp|_z) & = & (\text{por L.10.b})(\theta^L(\Pi_*(\alpha,s)^\sharp|_z), \lambda(\Pi_*(\alpha,s)^\sharp|_z)) = \\ & = & (\text{por c})(\theta^L(\alpha^\sharp|_{\Pi(z)}), \lambda(\alpha^\sharp|_{\Pi(z)})) = (0,\alpha). \end{array}$$

Nota 21 Por L.13.d, contrariamente al caso lineal, θ no es tensorial, es decir, no se anula sobre cualquier vector vertical.

Nota 22 Coordenadas de los campos fundamentales. El campo fundamental $(\alpha, s)^\sharp$ de $F^2(M)$ tiene en coordenadas (vale lo dicho en N.19) las siguientes expresiones equivalentes:

$$(\alpha, s)^\sharp|_z = x_0(z)\alpha\, \partial_{x_0}|_z + (s - (\bar{x}_1(z))^\alpha)\partial_{\bar{x}_1}|_z, \quad \forall\, z \in F^2(M)|_U;$$

ó

$$(\alpha, s)^\sharp = x_0\alpha\, \partial_{x_0} + (s - (\bar{x}_1)^\alpha)\partial_{\bar{x}_1}.$$

En efecto: es obvio que, sobre la sección σ_x^2 de $F^2(M)$ sobre U inducida por la carta (x, U) (ver N.19.b), cuyas coordenadas son $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1) \circ \sigma_x^2 = (x, I, 0)$, se tiene $(\forall\, m \in U)$

$$(\alpha, s)^\sharp|_{\sigma_x^2(m)} = \alpha\, \partial_{x_0}|_{\sigma_x^2(m)} + s\, \partial_{\bar{x}_1}|_{\sigma_x^2(m)}.$$

Para calcular $(\alpha, s)^\sharp|_z$ (con z arbitrario en $F^2(M)|_U$) usaremos el lema L.11.a. Calculemos primeramente $R_{(a,t)*}$ en las coordenadas $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$. De la expresión (ver III.2)

$$(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)(R_{(a,t)}z) = (x_{-1}(z), x_0(z)a, (\bar{x}_1(z))_{a^{-1}} + t),$$

se sigue que

$$\begin{aligned} R_{(a,t)*}(v\, \partial_{x_{-1}}|_z + \alpha\, \partial_{x_0}|_z + s\, \partial_{\bar{x}_1}|_z) = \\ = v\, \partial_{x_{-1}}|_{z(a,t)} + \alpha a\, \partial_{x_0}|_{z(a,t)} + s_{a^{-1}}\, \partial_{\bar{x}_1}|_{z(a,t)}. \end{aligned}$$

Ahora, como $z = \sigma_x^2(m)(x_0(z), \bar{x}_1(z))$, $\forall\, z \in F^2(M)|_U$, con $\pi(z) = m$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha, s)^\sharp|_z &= (\alpha, s)^\sharp|_{\sigma_x^2(m)(x_0(z), \bar{x}_1(z))} = \\ \text{(L.13.a)} &= R_{(x_0(z), \bar{x}_1(z))*}(x_0(z)\alpha x_0(z)^{-1}, \\ &\qquad (s - (\bar{x}_1(z))^\alpha)_{x_0(z)})^\sharp|_{\sigma_x^2(m)} = \\ &= x_0(z)\alpha\, \partial_{x_0}|_z + (s - (\bar{x}_1(z))^\alpha)\partial_{\bar{x}_1}|_z. \end{aligned}$$

Se comprueba que la expresión de $(\alpha, s)^\sharp$ dada aquí en coordenadas $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ se corresponde con la dada en [CDL, p.198] en coordenadas (x_{-1}, x_0, x_1) (recordar lo dicho al comienzo de la sección III.2).

Para el siguiente lema recordemos la definición D.4 (apartado III.2.1).

Lema 14 *Sea λ una conexión lineal. Se verifica:*

$$(\alpha, s)^\sharp \Upsilon_\lambda = -(\Upsilon_\lambda)^\alpha + s.$$

Demostración: Calculemos primero $(\alpha,0)^\sharp|_z(\Upsilon_\lambda)$. Sean Exp y exp las aplicaciones exponenciales de $GL(n)\otimes S^2(n)$ y de $GL(n)$, respectivamente. El homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} GL(n) & \longrightarrow & GL(n)\otimes S^2(n) \\ a & \longmapsto & (a,0), \end{array}$$

induce el homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(n)\oplus S^2(n) \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha,0). \end{array}$$

Se sigue que $(exp\,\alpha,0)=Exp(\alpha,0)$. Entonces

$$(\alpha,0)^\sharp|_z(\Upsilon_\lambda)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Upsilon_\lambda|_{z\,Exp\,\epsilon(\alpha,0)}-\Upsilon_\lambda|_z}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Upsilon_\lambda|_{z(exp\,\epsilon\alpha,0)}-\Upsilon_\lambda|_z}{\epsilon}=$$
$$(\text{N.13.c})=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(\Upsilon_\lambda|_z)_{(exp\,-\epsilon\alpha)}-\Upsilon_\lambda|_z}{\epsilon}=-(\Upsilon_\lambda|_z)^\alpha.$$

Calculemos ahora $(0,s)^\sharp|_z(\Upsilon_\lambda)$. El homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} S^2(n) & \longrightarrow & GL(n)\otimes S^2(n) \\ t & \longmapsto & (I,t), \end{array}$$

induce el homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{ccc} S^2(n) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(n)\oplus S^2(n) \\ s & \longmapsto & (0,s). \end{array}$$

Se sigue, como arriba, que $(I,exp^{S^2(n)}s)=Exp(0,s)$, con $exp^{S^2(n)}$ la aplicación exponencial en el grupo de Lie $S^2(n)$, que, como es abeliano, es la aplicación identidad en $S^2(n)$. Entonces

$$(0,s)^\sharp|_z(\Upsilon_\lambda)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Upsilon_\lambda|_{z\,Exp\,\epsilon(0,s)}-\Upsilon_\lambda|_z}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Upsilon_\lambda|_{z(I,\epsilon s)}-\Upsilon_\lambda|_z}{\epsilon}=$$
$$(\text{N.11.b})=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Upsilon_\lambda|_z+\epsilon s-\Upsilon_\lambda|_z}{\epsilon}=s.$$

Como $(\alpha,s)^\sharp=(\alpha,0)^\sharp+(0,s)^\sharp$, el resultado se sigue.

2 Conexiones de segundo orden.

2.1 Definición. Conexión lineal inducida.

En general, definimos una *conexión de orden r* como una conexión en el fibrado principal $\pi^r : F^r(M)\to M$. Una *conexión de segundo orden* es, pues, una conexión en el fibrado de referencias de segundo orden.

Definición 8 *Una 1-forma* $\omega \equiv (\omega_0, \omega_1) \in \Lambda^1(F^2(M), \mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n))$ *es una* conexión de segundo orden *si se verifica:*

a. $\omega((\alpha,t)^\sharp) = (\alpha,t)$, $\forall (\alpha,t) \in \mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n)$,

b. ω *es pseudotensorial de tipo Ad, es decir,* $R^*_{(a,t)}\omega = Ad_{(a,t)^{-1}}\omega$.

Ya que $\Pi : F^2(M) \to LM$ es un homomorfismo de fibrados principales (sobre M), una conexión en $F^2(M)$ induce por imagen directa (I.3.3) una conexión en LM.

Definición 9 *Dada una conexión de segundo orden* ω, *llamaremos* conexión lineal λ_ω inducida *por* ω *a la única conexión lineal en* M *que verifica la condición* $\Pi^*\lambda_\omega = \omega_0$.

Nota 23 Si $H^\omega \subset T_z F^2(M)$ es el subespacio horizontal en z de la conexión ω, entonces el subespacio horizontal de λ_ω en $\Pi(z) = l$ es $\Pi_*(H^\omega) =: H^{\lambda_\omega} \subset T_l LM$.

Nota 24 Coordenadas de una conexión de segundo orden. Sea una conexión en $F^2(M)$, $\omega \equiv (\omega_0, \omega_1) \equiv (\omega^i_j E^j_i, \omega^i_{jk} E^{jk}_i)$. Como ω_1 es $S^2(n)$-valuada podemos considerar que $\omega^i_{jk} = \omega^i_{kj}$. Sea (x, U) una carta en M y $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ la carta inducida en $F^2(M)$ (ver al comienzo de la sección III.2). Sea σ^2_x la sección de $F^2(M)$ inducida sobre U (N.19.b). Análogamente a como se hace en el caso lineal (I.4.2) escribimos

$$\sigma^{2\,*}_x \omega =: (\Gamma^i_{jk} dx^j) E^k_i + (\Gamma^i_{jkl} dx^j) E^{kl}_i.$$

Utilizando las notaciones $\Gamma \equiv (\Gamma^i_{jk}) : U \to L^2(n)$, $m \mapsto \Gamma|_m$, y $\bar{\Gamma} \equiv (\Gamma^i_{jkl}) : U \to L^3(n)$, $m \mapsto \bar{\Gamma}|_m$ (nótese que $\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{jlk}$), podemos escribir $\sigma^{2\,*}_x \omega =: (\Gamma(dx), \bar{\Gamma}(dx))$, con (recordar la nota N.1) $\Gamma(dx)$ una 1-forma $\mathfrak{gl}(n)$-valuada y con $\bar{\Gamma}(dx)$ una 1-forma $S^2(n)$-valuada definidas ambas sobre $U \subset M$. Dado que $\Pi \circ \sigma^2_x = \sigma^L_x$, la conexión lineal inducida λ_ω verifica $\sigma^{L\,*}_x \lambda_\omega = \Gamma(dx)$; de donde se sigue (ver I.4.2) que λ_ω tiene, en coordenadas (x_{-1}, x_0) de LM, la expresión:

$$\lambda_\omega = x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi^L)(dx_{-1}) x_0 + x_0^{-1} dx_0.$$

Finalmente, se demuestra que la conexión en $F^2(M)$, $\omega \equiv (\omega_0, \omega_1)$, tiene, en coordenadas (vale lo dicho en N.20), la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi)(dx_{-1}) x_0 + x_0^{-1} dx_0 \\ \omega_1 &= ((\bar{\Gamma} \circ \pi)(dx_{-1}))_{x_0^{-1}} + (\bar{x}_1)^{\omega_0} + d\bar{x}_1. \end{aligned}$$

Deduzcamos las coordenadas de ω_0 y ω_1. En principio tendríamos

$$\omega_0 = A(dx_{-1}) + B(dx_0) + C(d\bar{x}_1)$$
$$\omega_1 = D(dx_{-1}) + E(dx_0) + F(d\bar{x}_1),$$

para ciertas funciones A, B, C, D, E, F con dominio $F^2(M)|_U$, tales que $(\forall\, z \in F^2(M)|_U)$

$$A|_z \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n)),\ B|_z \in L(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{gl}(n)),\ C|_z \in L(S^2(n), \mathfrak{gl}(n)),$$

$$D|_z \in L(\mathbf{R}^n, S^2(n)),\ E|_z \in L(\mathfrak{gl}(n), S^2(n)),\ F|_z \in L(S^2(n), S^2(n)).$$

Por D.8 y N.22, se tiene que:

$$\begin{aligned}(\mathrm{i})\quad 0 = \omega_0((0,s)^\sharp) = \omega_0(s\,\partial_{\bar{x}_1}) = C(s),\ \forall s \in S^2(n),\ &\Rightarrow\ C = 0;\\ s = \omega_1((0,s)^\sharp) = \omega_1(s\,\partial_{\bar{x}_1}) = F(s),\ \forall\, s \in S^2(n),\ &\\ \Rightarrow\ F = id_{S^2(n)};&\end{aligned}$$

ahora se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned}(\mathrm{ii})\quad \alpha = \omega_0((\alpha,0)^\sharp) = \omega_0(x_0\alpha\,\partial_{x_0} - (\bar{x}_1)^\alpha\,\partial_{\bar{x}_1}) = B(x_0\alpha)&\\ \forall\,\alpha \in \mathfrak{gl}(n),\quad \Rightarrow\quad B(dx_0) = x_0^{-1}dx_0;&\\ 0 = \omega_1((\alpha,0)^\sharp) = \omega_1(x_0\alpha\,\partial_{x_0} - (\bar{x}_1)^\alpha\,\partial_{\bar{x}_1}) = E(x_0\alpha) - (\bar{x}_1)^\alpha,&\\ \forall\,\alpha \in \mathfrak{gl}(n),\quad \Rightarrow\quad E(dx_0) = (\bar{x}_1)^{x_0^{-1}dx_0}.&\end{aligned}$$

Por otro lado, dado $z = \sigma_x^2(m)(x_0(z), \bar{x}_1(z))$, con $\pi(z) = m$, y dado $X = v\,\partial_x|_m$, se obtiene que $\sigma^2_{x\,*}X = v\,\partial_{x_{-1}}|_{\sigma_x^2(m)}$ y (ver N.22) $R_{(x_0(z),\bar{x}_1(z))*}\sigma^2_{x\,*}X = v\,\partial_{x_{-1}}|_z$; entonces (por D.8)

$$\begin{aligned}\omega(R_{(x_0(z),\bar{x}_1(z))*}\sigma^2_{x\,*}X) &= Ad_{(x_0(z),\bar{x}_1(z))^{-1}}\omega(\sigma^2_{x\,*}X) =\\ &= Ad_{(x_0(z)^{-1},-(\bar{x}_1(z))_{x_0(z)})}(\Gamma|_m(v), \bar{\Gamma}|_m(v)) =\\ &= (x_0(z)^{-1}\Gamma|_m(v)x_0(z)\,,\,(\bar{\Gamma}|_m(v))_{x_0(z)^{-1}} +\\ &\qquad + (\bar{x}_1(z))^{x_0(z)^{-1}\Gamma|_m(v)x_0(z)});\end{aligned}$$

y como

$$\omega(v\,\partial_{x_{-1}}|_z) = (A|_z(v)\,,D|_z(v)),$$

entonces se sigue que

$$\begin{aligned}(\mathrm{iii})\qquad A(dx_{-1}) &= x_0^{-1}(\Gamma\circ\pi)(dx_{-1})x_0,\\ D(dx_{-1}) &= ((\bar{\Gamma}\circ\pi)(dx_{-1}))_{x_0^{-1}} + \bar{x}_1^{x_0^{-1}(\Gamma\circ\pi)(dx_{-1})x_0}.\end{aligned}$$

Los resultados i, ii y iii prueban la expresión dada.

Se comprueba que la expresión de ω dada aquí en coordenadas $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ se corresponde con la dada en [CDL, p.198] en coordenadas (x_{-1}, x_0, x_1) (recordar lo dicho al comienzo de la sección III.2).

2.2 Campos estándar horizontales.

En el caso de segundo orden aparecen, igual que en el caso lineal (véase [K-N, p.119]), campos de vectores horizontales estándar ([CDL]):

Definición 10 *El campo de vectores ω-horizontal estándar correspondiente a $v \in \mathbf{R}^n$ es el único campo $B^\omega(v)$ sobre $F^2(M)$ que satisface $\omega(B^\omega(v)) = 0$ y $\theta_{-1}(B^\omega(v)) = v$.*

Lema 15 *Se verifica que:*

a. $\Pi_*(B^\omega(v)|_z) = B^{\lambda_\omega}(v)|_{\Pi(z)}$ *con $B^{\lambda_\omega}(v)$ el campo λ_ω-horizontal estándar sobre LM.*

b. $\theta(B^\omega(v)|_z) = (v, \lambda(B^{\lambda_\omega}(v)|_{\Pi(z)})) = (v, -\Upsilon_{\lambda_\omega}|_z(v))$, *con $\lambda \in \mathcal{C}_z$.*

c. $R_{(a,t)*}B^\omega(v) = B^\omega(a^{-1}v)$.

d. *Si $v \neq 0$, $B^\omega(v)$ no se anula en ningun punto de $F^2(M)$.*

e. $[(\alpha,t)^\sharp, B^\omega(v)] = B^\omega(\alpha v)$.

Demostración: Como $v = \theta_{-1}(B^\omega(v)) = \theta^L(\Pi_* B^\omega(v))$ y $\Pi_* B^\omega(v)$ es λ_ω-horizontal se sigue **a**. De la parte **a** y de L.12.b se sigue la primera igualdad de **b**; la segunda igualdad se sigue de N.12.c. Como $R_{(a,t)*}B^\omega(v)$ es ω-horizontal y

$$\begin{aligned} \theta_{-1}(R_{(a,t)*}B^\omega(v)) &= \theta^L(\Pi_* R_{(a,t)*}B^\omega(v)) = \\ \text{(N.14.a)} &= \theta^L(R^L_{a*}\Pi_* B^\omega(v)) = \\ \text{(por a)} &= \theta^L(R^L_{a*}B^{\lambda_\omega}(v)) = \\ \text{(ver I.4.1)} &= \theta^L(B^{\lambda_\omega}(a^{-1}v)) = \\ &= a^{-1}v, \end{aligned}$$

se sigue **c**. **d** es inmediato. Como $\Pi_*((\alpha,t)^\sharp|_z) = \alpha^\sharp|_{\Pi(z)}$ y $\Pi_*(B^\omega(v)|_z) = B^{\lambda_\omega}(v)|_{\Pi(z)}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \Pi_*([(\alpha,t)^\sharp, B^\omega(v)]|_z) &= [\alpha^\sharp, B^{\lambda_\omega}(v)]|_{\Pi(z)} = \\ \text{([K-N, cap.III, P.2.3])} &= B^{\lambda_\omega}(\alpha v)|_{\Pi(z)}; \end{aligned}$$

como además $[(\alpha,t)^\sharp, B^\omega(v)]$ es horizontal ([K-N, p.78]), de **a** se concluye **e**.

Nota 25 Coordenadas de los campos horizontales. El campo estándar ω-horizontal $B^\omega(v)$ tiene en coordenadas (vale lo dicho en N.20) la siguiente expresión:

$$B^\omega(v) = x_0 v\, \partial_{x_{-1}} - (\Gamma \circ \pi)(x_0 v) x_0\, \partial_{x_0} - (\bar{\Gamma} \circ \pi)_{x_0^{-1}}(v)\, \partial_{\bar{x}_1}.$$

En efecto: El campo estándar ω-horizontal será de la forma

$$B^\omega(v) = w\,\partial_{x_{-1}} + \alpha\,\partial_{x_0} + s\,\partial_{\bar{x}_1},$$

con w, α, s funciones sobre $F^2(M)|_U$ valuadas en $\mathbf{R}^n$, $\mathfrak{gl}(n)$ y $S^2(n)$, respectivamente. Por N.20 y N.24, se debe verificar que

$$\begin{array}{lll}
\theta_{-1}(B^\omega(v)) = v, & \Rightarrow & x_0^{-1}w = v, \Rightarrow \quad w = x_0 v; \\
\omega_0(B^\omega(v)) = 0, & \Rightarrow & x_0^{-1}(\Gamma \circ \pi)(w)x_0 + x_0^{-1}\alpha = 0, \Rightarrow \\
& \Rightarrow & \alpha = -(\Gamma \circ \pi)(x_0 v)x_0; \\
\omega_1(B^\omega(v)) = 0, & \Rightarrow & ((\bar{\Gamma} \circ \pi)(w))_{x_0^{-1}} + (\bar{x}_1)^{\omega_0(B^\omega(v))} + s = 0, \Rightarrow \\
& \Rightarrow & s = -((\bar{\Gamma} \circ \pi)(x_0 v))_{x_0^{-1}} = -(\bar{\Gamma} \circ \pi)_{x_0^{-1}}(v)
\end{array}$$

(recordar la definición D.1.a aplicada a $\bar{\Gamma} \circ \pi : F^2(M)|_U \to L^3(n)$). Entonces se obtiene la expresión.

Se comprueba que la expresión de $B^\omega(v)$ dada aquí en coordenadas $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ se corresponde con la dada en [CDL, p.198] en coordenadas (x_{-1}, x_0, x_1) (recordar lo dicho al comienzo de la sección III.2).

Nota 26

a. Dada una conexión de segundo orden ω y $v \in \mathbf{R}^n$, la función

$$\theta_0(B^\omega(v)) : F^2(M) \to \mathfrak{gl}(n),\ z \mapsto \theta_0(B^\omega(v)|_z),$$

verifica

$$(\alpha, t)^\sharp \theta_0(B^\omega(v)) = \theta_0(B^\omega(\alpha v)) - [\alpha, \theta_0(B^\omega(v))] - t(v).$$

En efecto: Sean exp y Exp las aplicaciones exponenciales en los grupos de Lie $GL(n)$ y $GL(n) \ltimes S^2(n)$, respectivamente, como en la demostración de L.13.c. Entonces,

$$\begin{array}{rl}
(\alpha, t)^\sharp|_z \theta_0(B^\omega(v)) & = \frac{d}{d\epsilon}\big|_0 \theta_0(B^\omega(v)|_{z\,Exp\,\epsilon(\alpha,t)}) = \\
\text{(L.15.c)} & = \frac{d}{d\epsilon}\big|_0 \theta_0(R_{Exp\,\epsilon(\alpha,t)*} B^\omega(exp\,\epsilon\alpha v)|_z) = \\
\text{(L.12.a)} & = \frac{d}{d\epsilon}\big|_0 (\mathcal{A}^2_{Exp\,-\epsilon(\alpha,t)}\theta)_0(B^\omega(exp\,\epsilon\alpha v)|_z) = \\
\text{(derivando)} & = (\mathfrak{a}^2_{-(\alpha,t)}\theta)_0(B^\omega(v)|_z) + \theta_0(B^\omega(\alpha v)|_z) = \\
\text{(L.4.b)} & = (-[\alpha, \theta_0] - t(\theta_{-1}))(B^\omega(v)|_z) + \\
& \qquad + \theta_0(B^\omega(\alpha v)|_z) = \\
& = -[\alpha, \theta_0(B^\omega(v)|_z)] - t(v) + \\
& \qquad + \theta_0(B^\omega(\alpha v)|_z),
\end{array}$$

y el resultado se sigue.

En realidad, teniendo en cuenta que (L.15.b) $\theta_0(B^\omega(v)) = -\Upsilon_{\lambda_\omega}(v)$ y que (L.2.b.vi) $(\Upsilon_{\lambda_\omega})^\alpha(v) = [\alpha, \Upsilon_{\lambda_\omega}(v)] - \Upsilon_{\lambda_\omega}(\alpha v)$, lo anterior puede expresarse como

$$(\alpha, t)^\sharp \Upsilon_{\lambda_\omega} = -(\Upsilon_{\lambda_\omega})^\alpha + t,$$

que no es sino otra vez el resultado del lema L.14, para el caso en que la conexión lineal sea la inducida a partir de una de segundo orden. Habida cuenta de que toda conexión lineal λ puede considerarse inducida por una de segundo orden (ver N.34, más adelante), se concluye

$$(\alpha, t)^\sharp \Upsilon_\lambda = -(\Upsilon_\lambda)^\alpha + t;$$

así pues el resultado de esta nota es *equivalente* al lema L.14.

b. Cualquier vector $X \in T_z(F^2(M))$ se descompone de manera única como $X = B^\omega(v)|_z + (\alpha, t)^\sharp|_z$. Se verifica, entonces, que

$$(\theta_0 - \omega_0)(X) = \theta_0(B^\omega(v)|_z) = \text{ (L.15.b) } - \Upsilon_{\lambda_\omega}|_z(v).$$

Correspondientemente, si llamamos X^h a la componente ω-horizontal de X se tiene que

$$\theta_0(X^h) = (\theta_0 - \omega_0)(X).$$

3 Ecuaciones de estructura.

Análogamente a como se hace para una conexión lineal podemos definir:

Definición 11 *Sea ω una conexión de segundo orden y sea D^ω la correspondiente diferencial exterior covariante.*

a. 'Torsion de segundo orden' (véase [Yue]) *de ω es la 2-forma*

$$\Theta_\omega = ((\Theta_\omega)_{-1}, (\Theta_\omega)_0) := D^\omega\theta \in \Lambda^2(F^2(M), \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)).$$

b. Curvatura *de ω es la 2-forma*

$$\Omega_\omega = ((\Omega_\omega)_0, (\Omega_\omega)_1) := D^\omega\omega \in \Lambda^2(F^2(M), \mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n)).$$

Nota 27

a. Se deduce de L.12.a que Θ_ω es una 2-forma tensorial de tipo $\mathcal{A}^2$. Es bien sabido que Ω_ω es una 2-forma tensorial de tipo Ad.

b. Sean Θ_{λ_ω} y Ω_{λ_ω} la torsión y la curvatura, respectivamente, de la conexión lineal inducida λ_ω (D.9). Se verifica que $(\Theta_\omega)_{-1} = \Pi^*\Theta_{\lambda_\omega}$ y que $(\Omega_\omega)_0 = \Pi^*\Omega_{\lambda_\omega}$.

Se sigue de L.12.b, D.9 y L.15.a.

A continuación damos las ecuaciones de estructura de una conexión de segundo orden. La ecuación para la torsión de segundo orden se debe a Yuen ([Yue, Th.II.1]), quien la obtiene para cierto fibrado más amplio (el de las llamadas referencias "semi-holónomas", en contraste con $F^2(M)$ que corresponde a las referencias "holónomas"); también podría deducirse de [Klr] en el marco más abstracto de prolongaciones de fibrados principales arbitrarios. La demostración que damos aquí hace uso de las propiedades de los campos estándar horizontales; más concretamente utiliza la expresión (L.14; también N.26.a) que da las derivadas, a lo largo de las fibras de $F^2(M) \to M$, de la función $\Upsilon_{\lambda_\omega}$, que es esencialmente (N.26.b) la diferencia entre θ_0 y ω_0.

Teorema 2 (Ecuaciones de estructura). *Sea ω una conexión de segundo orden. Se verifica:*

a. $d\theta = -\omega \dot{\wedge} \theta + \frac{1}{2}\,[\omega_0, \omega_0] + \Theta_\omega$, *con $\dot{\wedge}$ el producto exterior asociado a* $\mathfrak{a}^2$

b. $d\omega = -\frac{1}{2}\,[\omega, \omega] + \Omega_\omega$.

Demostración: La ecuación **b** es la ecuación de estructura para una conexión en cualquier fibrado principal (véase [K-N, cap.II, Pr.5.2]). Para demostrar **a**, por la linealidad, es suficiente demostrar su validez para $X, Y \in T_z(F^2(M))$ en los tres casos siguientes:

- Si X, Y son ω-horizontales: La ecuación se sigue trivialmente.

- Si X, Y son verticales: Entonces $X = (\alpha, t)^\sharp|_z$ y $Y = (\beta, s)^\sharp|_z$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathfrak{gl}(n)$ y $t, s \in S^2(n)$. Se tiene:

$$\begin{cases} d\theta\,(X,Y) & = & X(\theta((\beta,s)^\sharp)) - Y(\theta((\alpha,t)^\sharp)) - \\ & & \qquad -\theta|_z([(\alpha,t)^\sharp,(\beta,s)^\sharp]) = \\ \text{(L.13.b y d)} & = & -\theta|_z([(\alpha,t),(\beta,s)]^\sharp) = \\ \text{(L.3.b y L.13.d)} & = & -(0\,,[\alpha,\beta]), \\ \\ \omega\hat{\wedge}\theta\,(X,Y) & = & \mathfrak{a}^2{}_{\omega(X)}\theta|_z((\beta,s)^\sharp) - \mathfrak{a}^2{}_{\omega(Y)}\theta|_z((\alpha,t)^\sharp) = \\ & = & \mathfrak{a}^2{}_{(\alpha,t)}(0,\beta) - \mathfrak{a}^2{}_{(\beta,s)}(0,\alpha) = \\ & = & 2\,(0\,,[\alpha,\beta]), \\ \\ [\omega_0,\omega_0]\,(X,Y) & = & 2\,[\omega_0((\alpha,t)^\sharp|_z)\,,\,\omega_0((\beta,s)^\sharp|_z)] = \\ & = & 2\,(0\,,[\alpha,\beta]), \\ \\ \Theta_\omega(X,Y) & = & 0; \end{cases}$$

y se verifica la ecuación.

- Si X es vertical e Y es ω-horizontal: Entonces: $X = (\alpha, t)^\sharp|_z$ e $Y = B^\omega(v)|_z$ para ciertos $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$, $t \in S^2(n)$ y $v \in \mathbf{R}^n$. Se tiene:

$$\begin{cases} d\theta\,(X,Y) & = & X(\theta(B^\omega(v))) - Y(\theta((\alpha,t)^\sharp)) - \\ & & \qquad -\theta|_z([(\alpha,t)^\sharp,B^\omega(v)]) = \\ \text{(L.15.e)} & = & X(v\,,\,\theta_0(B^\omega(v))) - \theta|_z(B^\omega(\alpha v)) = \\ \text{(N.26.a)} & = & (0\,,\,\theta_0|_z(B^\omega(\alpha v)) - [\alpha,\theta_0|_z(B^\omega(v))] - t(v)) \\ & & \qquad -(\alpha v\,,\,\theta_0|_z(B^\omega(\alpha v))) = \\ & = & (-\alpha v\,,\,-[\alpha,\theta_0|_z(B^\omega(v))] - t(v)), \\ \\ \omega\hat{\wedge}\theta\,(X,Y) & = & \mathfrak{a}^2{}_{\omega(X)}\theta|_z(B^\omega(v)) = \\ & = & \mathfrak{a}^2{}_{(\alpha,t)}(v\,,\,\theta_0|_z(B^\omega(v))) = \\ & = & (\alpha v\,,\,t(v) + [\alpha,\theta_0|_z(B^\omega(v))]), \\ \\ [\omega_0,\omega_0]\,(X,Y) & = & 0, \\ \\ \Theta_\omega\,(X,Y) & = & 0, \end{cases}$$

y se verifica la ecuación.

Nota 28 Las dos ecuaciones de estructura de ω se desdoblan cada una en dos componentes, $\mathbf{R}^n$- y $GL(n)$-valuadas respectivamente, de la siguiente manera:

a. **i.** $d\theta_{-1} = -\omega_0\tilde{\wedge}\theta_{-1} + (\Theta_\omega)_{-1}$

ii. $d\theta_0 = -\omega_1\tilde{\wedge}\theta_{-1} - [\omega_0,\theta_0] + \frac{1}{2}[\omega_0,\omega_0] + (\Theta_\omega)_0$,

con $\tilde{\wedge}$ el producto exterior asociado a la correspondiente restricción de $\mathfrak{a}^2$.

b. **i.** $d\omega_0 = -\frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] + (\Omega_\omega)_0$

ii. $d\omega_1 = -\omega_1 \tilde{\wedge} \omega_0 + (\Omega_\omega)_1$,

con $\tilde{\wedge}$ el producto exterior asociado a la correspondiente restricción de la representación adjunta de $\mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n)$.

Nótese que en $\omega_0 \tilde{\wedge} \theta_{-1}$ el producto exterior coincide con el asociado a la representación natural de $\mathfrak{gl}(n)$ en $\mathbf{R}^n$ (esto es, $\omega_0 \tilde{\wedge} \theta_{-1} = \omega_0 \dot{\wedge} \theta_{-1}$, siguiendo la notación acordada en el apartado I.3.2), puesto que $\mathfrak{a}^2{}_{(\alpha,0)}(v,0) = (\alpha v, 0)$. En cambio, en $\omega_1 \tilde{\wedge} \theta_{-1}$ *no* se trata del producto exterior asociado a una representación de $S^2(n)$ en $\mathbf{R}^n$, puesto que $\mathfrak{a}^2{}_{(0,t)}(v,0) = (0, t(v)) \in \mathfrak{gl}(n)$. Nótese también que $[\omega_0, \theta_0] = \omega_0 \dot{\wedge} \theta_0$ y $[\omega_0, \omega_0] = \omega_0 \dot{\wedge} \omega_0$ (ver I.3.2). Por último, en $\omega_1 \tilde{\wedge} \omega_0$ *tampoco* se trata del producto exterior asociado a una representación de $S^2(n)$ en $\mathfrak{gl}(n)$, puesto que $ad_{(0,t)}(\alpha, 0) = (0, -t^\alpha) = -ad_{(\alpha,0)}(0,t) \in S^2(n)$ (obsérvese que $\omega_1 \tilde{\wedge} \omega_0 = \omega_0 \tilde{\wedge} \omega_1$).

Nota 29 Coordenadas de la torsión y curvatura de segundo orden. Vale lo dicho en N.20 y N.24. Definamos

$$(1)\begin{cases} \sigma_x^{2*}(\Theta_\omega)_{-1} =: (\frac{1}{2} T^i_{pq} dx^p \wedge dx^q) e_i, & \text{con } T^i_{pq} = -T^i_{qp}; \\ \sigma_x^{2*}(\Theta_\omega)_0 =: (\frac{1}{2} T^i_{jpq} dx^p \wedge dx^q) E^j_i, & \text{con } T^i_{jpq} = -T^i_{jqp}; \\ \sigma_x^{2*}(\Omega_\omega)_0 =: (\frac{1}{2} R^i_{jpq} dx^p \wedge dx^q) E^j_i, & \text{con } R^i_{jpq} = -R^i_{jqp}; \\ \sigma_x^{2*}(\Omega_\omega)_1 =: (\frac{1}{2} R^i_{jkpq} dx^p \wedge dx^q) E^{jk}_i, & \text{con } R^i_{jkpq} = -R^i_{jkqp}. \end{cases}$$

Ya que $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1) \circ \sigma_x^2 = (x, I, 0)$ se deduce que $\sigma_x^{2*}(\theta_{-1}, \theta_0) = (dx, 0)$ y, por definición, se tiene que $\sigma_x^{2*}(\omega_0, \omega_1) = (\Gamma(dx), \bar{\Gamma}(dx))$. Usando ésto, por N.27, se obtiene

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma_x^{2*}(\Theta_\omega)_{-1} = \Gamma(dx) \dot{\wedge} dx, \\ \sigma_x^{2*}(\Theta_\omega)_0 = \bar{\Gamma}(dx) \dot{\wedge} dx - \frac{1}{2}[\Gamma(dx), \Gamma(dx)], \\ \sigma_x^{2*}(\Omega_\omega)_0 = d(\Gamma(dx)) + \frac{1}{2}[\Gamma(dx), \Gamma(dx)], \\ \sigma_x^{2*}(\Omega_\omega)_1 = d(\bar{\Gamma}(dx)) + \bar{\Gamma}(dx) \dot{\wedge} \Gamma(dx); \end{cases}$$

donde, como $\Gamma(dx) = (\Gamma^i_{pj} dx^p) E^j_i$ y $\bar{\Gamma}(dx) = (\Gamma^i_{pjk} dx^p) E^{jk}_i$, se tiene que

$$(3)\qquad \begin{cases} \Gamma(dx) \dot{\wedge} dx = (\Gamma^i_{pq} dx^p \wedge dx^q) e_i, \\ \bar{\Gamma}(dx) \dot{\wedge} dx = (\Gamma^i_{pqj} dx^p \wedge dx^q) E^j_i, \\ [\Gamma(dx), \Gamma(dx)] = 2(\Gamma^i_{pr} \Gamma^r_{qj} dx^p \wedge dx^q) E^j_i, \\ \bar{\Gamma}(dx) \dot{\wedge} \Gamma(dx) = (-\Gamma^i_{qr} \Gamma^r_{pjk} + \Gamma^i_{pjr} \Gamma^r_{qk} + \Gamma^i_{prk} \Gamma^r_{qj}) \\ \qquad\qquad (dx^p \wedge dx^q) E^{jk}_i. \end{cases}$$

Igualando (1) y (2) y usando (3) se deduce inmediatamente que

$$\begin{cases} T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}, \\ T^i_{jkl} = \Gamma^i_{klj} - \Gamma^i_{lkj} - \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj} + \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kj}, \\ R^i_{jkl} = \Gamma^i_{lj,k} - \Gamma^i_{kj,l} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj} - \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kj}, \\ R^i_{jklm} = \Gamma^i_{mjk,l} - \Gamma^i_{ljk,m} - \Gamma^i_{mp}\Gamma^p_{ljk} + \Gamma^i_{ljp}\Gamma^p_{mk} + \Gamma^i_{lpk}\Gamma^p_{mj} + \\ \qquad\qquad + \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mjk} - \Gamma^i_{mjp}\Gamma^p_{lk} - \Gamma^i_{mpk}\Gamma^p_{lj}. \end{cases}$$

El siguiente corolario da las ecuaciones análogas a las identidades de Bianchi para una conexión lineal.

Corolario 2 *Sea ω una conexión de segundo orden. Se verifica:*

a. $D^\omega\Theta_\omega = \Omega_\omega\dot{\wedge}\theta - [(\Omega_\omega)_0, \omega_0]$, *con $\dot{\wedge}$ el producto exterior asociado a $\mathfrak{a}^2$, equivalente en componentes a*

i. $D^\omega(\Theta_\omega)_{-1} = (\Omega_\omega)_0\tilde{\wedge}\theta_{-1}$.

ii. $D^\omega(\Theta_\omega)_0 = (\Omega_\omega)_1\tilde{\wedge}\theta_{-1} + [(\Omega_\omega)_0, \theta_0 - \omega_0]$.

con $\tilde{\wedge}$ el producto exterior asociado a la correspondiente restricción de $\mathfrak{a}^2$ (verificándose $(\Omega_\omega)_0\tilde{\wedge}\theta_{-1} = (\Omega_\omega)_0\dot{\wedge}\theta_{-1}$; ver I.3.2).

b. $D^\omega\Omega_\omega = 0$, *equivalente en componentes a*

i. $D^\omega(\Omega_\omega)_0 = 0$.

ii. $D^\omega(\Omega_\omega)_1 = 0$.

Demostración: La ecuación **b** constituye la identidad de Bianchi para una conexión en cualquier fibrado principal (véase [K-N, cap.II, Pr.5.4]). Demostraremos **a** en componentes. Tomando la diferencial exterior en N.28.a.i obtenemos

$$0 = dd\theta_{-1} = -d\omega_0\dot{\wedge}\theta_{-1} + \omega_0\dot{\wedge}d\theta_{-1} + d(\Theta_\omega)_{-1},$$

que aplicado a vectores ω-horizontales prueba el apartado **a.i.** Tomando la diferencial exterior en N.28.a.ii obtenemos

$$0 = dd\theta_0 = -d\omega_1\tilde{\wedge}\theta_{-1} + \omega_1\tilde{\wedge}d\theta_{-1} - [d\omega_0, \theta_0] + [\omega_0, d\theta_0] + \\ + \frac{1}{2}[d\omega_0, \omega_0] - \frac{1}{2}[\omega_0, d\omega_0] + d(\Theta_\omega)_0,$$

que aplicado a vectores horizontales, y teniendo en cuenta la N.26.b, prueba el apartado **a.ii.**

4 Conexiones de segundo orden inducidas.

Sabemos (véase I.3.3) que un homomorfismo de fibrados principales que induce un difeomorfismo en la base aplica conexiones del fibrado inicial en conexiones del fibrado final por el procedimiento (*imagen directa*) de definir como subespacios horizontales en el fibrado final la imagen de los subespacios horizontales del fibrado inicial por la aplicación tangente. La conexión lineal λ_ω, inducida por una conexión de segundo orden ω (D.9), es un ejemplo de esta situación para el homomorfismo $\Pi : F^2(M) \to LM$ (como fibrados principales sobre M) asociado al epimorfismo de grupos $G^2(n) \to GL(n)$, $(a,t) \mapsto a$. En esta sección estudiaremos lo que sucede con ciertos homomorfismos de LM en $F^2(M)$ asociados al monomorfismo $GL(n) \to G^2(n)$, $a \mapsto (a,0)$. Nos referimos a los homomorfismos que, compuestos con la proyección Π, dan la identidad en LM, esto es, que son *secciones equivariantes* del fibrado principal $\Pi : F^2(M) \to LM$ (la equivariancia es respecto de las acciones de los grupos $G^2(n)$ y $GL(n)$ y del monomorfismo $GL(n) \to G^2(n)$, $a \mapsto (a,0)$); pues bien, algunas propiedades interesantes de estos homomorfismos (particularmente en lo relativo a imagenes directas de conexiones) son también compartidas por todas las secciones de $F^2(M) \to LM$, aunque no sean equivariantes. Por esta razón, comenzamos estudiando en el apartado 4.1 las secciones del fibrado principal $F^2(M)(LM, S^2(n))$; posteriormente, en el apartado 4.2 nos centramos en los homomorfismos mencionados (o secciones equivariantes), que, como se verá, se corresponden biyectivamente con las conexiones simétricas en LM; y estudiaremos las conexiones que estos homomorfismos inducen en $F^2(M)$ por imagen directa de conexiones arbitrarias en LM.

4.1 Secciones de $F^2(M)(LM, S^2(n))$.

Consideremos las secciones globales del fibrado principal $F^2(M)(LM, S^2(n))$, esto es,las aplicaciones $\sigma : LM \to F^2(M)$ tales que $\Pi \circ \sigma = id_{LM}$. Su existencia está garantizada, pues, como subfibrado principal (L.8 y T.1, Cap.III) de $L(LM)(LM, GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)))$, $F^2(M)(LM, S^2(n))$ es trivializable (ver dem. al L.8); o también, directamente, pues el grupo $S^2(n)$ es una variedad afín ([Die, 16.14.5]). Introduzcamos la siguiente definición:

Definición 12 *Sea σ una sección del fibrado principal $F^2(M) \to LM$. Definimos la función*

$$\begin{array}{rccl} \Upsilon_\sigma : & F^2(M) & \longrightarrow & S^2(n) \\ & z & \longmapsto & \Upsilon_\sigma|_z, \end{array} \qquad \text{tal que} \quad z =: \sigma(\Pi(z))(I, \Upsilon_\sigma|_z).$$

Nota 30

a. Se verifica:

$$\Upsilon_\sigma|_{zt} = \Upsilon_\sigma|_z + t.$$

En efecto: aplicando la definición a z y zt se obtiene

$$zt = (\sigma(\Pi(z))(I, \Upsilon_\sigma|_z))(I,t) = \sigma(\Pi(z))(I, \Upsilon_\sigma|_{zt});$$

lo que implica que $(I, \Upsilon_\sigma|_{zt}) = (I, \Upsilon_\sigma|_z) \cdot (I,t)$.

b. Cada sección σ del fibrado principal $F^2(M) \to LM$ induce la trivialización (global) de dicho fibrado dada por

$$\begin{array}{rccc} \Psi_\sigma : & F^2(M) & \longrightarrow & LM \times S^2(n) \\ & z & \longmapsto & (\Pi(z), \Upsilon_\sigma|_z), \end{array}$$

verificándose (obviamente)

$$\Psi_\sigma(zt) = (\Pi(z), \Upsilon_\sigma|_z + t).$$

Cada sección σ induce una conexión en $\Pi : F^2(M) \to LM$, que declara horizontales a los subespacios tangentes (de dimensión $(n + n^2)$) a la subvariedad regular $Im\sigma$.

Nota 31 La conexión inducida por σ en $F^2(M)(LM, S^2(n))$ es la dada por la 1-forma: $d\Upsilon_\sigma \in \Lambda^1(F^2(M), S^2(n))$.

En efecto:

(i) La primera propiedad de una conexión se verifica: $\forall s \in S^2(n)$, se tiene $exp^{S^2(n)} \epsilon s = \epsilon s$, con $exp^{S^2(n)}$ la aplicación exponencial en el grupo de Lie abeliano $S^2(n)$; entonces

$$d\Upsilon_\sigma(s^\sharp|_z) = s^\sharp|_z(\Upsilon_\sigma) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Upsilon_\sigma|_{z\, exp^{S^2(n)} \epsilon s} - \Upsilon_\sigma|_z}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon s}{\epsilon} = s.$$

(ii) Ya que $S^2(n)$ es abeliano, $Ad_t^{S^2(n)} = id_{S^2(n)}\ \forall t \in S^2(n)$; por tanto, para probar que se verifica la segunda propiedad de una conexión, bastará probar que

$$d\Upsilon_\sigma(R_{t*}X) = d\Upsilon_\sigma(X),\ \forall X \in T_z F^2(M).$$

Y en efecto: si $X = \dot{\gamma}(0)$, para una curva $\gamma : \mathbf{R} \to F^2(M)$, entonces

$$d\Upsilon_\sigma(R_{t*}X) = (\Upsilon_\sigma \circ R_t)_*(X) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Upsilon_\sigma|_{\gamma(\epsilon)t} - \Upsilon_\sigma|_{\gamma(0)t}}{\epsilon} =$$

$$\text{(N.28.a)} \quad = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Upsilon_\sigma|_{\gamma(\epsilon)} + t - \Upsilon_\sigma|_{\gamma(0)} - t}{\epsilon} = d\Upsilon_\sigma(X).$$

(iii) Que la conexión es la inducida por σ es obvio, ya que $\Upsilon_\sigma|_{\sigma(l)} = 0$, $\forall\, l \in LM$.

Por otra parte, si se considera una conexión de segundo orden ω y su conexión lineal inducida λ_ω (D.9), se tiene que *cualquier* sección σ de $\Pi : F^2(M) \to LM$ lleva λ_ω por imagen directa en la 1-forma $\omega_0 \in \Lambda^1(F^2(M), \mathfrak{gl}(n))$:

Lema 16 *Sea ω una conexión de segundo orden y sea σ una sección de $\Pi : F^2(M) \to LM$. Entonces $\sigma^*\omega_0 = \lambda_\omega$ y $(\sigma \circ \Pi)^*\omega_0 = \omega_0$.*

Demostración: En efecto: se tiene (ver D.9) $\sigma^*\omega_0 = \sigma^*(\Pi^*\lambda_\omega) = (\Pi \circ \sigma)^*\lambda_\omega = \lambda_\omega$; por tanto, además se tiene que $(\sigma \circ \Pi)^*\omega_0 = \Pi^*\sigma^*\omega_0 = \Pi^*\lambda_\omega = \omega_0$.

4.2 Conexiones de segundo orden inducidas

Nos interesamos aquí por las secciones del fibrado principal $F^2(M) \to LM$ que son equivariantes (respecto de las acciones de los grupos $G^2(n)$ y $GL(n)$ y del monomorfismo $GL(n) \to G^2(n)$, $a \mapsto (a, 0)$), esto es, por los homomorfismos de LM en $F^2(M)$ (como fibrados principales sobre M) siguientes:

Definición 13 *Al conjunto de homomorfismos $\sigma : LM \to F^2(M)$ asociados al monomorfismo $GL(n) \to G^2(n)$, $a \mapsto (a, 0)$, tales que $\Pi \circ \sigma = id_{LM}$, lo denotaremos por $\mathcal{S}(F^2(M))$.*

Recordemos (Cap.III) que los elementos de $F^2(M)$ se corresponden con los elementos de $(LM)_1$, que, a su vez, se obtienen, básicamente, de los subespacios horizontales para conexiones lineales simétricas. El siguiente lema, debido a Kobayashi ([Ko1]; véase también [Yue, Prop.II.10]), establece una correspondencia biyectiva entre las conexiones simétricas en LM y los homomorfismos pertenecientes al conjunto $\mathcal{S}(F^2(M))$; y, además, establece que *cada conexión simétrica en LM puede obtenerse como imagen recíproca de la parte $\mathfrak{gl}(n)$-valuada, θ_0, de la forma canónica sobre $F^2(M)$ por el correspondiente elemento de $\mathcal{S}(F^2(M))$*:

Lema 17

a. *Existe una correspondencia biyectiva natural entre el conjunto de conexiones lineales simétricas y el conjunto $\mathcal{S}(F^2(M))$. Una conexión lineal simétrica λ se corresponde con $\sigma \in \mathcal{S}(F^2(M))$ si y sólo si $\lambda|_l \in \mathcal{C}_{\sigma(l)}$, $\forall\, l \in LM$.*

b. *Sea λ una conexión lineal simétrica con su correspondiente $\sigma_\lambda \in \mathcal{S}(F^2(M))$. Entonces se verifica que ${\sigma_\lambda}^*\theta_0 = \lambda$.*

Demostración: (a) Nótese que una sección $\sigma : LM \to F^2(M)$ asocia a cada $l \in LM$ un $z = \sigma(l) \in F^2(M)$ tal que $\Pi(z) = l$, y por tanto un subespacio $H^z \subset T_l LM$ sin torsión. Así, dada σ obtenemos una distribución de subespacios (de dimensión n) horizontales sin torsión $\{H^{\sigma(l)} : l \in LM\}$ tangentes a LM. Por otra parte, si σ es un homomorfismo correspondiente al monomorfismo $GL(n) \to G^2(n)$, $a \mapsto (a, 0)$, se tiene que $\sigma(la) = \sigma(l)(a, 0) \equiv \sigma(l)a$ y, por N.13.a, se tiene que $H^{\sigma(la)} = R_{a*} H^{\sigma(l)}$; por tanto la distribución define una conexión lineal simétrica.

Recíprocamente, si tenemos una conexión lineal simétrica λ tenemos una distribución de planos horizontales sin torsión y, por tanto, una sección σ de $F^2(M) \to LM$ construida según D.2; concretamente, $\sigma(l)(v, \alpha) := B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l$ (ver N.10.b). Se verifica inmediatamente que σ está en $\mathcal{S}(F^2(M))$.

(b) $\forall X \in T_l LM$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\sigma_\lambda{}^* \theta_0)(X) &= \theta_0|_{\sigma_\lambda(l)}(\sigma_{\lambda *} X) = \\ \text{(L.12.b)} &= (\Pi^* \lambda)|_{\sigma_\lambda(l)}(\sigma_{\lambda *} X) = \\ &= (\Pi \circ \sigma_\lambda)^* \lambda(X) = \\ &= \lambda(X). \end{aligned}$$

Nota 32

a. Destaquemos que si λ es una conexión lineal simétrica, con su correspondiente $\sigma_\lambda \in \mathcal{S}(F^2(M))$, por construcción $\lambda \in \mathcal{C}_{\sigma_\lambda(l)}$, $\forall\, l \in LM$ (N.10.b). Se verifica:

(i) $\Upsilon_\lambda = \Upsilon_{\sigma_\lambda}$ (D.4 y D.12).

En efecto: se sigue de D.12 que $\Upsilon_{\sigma_\lambda}(\sigma_\lambda(l)) = 0$, y de D.4 que $\Upsilon_\lambda(\sigma_\lambda(l)) = 0 (\forall\, l \in LM)$; y ahora el resultado se obtiene de N.12.b y N.30.a.

(ii) $\Psi_\lambda = \Psi_{\sigma_\lambda}$ (N.12.d y N.30.b).

además se tiene que

$$d\Upsilon_\lambda(R_{a*}(X)) = (d\Upsilon_\lambda(X))_{a^{-1}}, \ \forall X \in T_z F^2(M).$$

En efecto: Con las mismas notaciones que en N.31(ii)

$$d\Upsilon_{\sigma_\lambda}(R_{a*}X) = (\Upsilon_\lambda \circ R_a)_*(X) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Upsilon_\lambda|_{\gamma(\epsilon)a} - \Upsilon_\lambda|_{\gamma(0)a}}{\epsilon} =$$

$$\text{(N.10.c)} \ = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(\Upsilon_\lambda|_{\gamma(\epsilon)})_{a^{-1}} - (\Upsilon_\lambda|_{\gamma(0)})_{a^{-1}}}{\epsilon} = (d\Upsilon_\lambda(X))_{a^{-1}}.$$

Obsérvese que, si bien el resultado (que se usa en N.31(ii)) $\Upsilon_\sigma|_{zt} = \Upsilon_\sigma|_z + t$ es cierto para toda sección σ de $F^2(M) \to LM$, el resultado (aquí usado) $\Upsilon_{\sigma_\lambda}|_{za} = (\Upsilon_{\sigma_\lambda}|_z)_{a^{-1}}$ *sólo* es cierto para secciones *equivariantes*.

Habida cuenta de lo probado en N.31(ii), se tiene:

$$d\Upsilon_\lambda(R_{(a,t)*}(X)) = (d\Upsilon_\lambda(X))_{a^{-1}},\ \forall X \in T_zF^2(M).$$

b. En [Gar, Teor. 2] se establecía una correspondencia biyectiva entre las conexiones en LM y aquellas secciones del fibrado afín $J^1(LM) \to LM$ (de *1-jets de secciones del fibrado principal* $LM \to M$) que son, a su vez, homomorfismos de fibrados principales $LM \to J^1(LM)$ (considerando éste último como fibrado principal con grupo $GL(n)$ y base $J^1(LM)/GL(n)$); y en [Gar, Teor. 3] se establecía que cada (forma de) conexión en LM se obtiene como imagen recíproca, por el correspondiente homomorfismo, de una conexión *canónicamente* definida en el fibrado principal $J^1(LM)\big(J^1(LM)/GL(n), GL(n)\big)$.

El lema L.17 se corresponde con estos resultados de [Gar] para el caso más restrictivo de conexiones simétricas en LM. Para verlo téngase en cuenta que $F^2(M) \to LM$ se puede considerar (N.10.d) un subfibrado del fibrado afín $J^1(LM) \to LM$, y que puede probarse que nuestra θ_0 da una 1-forma de conexión en el fibrado principal $F^2(M)\big(F^2(M)/\ GL(n), GL(n)\big)$, que es restricción de la llamada (en [Gar, Teor. 3]) "forma de conexión canónica" sobre $J^1(LM)\big(J^1(LM)/GL(n), GL(n)\big)$.

En la siguiente definición se introduce una notación bastante natural.

Definición 14 *Sea* $\Upsilon \in \mathcal{F}(F^2(M), S^2(n))$.
Si $\mu \in \Lambda^r(F^2(M), \mathfrak{gl}(n))$, *definimos* $\Upsilon^\mu \in \Lambda^r(F^2(M), S^2(n))$ *por:*

$$\Upsilon^\mu(X_1, \ldots, X_r) := (\Upsilon|_z)^{\mu(X_1,\ldots,X_r)},\quad \forall X_1, \ldots, X_r \in T_zF^2(M).$$

Si $\nu \in \Lambda^r(F^2(M), \mathbf{R}^n)$, *definimos* $\Upsilon(\nu) \in \Lambda^r(F^2(M), \mathfrak{gl}(n))$ *por:*

$$\Upsilon(\nu)(X_1, \ldots, X_r) := \Upsilon|_z(\nu(X_1, \ldots, X_r)),\quad \forall X_1, \ldots, X_r \in T_zF^2(M).$$

Con las notaciones introducidas en N.28, se podría escribir

$$\Upsilon^\mu = -\Upsilon\tilde{\wedge}\mu,\quad \Upsilon(\nu) = \Upsilon\tilde{\wedge}\nu.$$

Si λ es una conexión lineal simétrica, el homomorfismo de fibrados principales (L.17.a) $\sigma_\lambda \in \mathcal{S}(F^2(M))$ inducirá por imagen directa, a partir de una conexión lineal arbitraria λ', una conexión de segundo orden. En particular, si tomamos $\lambda' = \lambda$, se obtiene la siguiente definición (véase [K-N, Prop.6.1.b, p.80]).

Definición 15 *Sea λ una conexión lineal simétrica. La* conexión de segundo orden $\omega_\lambda \equiv ((\omega_\lambda)_0, (\omega_\lambda)_1)$ inducida *por λ es la única que verifica:*

$$\sigma_\lambda{}^*(\omega_\lambda)_0 = \lambda, \quad \sigma_\lambda{}^*(\omega_\lambda)_1 = 0.$$

Lema 18 *Sea λ una conexión lineal simétrica.*

a. *La conexión lineal inducida* (D.9) *por la de segundo orden ω_λ es la propia λ.*

b. *La conexión de segundo orden ω_λ viene dada por* (recordar D.14)*:*

$$(\omega_\lambda)_0 = \Pi^*\lambda, \quad (\omega_\lambda)_1 = d\Upsilon_\lambda + \Upsilon_\lambda{}^{\Pi^*\lambda},$$

con $\Upsilon_\lambda \in \mathcal{F}(F^2(M), S^2(n))$ definida en D.4 (III.2.1).

Demostración: (a) Debe verificarse (ver D.9) que $\Pi^*\lambda = (\omega_\lambda)_0$, y, en efecto, $\Pi^*\lambda = \Pi^*\sigma_\lambda{}^*(\omega_\lambda)_0 =$ (L.16) $(\omega_\lambda)_0$.

(b) Sea $\omega \equiv (\omega_0, \omega_1) = (\Pi^*\lambda, d\Upsilon_\lambda + \Upsilon_\lambda{}^{\Pi^*\lambda})$. Esta 1-forma, efectivamente, verifica

$$\sigma_\lambda{}^*\omega_0 = \sigma_\lambda{}^*\Pi^*\lambda = (\Pi \circ \sigma_\lambda)^*\lambda = \lambda,$$

y (por construcción, $\Upsilon_\lambda \circ \sigma_\lambda = 0$)

$$\sigma_\lambda{}^*\omega_1 = \sigma_\lambda{}^*(d\Upsilon_\lambda + \Upsilon_\lambda{}^{\Pi^*\lambda}) = d(\Upsilon_\lambda \circ \sigma_\lambda) + (\Upsilon_\lambda \circ \sigma_\lambda)^{\sigma_\lambda{}^*(\Pi^*\lambda)} = 0.$$

Veamos que ω es una conexión de segundo orden:

(i) Probemos que $\omega((\alpha,t)^\sharp|_z) = (\alpha,t)$. En efecto:

$$\omega_0((\alpha,t)^\sharp|_z) = \lambda(\Pi_*(\alpha,t)^\sharp|_z) = \text{(L.13.c)}\lambda(\alpha^\sharp|_{\Pi(z)}) = \alpha;$$

por otro lado

$$\omega_1((\alpha,t)^\sharp|_z) = (\alpha,t)^\sharp|_z\Upsilon_\lambda + (\Upsilon_\lambda|_z)^{\lambda(\Pi_*(\alpha,t)^\sharp|_z)} =$$
$$\text{(N.26.a y L.13.c)} \ = -(\Upsilon_\lambda|_z)^\alpha + t + (\Upsilon_\lambda|_z)^\alpha = t;$$

y el resultado se sigue.

(ii) Probemos que $R^*_{(a,t)}\omega = Ad_{(a,t)^{-1}}\omega$. Si $X \in T_zF^2(M)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\omega(R_{(a,t)*}X) &= (\lambda(\Pi_*R_{(a,t)*}X),\ d\Upsilon_\lambda(R_{(a,t)*}X) + \\
&\qquad + (\Upsilon_\lambda|_{z(a,t)})^{\lambda(\Pi_*R_{(a,t)*}X)}) = \\
\text{(N.14.a, d, N.32.a)} &= (\lambda(R^L_{a*}\Pi_*X),\ (d\Upsilon_\lambda(X))_{a^{-1}} + \\
&\qquad + ((\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}} + t)^{\lambda(R^L_{a*}\Pi_*X)}) = \\
&= (a^{-1}\omega_0(X)a,\ (d\Upsilon_\lambda(X))_{a^{-1}} + \\
&\qquad + ((\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}})^{a^{-1}\omega_0(X)a} + t^{a^{-1}\omega_0(X)a}) = \\
\text{(L.2.c.)} &= (a^{-1}\omega_0(X)a,\ (d\Upsilon_\lambda(X) + \\
&\qquad + (\Upsilon_\lambda|_z)^{\omega_0(X)})_{a^{-1}} + t^{a^{-1}\omega_0(X)a}) = \\
\text{(L.2.c.)} &= (a^{-1}\omega_0(X)a,\ (\omega_1(X))_{a^{-1}} + \\
&\qquad + ((t_a)^{\omega_0(X)})_{a^{-1}}) = \\
\text{(N.5(ii), L.3.a)} &= Ad_{(a,t)^{-1}}(\omega_0(X), \omega_1(X)).
\end{aligned}$$

Nota 33

a. Dada cualquier conexión de segundo orden ω, se tiene (L.15.b y N.26.b) que $\omega_0 - \theta_0 = \Upsilon_{\lambda_\omega}(\theta_{-1})$. Y por el lema L.18.a, se concluye: dada una conexión lineal simétrica λ, se tiene

$$(\omega_\lambda)_0 - \theta_0 = \Upsilon_\lambda(\theta_{-1}).$$

b. Coordenadas de una conexión de segundo orden inducida por una conexión lineal simétrica. Sea λ una conexión lineal simétrica y sea ω_λ la conexión de segundo orden inducida (D.15). Sea (x, U) una carta en M y sea σ_x^2 la sección inducida sobre U (N.19.b). Adoptemos los mismos convenios de N.24, y escribamos

$$\sigma_x^{2\,*}\,\omega_\lambda =: (\Gamma(dx), \bar{\Gamma}(dx)).$$

Pues bien, resulta que Γ es la función de coeficientes de la conexión λ y que

$$\bar{\Gamma}(dx) = d\Gamma + \Gamma^{\Gamma(dx)}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\Gamma(dx) &:= \sigma_x^{2\,*}\,(\omega_\lambda)_0 = \sigma_x^{2\,*}\Pi^*\lambda = (\Pi \circ \sigma_x^2)^*\lambda = \sigma_x^{L\,*}\lambda, \\
\bar{\Gamma}(dx) &:= \sigma_x^{2\,*}\,(\omega_\lambda)_1 = \sigma_x^{2\,*}(d\Upsilon_\lambda + \Upsilon_\lambda{}^{\Pi^*\lambda}) = \\
&= d(\Upsilon_\lambda \circ \sigma_x^2) + (\Upsilon_\lambda \circ \sigma_x^2)^{\sigma_x^{2\,*}\Pi^*\lambda} = \\
&\text{(N.19.b)} \quad = d\Gamma + \Gamma^{\Gamma(dx)}.
\end{aligned}$$

La expresión anterior en componentes es

$$\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{kl,j} + \Gamma^i_{jp}\Gamma^p_{kl} - \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}.$$

Nota 34 Sea λ una conexión lineal simétrica y sea λ' una conexión lineal cualquiera. Sabemos que el homomorfismo $\sigma_\lambda \in \mathcal{S}(F^2(M))$ induce por imagen directa, a partir de λ', una conexión de segundo orden $\omega_{\lambda,\lambda'} \equiv ((\omega_{\lambda,\lambda'})_0, (\omega_{\lambda,\lambda'})_1)$; por definición (más general que D.15), pues, se tiene

$$\sigma_\lambda{}^*(\omega_{\lambda,\lambda'})_0 = \lambda', \quad \sigma_\lambda{}^*(\omega_{\lambda,\lambda'})_1 = 0$$

(si $\lambda = \lambda'$ se tiene la definición D.15).

Pues bien, se demuestra, análogamente al L.18, que se verifica:

(i) la conexión lineal inducida (D.9) por la de segundo orden $\omega_{\lambda,\lambda'}$ es λ'.

(ii) la conexión de segundo orden $\omega_{\lambda,\lambda'}$ viene dada por (recordar D.14)

$$(\omega_{\lambda,\lambda'})_0 = \Pi^*\lambda', \quad (\omega_{\lambda,\lambda'})_1 = d\Upsilon_\lambda + (\Upsilon_\lambda)^{\Pi^*\lambda'}.$$

Teorema 3 *Sea λ una conexión lineal simétrica. Sea ω_λ la conexión de segundo orden inducida con torsión de segundo orden $\Theta_{\omega_\lambda} \equiv ((\Theta_{\omega_\lambda})_{-1}, (\Theta_{\omega_\lambda})_0)$ y curvatura $\Omega_{\omega_\lambda} \equiv ((\Omega_{\omega_\lambda})_0, (\Omega_{\omega_\lambda})_1)$. Se verifica:*

a. $(\Theta_{\omega_\lambda})_{-1} = 0$.

b. $(\Theta_{\omega_\lambda})_0 = (\Omega_{\omega_\lambda})_0 = \Pi^*(\Omega_\lambda)$.

c. $(\Omega_{\omega_\lambda})_1 = (\Upsilon_\lambda)^{\Pi^*(\Omega_\lambda)}$.

Demostración: (**a**) Es trivial por L.18.a y N.27.b.

(**b**) Basta probar la igualdad sobre vectores horizontales. Si $X, Y \in T_zF^2(M)$ con $\omega_\lambda(X) = 0 = \omega_\lambda(Y)$, se tiene:

$$((\Omega_{\omega_\lambda})_0 - (\Theta_{\omega_\lambda})_0)(X,Y) = (d(\omega_\lambda)_0 - d\theta_0)(X,Y) = \\ \text{(N.33.a)} = (d\Upsilon_\lambda \dot\wedge \theta_{-1} + \Upsilon_\lambda(d\theta_{-1}))(X,Y) = 0;$$

la última igualdad se da ya que, sobre vectores horizontales, $d\Upsilon_\lambda$ se anula (se sigue de la dem. al L.16.b) y $d\theta_{-1}$ también (se sigue de **a**).

La segunda igualdad se sigue de L.18.a y N.27.b.

(**c**) Basta probar la igualdad sobre vectores horizontales. Si $X, Y \in T_zF^2(M)$ con $\omega_\lambda(X) = 0 = \omega_\lambda(Y)$, se tiene:

$$((\Omega_{\omega_\lambda})_1 - (\Upsilon_\lambda)^{(\Omega_{\omega_\lambda})_0})(X,Y) = (d(\omega_\lambda)_1 - (\Upsilon_\lambda)^{d(\omega_\lambda)_0})(X,Y) = \\ \text{(L.18.b)} \quad = (d(\Upsilon_\lambda{}^{(\omega_\lambda)_0}) - (\Upsilon_\lambda)^{d(\omega_\lambda)_0})(X,Y) = \\ = -(d\Upsilon_\lambda \dot\wedge (\omega_\lambda)_0)(X,Y) = 0;$$

la penúltima igualdad se da, ya que se tiene: $\Upsilon_\lambda{}^{(\omega_\lambda)_0} = -\Upsilon_\lambda \dot\wedge (\omega_\lambda)_0$ (donde el producto exterior es la restricción del asociado a la representación adjunta de $\mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n)$; recordar que $t^\alpha = -ad_{(0,t)}(\alpha, 0)$), de donde se deduce (ver I.3.2)

$$d(\Upsilon_\lambda{}^{(\omega_\lambda)_0}) = -d\Upsilon_\lambda \dot\wedge (\omega_\lambda)_0 + (\Upsilon_\lambda)^{d(\omega_\lambda)_0}.$$

Nota 35 Coordenadas de la torsión y curvatura de segundo orden para la conexión ω_λ inducida por una conexión lineal simétrica λ. Sean T^i_{jk}, T^i_{jkl}, R^i_{jkl}, R^i_{jklm}, definidos en N.29,

correspondientes a Θ_{ω_λ} y Ω_{ω_λ}. Por el lema anterior y por la nota N.29, se obtiene

$$\begin{cases} T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0, \\ T^i_{jkl} = R^i_{jkl} = \Gamma^i_{lj,k} - \Gamma^i_{kj,l} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj} - \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kj}, \\ R^i_{jklm} = R^i_{plm}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^i_{jp}R^p_{klm} - \Gamma^i_{pk}R^p_{jlm}. \end{cases}$$

Capítulo V

Fibrados asociados al segundo orden.

En este capítulo estudiamos algunos aspectos de aquellos fibrados asociados al fibrado de referencias de segundo orden, $F^2(M)$, que consideramos más significativos. Previamente, en la sección 1, recordamos las nociones generales sobre fibrados asociados a un fibrado principal, sobre fibrados vectoriales y algunos aspectos de los fibrados asociados al fibrado de referencias lineales.

En la sección 2 estudiamos el fibrado vectorial $T^LM \equiv T(LM)/GL(n)$ de campos de vectores, definidos a lo largo de las fibras de $LM \to M$ y $GL(n)$-invariantes; como se sabe, este fibrado es el elemento central en la secuencia de Atiyah ([Ati]), $0 \to Ad(LM) \to T^LM \to TM \to 0$, cuyas escisiones están en correspondencia biyectiva con las conexiones lineales sobre M. Pues bien, probamos (T.4) que T^LM es isomorfo al fibrado asociado a $F^2(M)$ y a la representación $\mathcal{A}^2$ de $G^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$.

Estudiamos a continuación (Sec.3) el fibrado tangente de segundo orden de M, T^2M, que, como se sabe, es isomorfo a cierto fibrado (no vectorial) asociado a $F^2(M)$ (en [CDL, Sec.10.4] se considera T^2M como fibrado asociado a $F^2(M)$ y se estudian algunas de sus propiedades en relación con conexiones lineales y conexiones de segundo orden; estudios específicos de T^2M, sin referencia a $F^2(M)$, pueden hallarse en [YI1] y [Bow]). En L.25 se explicita este isomorfismo en base a cierta acción por la izquierda de $GL(n) \otimes S^2(n)$ sobre $\mathbf{R}^{2n}$ (D.17). Existe una estrecha relación entre esta acción y la representación $\mathcal{A}^2$, que propicia una interesante aplicación (L.27) entre T^LM y T^2M; los lemas L.28 y L.32 recogen algunas propiedades de esta aplicación. También estudiamos, con el tratamiento de T^2M como fibrado asociado, el resultado conocido ([Bow]) de que una conexión lineal en LM define (L.29) una estructura de fibrado vectorial en T^2M, como suma de Whitney de TM y TM (L.30).

Finalmente (Sec.4), estudiamos algunos aspectos de las conexiones inducidas por una conexión de segundo orden en los fibrados asociados de las secciones 2 y 3; principalmente probamos (L.34) que las conexiones de segundo orden inducidas por conexiones lineales simétricas responden al concepto de conexión de segundo orden llamado en [CDL] "admisible" (N.46). También (4.3) analizamos cómo las formas de torsión y curvatura de una conexión de segundo orden pueden verse como "tensores" sobre M guardando la analogía con lo que se hace para conexiones lineales.

Este capítulo no es estrictamente necesario para los siguientes, aunque ocasionalmente se hace referencia a él.

1 Fibrados asociados.

1.1 Definición y propiedades generales.

Sea $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal. Sea una variedad F y una acción por la izquierda de G sobre F:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & G \times F & \longrightarrow & F \\ & (a, \xi) & \longmapsto & \mathcal{A}_a(\xi) \equiv a\xi. \end{array}$$

Se define ([K-N, p.54], [GHV, II, p.198]) el *fibrado asociado a P y a $\mathcal{A}$*, $\mathcal{A}P \equiv P \times_G F$, como el fibrado sobre M con:

(i) espacio total el conjunto de clases de equivalencia obtenido definiendo en la variedad producto $P \times F$ la relación de equivalencia:

$$(p, \xi) \sim (p', \xi') \;\; sii \;\; \exists a \in G \;:\; (p', \xi') = (pa, a^{-1}\xi).$$

Denotamos por $[p, \xi]$ la clase de equivalencia con representante (p, ξ) (nótese que $[pa, \xi] = [p, a\xi]$),

(ii) proyección

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{A}P & \longrightarrow & M \\ & [p, \xi] & \longmapsto & \pi(p), \end{array}$$

(iii) fibra típica F,

(iv) y trivializaciones locales obtenidas del siguiente modo: para cada trivialización local de P

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & P|_U & \longrightarrow & U \times G \\ & p & \longmapsto & (\pi(p), \psi(p)), \end{array}$$

se define la trivialización local de $\mathcal{A}P$

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{\mathcal{A}P}: & \mathcal{A}P|_U & \longrightarrow & U \times F \\ & [p,\xi] & \longmapsto & (\pi(p), \psi(p)\xi). \end{array}$$

Denotemos por $F_m \equiv \rho^{-1}(m)$ la fibra de $\mathcal{A}P$ sobre $m \in M$. Un elemento $p \in P$ induce un difeomorfismo, que denotaremos por $\hat{p}$, entre la fibra típica F y la fibra F_m de $\mathcal{A}P$ sobre $\pi(p) \equiv m$

$$\begin{array}{rccc} \hat{p}: & F & \longrightarrow & F_m \\ & \xi & \longmapsto & [p,\xi]. \end{array}$$

Obviamente, se verifica $\widehat{pa} = \hat{p} \circ \mathcal{A}_a$.

El conjunto de secciones $Sec(\mathcal{A}P)$ del fibrado asociado $\mathcal{A}P$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto $\overline{\mathcal{F}}(P,F)$ de funciones $f: P \to F$ *equivariantes*, es decir, que verifican la propiedad $f \circ R_a = \mathcal{A}_{a^{-1}} \circ f$.

> En efecto (véase p. ej. [Per, prop.1.4.20]): A una sección $\sigma: M \to \mathcal{A}P$ le corresponde la función $f: P \to F$, $f(p) = \hat{p}^{-1}(\sigma(\pi(p)))$, que verifica la propiedad, pues
>
> $$\hat{p}(f(p)) = \sigma(\pi(p)) = \widehat{pa} f(pa) = \hat{p}(\mathcal{A}_a f(pa)), \Rightarrow \ f(p) = \mathcal{A}_a f(pa).$$
>
> Recíprocamente, a una función $f: P \to F$ (que verifique $f \circ R_a = \mathcal{A}_{a^{-1}} \circ f$) le corresponde la sección $\sigma: M \to \mathcal{A}P$, $\sigma(m) = \hat{p}(f(p))$, con $\pi(p) = m$ (donde la definición no depende del p elegido).

1.2 Fibrados vectoriales.

Si F es un espacio vectorial y la acción $\mathcal{A}$ es una representación de G en F, el fibrado $\mathcal{A}P$ que se obtiene se llama el *fibrado vectorial asociado a P y a $\mathcal{A}$*. En este caso, en las fibras se induce una estructura de espacio vectorial y los difeomorfismos $\hat{p}$ resultan ser isomorfismos lineales (véase [K-N, p.113]).

Una definición independiente de fibrado vectorial es la siguiente (véase por ejemplo [GHV, I, p.44]). Un fibrado $\mathcal{V}$ con base M, proyección ρ, y fibra típica F es un *fibrado vectorial* si F y la fibra F_m de $\mathcal{V}$ sobre m, $\forall\, m \in M$, son espacios vectoriales y si $\mathcal{V}$ admite un sistema de trivializaciones locales tal que, para cada una de ellas $\Psi: \mathcal{V}|_U \to U \times F$ y para cada $m \in U$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} F_m & \longrightarrow & F \\ X & \longmapsto & \Psi(X) \end{array}$$

es un isomorfismo lineal.

Un fibrado vectorial asociado a P y a $\mathcal{A}$ es un fibrado vectorial, según esta última definición. Recíprocamente, dado un fibrado vectorial $\mathcal{V}(M,F)$ se puede construir ([GHV, II, Sec.5.1, ex.3]) un fibrado principal con base M, grupo de estructura $GL(F)$ y donde, $\forall\, m \in M$, la fibra sobre m está constituida por todos los isomorfismos lineales de F en F_m (o equivalentemente por todas las bases de F_m). Resulta que $\mathcal{V}(M,F)$ es canónicamente isomorfo al fibrado vectorial asociado a este fibrado principal y a la acción natural de $GL(F)$ sobre F (o representación identidad de $GL(F)$ en F).

Un *homomorfismo de fibrados vectoriales* es una aplicación fibrada (ver I.3.1) entre fibrados vectoriales que, restringida a las fibras, da homomorfismos lineales. Diremos que es un *monomorfismo, epimorfismo* o *isomorfismo*, según que los homomorfismos lineales inducidos en las fibras sean todos inyectivos, sobreyectivos o biyectivos, respectivamente. Un isomorfismo de fibrados vectoriales es necesariamente un difeomorfismo ([GHV, I, p.45]).

Dado un fibrado vectorial $\mathcal{V}(M,F)$ se puede construir ([GHV, I, Sec.2.10]) el fibrado vectorial $End\mathcal{V}$ con base M y fibra típica $\mathfrak{gl}(F)$, donde, $\forall\, m \in M$, la fibra $End_m\mathcal{V}$ sobre m está constituida por todos los endomorfismos lineales de F_m en sí mismo (es decir, la fibra sobre m es $End_m\mathcal{V} \equiv \mathfrak{gl}(F_m)$).

1.3 Sobre algunos fibrados asociados importantes.

(a) Sea $P(M,G)$ un fibrado principal. Sea $h : G \to G'$ un homomorfismo de grupos de Lie. Se define la acción por la izquierda $\mathcal{A}^h$ de G en G' dada por $\mathcal{A}^h_a(a') := h(a)a'$, $\forall\, a \in G$, $a' \in G'$; y se obtiene el fibrado asociado $\mathcal{A}^hP$. El fibrado asociado $\mathcal{A}^hP$ admite ([GHV, II, 5.5 ex.4]) una acción de G' por la derecha canónicamente definida que hace de él un fibrado principal de base M y grupo de estructura G', llamado en [GHV, II, p.201] *h-extensión* de $P(M,G)$; nosotros reservaremos este nombre para el caso en que h sea un monomorfismo (véase [Per, p.24]). En caso de tomar $h = id_G$, la acción $\mathcal{A}^h$ que resulta es la multiplicación por la izquierda en el grupo, y el fibrado principal que se obtiene del fibrado asociado $\mathcal{A}^hP$ es trivialmente isomorfo al propio fibrado principal P ([GHV, II, 5.5 ex.4]).

(b) Otra situación es la siguiente (véase [Leh, p.107]): Sea un homomorfismo $\mathcal{H} : G \to Aut(G')$, que define, obviamente, una acción por la izquierda de G en G', que denotaremos también por $\mathcal{H}$. Se obtiene el fibrado asociado $\mathcal{H}P$, en el que cada fibra está dotada de forma natural de una estructura de grupo de Lie isomorfo (no canónicamente; via $\hat{p}^{-1}$, para cada $p \in P$) a G'.

> La operación en cada fibra vendría dada por $[p,a'] \cdot [p,b'] := [p,a'b']$; lo que es independiente del representante pues
>
> $$[pa, \mathcal{H}_{a^{-1}}(a')] \cdot [pa, \mathcal{H}_{a^{-1}}(b')] = [pa, \mathcal{H}_{a^{-1}}(a')\mathcal{H}_{a^{-1}}(b')] = [pa, \mathcal{H}_{a^{-1}}(a'b')].$$

En particular, el homomorfismo Int de G en los automorfismos internos de G da lugar al fibrado $IntP$ asociado a P y a Int. A la fibra de $IntP$ sobre cada $m \in M$, que denotaremos por Int_mP, se la puede dotar de una estructura de grupo de Lie isomorfo (no canónicamente) a G. De todas formas, $IntP$ no tiene, en general, estructura de fibrado principal ([GHV, II, p.229, prob.4]). Es interesante notar aquí que ([Per, p.23]) el conjunto $Sec(IntP)$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto $Aut_{id}(P)$ (ver I.3.1) de automorfismos verticales de P.

> En efecto: Una sección $\sigma : M \to IntP$ se corresponde biunívocamente con (ver 1.1) una función $f : P \to G$ verificando $f(pa) = a^{-1}f(p)a$. Ahora bien, dada $f : P \to G$ con la propiedad mencionada, podemos definir unívocamente $\varphi : P \to P$, $p \mapsto pf(p)$, que es un automorfismo (pues $\varphi(pa) = (pa)f(pa) = (pa)(a^{-1}f(p)a) = pf(p)a = \varphi(p)a$), obviamente vertical. Recíprocamente, dado $\varphi \in Aut_{id}(P)$ podemos definir unívocamente la función $f : P \to G$ por la condición $\varphi(p) = pf(p)$, verificando $f(pa) = a^{-1}f(p)a$ (pues $(pa)f(pa) = \varphi(pa) = \varphi(p)a = pf(p)a = (pa)(a^{-1}f(p)a)$).

(c) Otro fibrado asociado a P es el obtenido de la acción de G en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dada por la representación adjunta

$$\begin{array}{rccc} Ad: & G \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & (g, \alpha) & \longmapsto & Ad_g(\alpha) := Int_{g*}|_e(\alpha), \end{array}$$

siendo $e \in G$ el elemento identidad de G. Lo podemos denotar por AdP. AdP es un fibrado vectorial asociado a P y a Ad (ver 1.2), que se llama *fibrado adjunto* a P. A la fibra de AdP sobre cada $m \in M$, que denotaremos por Ad_mP, se la puede dotar de una estrucura de álgebra de Lie isomorfa (no canónicamente) a $\mathfrak{g}$.

> En efecto: Sea $\bar{\rho}$ la proyección $AdP \to M$. Denotemos por $\bar{\bar{p}}$ el isomorfismo lineal (ver 1.1) inducido por $p \in P$ $(\pi(p) \equiv m)$
>
> $$\begin{array}{rccc} \bar{\bar{p}}: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \bar{\rho}^{-1}(m) \equiv Ad_mP \\ & \alpha & \longmapsto & [p, \alpha], \end{array}$$
>
> que *no* es, en general, independiente de $p \in P$. Definimos en Ad_mP el corchete $[[p, \alpha], [p, \beta]] := [p, [\alpha, \beta]]$ que dota a Ad_mP de una estructura de álgebra de Lie, y hace de $\bar{\bar{p}}$ un isomorfismo de álgebras de Lie. Esta estructura es independiente del representante elegido, pues
>
> $$\begin{aligned} [[pa, Ad_{a^{-1}}\alpha], [pa, Ad_{a^{-1}}\beta]] &= [pa, [Ad_{a^{-1}}\alpha, Ad_{a^{-1}}\beta]] = \\ &= [pa, Ad_{a^{-1}}[\alpha, \beta]] = [p, [\alpha, \beta]] = [[p, \alpha], [p, \beta]]. \end{aligned}$$

Puede establecerse un isomorfismo *canónico* entre el álgebra de Lie de cada fibra Int_mP de $IntP$ (ver **b**) y la correspondiente fibra Ad_mP de AdP.

En efecto: Sea $\hat{p} : G \to Int_m P$, $\hat{p}(a) = [p, a]$, el isomorfismo de grupos inducido por $p \in P$. Entonces $\hat{p}_*|_e : \mathfrak{g} \to \underline{Int_m P}$, con $\underline{Int_m P}$ el álgebra de Lie de $Int_m P$, es un isomorfismo de álgebras de Lie. Se sigue que $\hat{p}_*|_e \circ \bar{\hat{p}}^{-1} : Ad_m P \to Int_m P$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Además, no depende del p escogido, con $\pi(p) = m$, pues se verifica $\hat{p}_*|_e \circ \bar{\hat{p}}^{-1} = \hat{q}_*|_e \circ \bar{\hat{q}}^{-1}$, siendo $q = pa$; veámoslo:

$$\begin{array}{rcl} (\hat{q}_*|_e \circ \bar{\hat{q}}^{-1})([p,\alpha]) & = & \hat{q}_*|_e(\bar{\hat{q}}^{-1}([pa, Ad_{a^{-1}}\alpha])) = \hat{q}_*|_e(Ad_{a^{-1}}\alpha) = \\ (1.1) & = & (\hat{p} \circ Int_a)_*|_e(Ad_{a^{-1}}\alpha) = (\hat{p}_*|_e \circ Ad_a)(Ad_{a^{-1}}\alpha) = \\ & = & \hat{p}_*|_e(\alpha) = \hat{p}_*|_e(\bar{\hat{p}}^{-1}([p,\alpha])). \end{array}$$

1.4 Conexiones inducidas en fibrados asociados.

(a) Sea $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal y sea ω una conexión en P. Sea $\mathcal{A}P$ un fibrado asociado a P y a $\mathcal{A}$, con fibra típica F y proyección ρ. Para cada $\xi \in F$ definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \breve{\xi}: & P & \longrightarrow & \mathcal{A}P \\ & p & \longmapsto & [p, \xi]. \end{array}$$

Se verifica $(a\xi)^{\breve{}} = \breve{\xi} \circ R_a$. La conexión ω induce una conexión en el fibrado asociado $\mathcal{A}P$ en el sentido siguiente ([K-N, p.87]): Fijado $\xi \in F$, la distribución $\{H_p : p \in P\}$ de los subespacios ω-horizontales es aplicada, mediante la aplicación tangente de $\breve{\xi}$, en una distribución $\{H_{[p,\xi]} \equiv \breve{\xi}_*(H_p) : p \in P\}$ de subespacios en $T(\mathcal{A}P)$ (la distribución obtenida es independiente de la $\xi \in F$ elegida, ya que $(a\xi)^{\breve{}} = \breve{\xi} \circ R_a$), que definen los subespacios horizontales de la llamada *conexión inducida por ω en $\mathcal{A}P$*, y que llamaremos *subespacios ω-horizontales en $\mathcal{A}P$*.

Sea $\gamma : \mathcal{J} \to M$ una curva en M. Un *alzado ω-horizontal de γ a $\mathcal{A}P$* es una curva γ' en $\mathcal{A}P$ tal que $\rho \circ \gamma' = \gamma$ y $\gamma'_*\tau \in H_{\gamma'\tau}$, $\forall\, \tau \in \mathcal{J}$. Dado $[p, \xi] \in \mathcal{A}P$ con $\gamma 0 = \rho([p, \xi])$, existe un único alzado ω-horizontal γ' de γ a $\mathcal{A}P$ tal que $\gamma' 0 = [p, \xi]$, y viene dado por $\gamma' = [\gamma_\omega, \xi] = \breve{\xi}(\gamma_\omega)$, siendo (ver I.3.3) γ_ω el alzado ω-horizontal de γ a P tal que $\gamma_\omega 0 = p$ (nótese que $\gamma'_* = \breve{\xi}_*(\gamma_{\omega *})$). Si γ_ω es un alzado ω-horizontal de γ a P, entonces, para cada $\xi \in F$, la curva en $\mathcal{A}P$ $[\gamma_\omega, \xi]$ es un alzado ω-horizontal de γ a $\mathcal{A}P$. Además, fijando γ_ω y variando ξ, se obtienen así todos los posibles alzados ω-horizontales de γ a $\mathcal{A}P$.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ (campo de vectores sobre M). El *alzado ω-horizontal de X a $\mathcal{A}P$* es el único campo X' sobre $\mathcal{A}P$ tal que $\rho_* \circ X' = X \circ \rho$ y $X'|_{[p,\xi]} \in H_{[p,\xi]}$, $\forall\, [p, \xi] \in \mathcal{A}P$. Sea X_ω el alzado ω-horizontal de X a P (ver I.3.3). Entonces $X' := \breve{\xi}_* \circ X_\omega$ es el alzado ω-horizontal de X a $\mathcal{A}P$ (que no depende de $\xi \in F$). Las curvas integrales de X' son, obviamente, alzados ω-horizontales a $\mathcal{A}P$ de las curvas integrales de X.

Sea $\sigma : M \to \mathcal{A}P$ una sección de $\mathcal{A}P$. Diremos que σ es *ω-horizontal* si $\sigma_*(T_mM) = H_{\sigma(m)}$, $\forall m \in M$; y diremos que σ es *ω-horizontal según* $X \in \mathfrak{X}(M)$ si $\sigma_*(X|_m) \in H_{\sigma(m)}$, $\forall m \in M$ (esto ocurre si $\sigma_* \circ X = X' \circ \sigma$, con X' el alzado ω-horizontal de X a $\mathcal{A}P$).

(b) Sea $\mathcal{V}(M,F)$ un fibrado vectorial. Denotemos por $\Lambda^r(M,\mathcal{V})$ $(r \geq 0)$ el conjunto de *formas diferenciales de grado r (r-formas) $\mathcal{V}$-valuadas sobre M* (véase [GHV, II, Sec.7.1]).

Una *conexión vectorial en* $\mathcal{V}(M,F)$ es ([GHV, II, Sec.7.11]) una aplicación **R**-lineal

$$\begin{array}{rccccl} \nabla : & Sec(\mathcal{V}) & \longrightarrow & \Lambda^1(M,\mathcal{V}) & & \\ & \sigma & \longmapsto & \nabla\sigma\,, & \text{con } \nabla\sigma : & T_mM \to F_m \\ & & & & & Y \mapsto \nabla\sigma(Y) \equiv \nabla_Y\sigma, \end{array}$$

tal que $\nabla_Y(f\sigma) = Y(f)\sigma(m) + f(m)\nabla_Y\sigma$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, $\forall m \in M$, $\forall Y \in T_mM$.

(c) Sea $P(M,G)$ un fibrado principal, $\mathcal{A}$ una representación de G en F y $\mathcal{A}P$ el fibrado vectorial asociado a P y a $\mathcal{A}$. Sea ω una conexión en $P(M,G)$. Entonces se puede definir ([Kos, Th.3, p.93]) una conexión vectorial ∇ en $\mathcal{A}P$ (*inducida por* ω) construida (véase [K-N, p.114]) a partir del transporte paralelo relativo a ω de fibras de $\mathcal{A}P$ a lo largo de curvas en M. Se puede probar ([Kos, Th.5, p.98]) que $(\forall \sigma \in Sec(\mathcal{A}P),\ \forall Y \in T_mM)$

$$\nabla_Y\sigma = 0 \iff \sigma_*Y \in H_{\sigma(m)}.$$

Se deduce (ver **(a)**) que una sección $\sigma \in Sec(\mathcal{A}P)$ es ω-horizontal si y solo si $\nabla_Y\sigma = 0$, $\forall Y \in TM$; y σ es ω-horizontal según $X \in \mathfrak{X}(M)$ si y sólo si $\nabla_{X|_m}\sigma = 0$, $\forall m \in M$.

Nosotros no usaremos explícitamente en este trabajo las conexiones vectoriales.

1.5 Sobre los fibrados asociados a LM.

(a) El fibrado vectorial asociado a LM y a la representación natural de $GL(n)$ en $\mathbf{R}^n$ es isomorfo, de manera canónica y obvia, al *fibrado tangente* TM, haciendo corresponder a la clase $[l,v]$, para $l \in LM$ y $v \in \mathbf{R}^n$, el vector tangente $l(v)$ (ver I.4.1). Identificaremos ambos fibrados. Para este fibrado asociado, la aplicación $\hat{l}$ no es otra que la propia l.

Sea γ una curva en M. Dada una conexión λ en LM, el *alzado λ-horizontal de γ a LM* (ver I.3.3), *con condición inicial* l, es la curva γ_λ en LM determinada, unívocamente, por las condiciones $(\forall \tau \in \mathcal{J})$:

$$\pi^L \circ \gamma_\lambda = \gamma, \quad \lambda(\gamma_{\lambda *}\tau) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_\lambda 0 = l.$$

Sea una carta dada (x, U) en M, con $\gamma(\mathcal{J}) \subset U$, y sea (x_{-1}, x_0) la carta inducida en LM. Resultará útil usar las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^x &:= \frac{d(x \circ \gamma)}{du}, & \ddot{\gamma}^x &:= \frac{d^2(x \circ \gamma)}{du^2}; \\ \gamma^x_{-1} &:= x_{-1} \circ \gamma_\lambda = x \circ \gamma, & \gamma^x_0 &:= x_0 \circ \gamma_\lambda; \\ \dot{\gamma}^x_{-1} &:= \frac{d(x_{-1} \circ \gamma_\lambda)}{du} = \dot{\gamma}^x, & \dot{\gamma}^x_0 &:= \frac{d(x_0 \circ \gamma_\lambda)}{du}. \end{aligned}$$

Entonces las curvas γ_* y $\gamma_{\lambda *}$ de vectores tangentes se escriben en coordenadas

$$\begin{aligned} \gamma_* &= \dot{\gamma}^x \, \partial_x|_\gamma \\ \gamma_{\lambda *} &= \dot{\gamma}^x_{-1} \, \partial_{x_{-1}}|_{\gamma_\lambda} + \dot{\gamma}^x_0 \, \partial_{x_0}|_{\gamma_\lambda}. \end{aligned}$$

Y la ecuación $\lambda(\gamma_{\lambda *}) = 0$ se escribe

$$(\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x)\gamma^x_0 + \dot{\gamma}^x_0 = 0, \tag{1}$$

siendo Γ la función de coeficientes de λ en la carta (x, U).

El *alzado λ-horizontal de γ a TM* (ver 1.4), *con condición inicial* $[l, v] \equiv l(v)$, es la curva en TM $[\gamma_\lambda, v]$, con γ_λ como arriba.

Se obtiene que $[\gamma_\lambda, v] = [\sigma^L_x \circ \gamma, \gamma^x_0 v]$, con σ^L_x la sección de $LM|_U \to U$ inducida por la carta (x, U) (dado que $\gamma_\lambda = (\sigma^L_x \circ \gamma)\gamma^x_0$; ver I.4.2).

La curva γ es una *geodésica respecto de* λ si $\gamma_* = [\gamma_\lambda, v]$, con $v \in \mathbf{R}^n$ tal que $\gamma_* 0 = [\gamma_\lambda 0, v] \equiv \gamma_\lambda 0(v)$. Esta definición coincide con la dada en los textos por medio de la conexión vectorial ∇ inducida por λ en TM.

En efecto: Sabemos que $\gamma_* = [\sigma^L_x \circ \gamma, \dot{\gamma}^x]$. Por tanto, una curva γ es geodésica respecto de λ si y solo si $\dot{\gamma}^x = \gamma^x_0 v$, para algún $v \in \mathbf{R}^n$; si y solo si $(\gamma^x_0)^{-1}\dot{\gamma}^x = v$ para algún $v \in \mathbf{R}^n$; si y solo si $\frac{d}{du}((\gamma^x_0)^{-1}\dot{\gamma}^x) = 0$. Ahora, como

$$\frac{d}{du}((\gamma^x_0)^{-1}\dot{\gamma}^x) = -(\gamma^x_0)^{-1}\dot{\gamma}^x_0(\gamma^x_0)^{-1}\dot{\gamma}^x + (\gamma^x_0)^{-1}\ddot{\gamma}^x,$$

usando la ecuación (1) queda que γ es geodésica respecto de λ si y solo si

$$\ddot{\gamma}^x + (\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) = 0.$$

Un campo de vectores X sobre M es una sección del fibrado TM; entonces se dice que X es un *campo λ-paralelo* si X es una sección λ-horizontal, esto es (1.4(a)), si $X_*(T_m M) = H_{X(m)}$, $\forall m \in M$, o lo que es lo mismo (1.4(c)), $\nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in TM$.

Sea Sea (x, U) una carta en M, y sea Γ la función de coeficientes de λ en x. Sea $X|_U = \vartheta\,\partial_x$ con $\vartheta : U \to \mathbf{R}^n$. La condición, en la carta (x, U), para que X sea λ-paralelo es (véase, por ejemplo, [K-N, p.144])

$$D(\vartheta \circ x^{-1})|_{x(m)} = -\Gamma|_m(\cdot, \vartheta(m)), \quad \forall\, m \in U.$$

(b) El fibrado asociado $IntLM$ (ver 1.3(b)) se puede identificar con el conjunto $\bigcup_{m\in M} GL(T_mM)$ haciendo corresponder a la clase $[l, a]$, para $l \in LM$ y $a \in GL(n)$, el isomorfismo lineal lal^{-1} de $T_{\pi^L(l)}M$ en sí mismo (a la inversa, dado $d \in GL(T_mM)$, el valor que toma en la referencia l es $l^{-1}dl \in GL(n)$). Para este fibrado asociado es $\hat{l} : GL(n) \to GL(T_mM)$, $a \mapsto lal^{-1}$.

(c) El *fibrado adjunto a* LM, $AdLM$ (ver 1.3(c)), se puede identificar (véase [Ati, Pr.9]) con el fibrado vectorial $EndTM$, haciendo corresponder a la clase $[l, \alpha]$, para $l \in LM$ y $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$, el endomorfismo lineal $l\alpha l^{-1}$ de $T_{\pi^L(l)}M$ (a la inversa, dado $\delta \in \mathfrak{gl}(T_mM)$, el valor que toma en la referencia l es $l^{-1}\delta l \in \mathfrak{gl}(n)$). Para este fibrado asociado es $\hat{l} : \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(T_mM)$, $\alpha \mapsto l\alpha l^{-1}$.

2 El fibrado asociado a $F^2(M)$ y a $\mathcal{A}^2$.

Sea $P(M, G)$ un fibrado principal y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Se sabe (véase [Ati, p.186]) que el fibrado TP/G, constituido por todos los campos de vectores, definidos a lo largo de las fibras de P y que son invariantes bajo la acción de G, es un fibrado vectorial de fibra típica $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}$. También se sabe que existe una secuencia exacta de fibrados vectoriales ([Ati, Th.1]; véase también [Kos, p.85 y sgts.]; una generalización para órdenes superiores puede hallarse en [Lib])

$$0 \longrightarrow AdP \longrightarrow TP/G \longrightarrow TM \longrightarrow 0;$$

y que las escisiones $TM \to TP/G$ de esta secuencia están en correspondencia biyectiva con las conexiones en P. En el apartado 2.1 de esta sección seguiremos detalladamente este proceso para el caso del fibrado LM, construyendo explícitamente el fibrado vectorial $TLM/GL(n)$, que denotaremos por T^LM (L.19), dando la secuencia exacta correspondiente (L.20) y estableciendo la correspondencia biyectiva entre las escisiones de esta secuencia y las conexiones lineales sobre M (L.21), que a su vez permiten expresar (L.22) T^LM como suma de Whitney $TM \oplus AdLM$. En el apartado 2.2 se establece (T.4) un isomorfismo canónico de fibrados vectoriales entre $\mathcal{A}^2F^2(M)$ y T^LM; también se comenta (N.38.d) la relación que hay entre considerar las conexiones lineales sobre M como escisiones de la secuencia exacta antes citada y considerarlas como secciones de un cierto fibrado asociado a $F^2(M)$ (véase [FFR]). En el

apartado 2.3 se estudian las secciones de T^LM inducidas por campos de vectores sobre M; por último se comenta (L.24) la condición para que, dada una conexión lineal simétrica sobre M, los alzados natural y λ-horizontal a LM de un campo sobre M coincidan.

2.1 El fibrado vectorial T^LM.

Definimos en TLM, el fibrado tangente de LM, la relación de equivalencia

$$W \sim W' \ \ sii \ \ \exists a \in GL(n) \ : \ R^L_{a*}W = W'.$$

Denotaremos por $T^LM \equiv TLM/GL(n)$ el conjunto de clases de equivalencia por la relación anterior, y por $[W] \in T^LM$ la clase de equivalencia con representante W. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \rho^L : & T^LM & \longrightarrow & M \\ & [W] & \longmapsto & \pi^L(l) \quad \text{si} \ \ W \in T_lLM; \end{array}$$

y denotemos $T^L_mM \equiv \rho^{L-1}(m)$. Dotemos a T^L_mM de la estructura natural de espacio vectorial que hace de la aplicación $T_lLM \to T^L_mM$, $W \mapsto [W]$ un isomorfismo lineal (que es, obviamente, independiente de l, con $\pi^L(l) = m$).

Lema 19 *T^LM es un fibrado vectorial con base M proyección ρ^L y fibra típica* $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$.

> **Demostración:** Aunque se trata de un resultado conocido (véase [Ati]) vamos a dar en detalle la demostración, que será de utilidad posteriormente.
>
> Dada una carta (x, U) en M definamos la aplicación
>
> $$\begin{array}{rccl} \overline{\Psi}_x : & T^LM|_U & \longrightarrow & U \times (\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \\ & [W] & \longmapsto & (\pi^L(l), (\theta^L, \lambda_x)(R^L_{x_0(l)^{-1}*}W)) \ \text{si} \ \ W \in T_lLM; \end{array}$$
>
> que está bien definida pues $R^L_{x_0(la)^{-1}*}R^L_{a*}W = R^L_{x_0(l)^{-1}*}W$. Se tiene que $(\theta^L, \lambda_x) : T_lLM \to \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ es una biyección, con lo que la aplicación $\overline{\Psi}_x$ es una biyección.
>
> Dada otra carta (x', U') se obtiene que
>
> $$\begin{array}{l} \overline{\Psi}_{x'} \circ \overline{\Psi}_x^{-1} : (U \cap U') \times (\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \longrightarrow (U \cap U') \times (\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \\ \qquad\qquad (m, (v, \alpha)) \longmapsto (m, (a_m v, a_m(t_m(v) + \alpha)a_m^{-1})), \end{array}$$

siendo $a_m \equiv D(x' \circ x^{-1})|_{x(m)}$ y $t_m \equiv D(x \circ x'^{-1})|_{x'(m)} D^2(x' \circ x^{-1})|_{x(m)}$. En efecto, basta tener en cuenta que

$$\begin{cases} \overline{\Psi}_x^{-1}(m,(v,\alpha)) = (B^{\lambda_x}(v) + \alpha^\sharp)|_{\sigma_x^L(m)} \text{ (por definición de } \overline{\Psi}_x), \\ x_0'(\sigma_x^L(m)) = x_0(\sigma_x^L(m))\, a_m = a_m \text{ (ver I.4.2)}, \\ R_{a_m^{-1}*}(B^{\lambda_x}(v)|_{\sigma_x^L(m)}) = B^{\lambda_x}(a_m v)|_{\sigma_{x'}^L(m)} \text{ (ver I.4.1)}, \\ R_{a_m^{-1}*}(\alpha^\sharp|_{\sigma_x^L(m)}) = (a_m \alpha a_m^{-1})^\sharp|_{\sigma_{x'}^L(m)} \text{ (ver I.4.1)}; \end{cases}$$

y, además, que

$$\lambda_{x'}(B^{\lambda_x}(a_m v)|_{\sigma_{x'}^L(m)}) = \text{(I.4.2)} \; -\Gamma|_m(a_m v) = a_m t_m(v) a_m{}^{-1},$$

(la última igualdad se sigue de [K-N, p.141]; ver dem. al L.9) siendo Γ los coeficientes de λ_x en la carta x'. Se ve fácilmente que $\overline{\Psi}_{x'} \circ \overline{\Psi}_x^{-1}$ es un difeomorfismo. Por tanto, podemos dotar a $T^L M$ de la estructura diferenciable que hace de las biyecciones $\overline{\Psi}_x$ difeomorfismos; resulta, entonces, que $T^L M$ tiene una estructura de fibrado con proyección ρ^L y con trivializaciones locales $\overline{\Psi}_x$.

Además, como $(\theta^L, \lambda_x) : T_l LM \to \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ es un isomorfismo lineal, la aplicación $\overline{\Psi}_x$ restringida a la fibra $T_m^L M$ es un isomorfismo lineal. El resultado se sigue (ver 1.2).

Nota 36 Coordenadas en $T^L M$. Dada una carta (x, U) en M la carta inducida en $T^L M$ es

$$(x, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0) := (x, id|_{\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)}) \circ \overline{\Psi}_x : T^L M|_U \longrightarrow \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)).$$

Escribiremos en componentes $\tilde{x}_{-1} \equiv (\tilde{x}^i)$ y $\tilde{x}_0 \equiv (\tilde{x}^i_j)$.

Se tienen los siguientes lemas (véase [Ati, Th.1]; [Kos, p.85 y ss]).

Lema 20 *Si definimos los homomorfismos de fibrados vectoriales*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{j}: & AdLM & \longrightarrow & T^L M \\ & [l,\alpha] & \longmapsto & [\alpha^\sharp|_l], \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \mathfrak{r}: & T^L M & \longrightarrow & TM \\ & [W] & \longmapsto & \pi^L{}_*(W), \end{array}$$

obtenemos la siguiente secuencia exacta de fibrados vectoriales

$$0 \longrightarrow AdLM \xrightarrow{\mathfrak{j}} T^L M \xrightarrow{\mathfrak{r}} TM \longrightarrow 0.$$

Demostración: La aplicación $\mathfrak{j}$ está bien definida pues (ver en I.4.1) $\alpha^\sharp|_l = R^L_{a^{-1}*}((a^{-1}\alpha a)^\sharp|_{la^{-1}})$; y la aplicación $\mathfrak{r}$ también lo está pues $\pi^L \circ R_a^L = \pi^L$. Obviamente, $\mathfrak{j}$ es un monomorfismo de fibrados vectoriales y $\mathfrak{r}$ un epimorfismo. Por último, sobre cada fibra, es claro que $Ker\, \mathfrak{r} = Im\, \mathfrak{j}$.

Lema 21

a. *Existe una correspondencia biyectiva natural entre el conjunto de conexiones lineales sobre M y el conjunto de las* escisiones *de la secuencia exacta del* lema L.20 *(esto es, monomorfismos $\mathfrak{s} : TM \to T^LM$ tales que $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{s} = id_{TM}$).*

b. *La escisión correspondiente a la conexión lineal λ es*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{s}_\lambda : & TM & \longrightarrow & T^LM \\ & [l,v] & \longmapsto & [B^\lambda(v)|_l] \end{array}$$

(TM está tratado como un fibrado asociado, ver 1.5(a)).

$$0 \longrightarrow AdLM \xrightarrow{\mathrm{j}} T^LM \underset{\mathfrak{s}_\lambda}{\overset{\mathfrak{r}}{\rightleftarrows}} TM \longrightarrow 0.$$

Demostración: (véase [Ati]; [Kos, Theo.2, p.88]) La parte **a** se sigue de:

(i) Sea $\mathfrak{s} : TM \to T^LM$ un monomorfismo, entonces $\mathfrak{s}(T_mM)$ es un subespacio n-dimensional en T^L_mM, que a su vez genera, $\forall\, l \in \pi^{L^{-1}}(m)$, un subespacio n-dimensional en T_lLM; los subespacios generados para los distintos $l \in \pi^{L-1}(m)$ son llevados unos en otros por R^L_{a*}, $\forall\, a \in GL(n)$. Si, además, $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{s} = id_{TM}$ entonces estos subespacios son transversales a las fibras de LM. Se sigue que $\mathfrak{s}$ induce una distribución de subespacios que definen una conexión en LM.

(ii) Recíprocamente, sea λ una conexión lineal. Sea $X \in T_mM$ y sea $W \in T_lLM$ un vector λ-horizontal tal que $\pi^L_*W = X$, que siempre existe y es único para cada l con $\pi^L(l) = m$. Entonces $\mathfrak{s}_\lambda(X) := [W]$ está bien definido porque $R^L_{a*}W$ sigue siendo λ-horizontal y $\pi^L_*R^L_{a*}W = X$. Se verifica, obviamente, que $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{s}_\lambda = id_{TM}$.

La parte **b** es inmediata. Obsérvese que, si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathfrak{s}_\lambda(X|_m) = [X_\lambda|_l]$, siendo X_λ el alzado λ-horizontal de X a LM (ver I.3.3) y $\pi^L(l) = m$.

Lema 22 *Una conexión lineal permite expresar T^LM como suma directa (suma de Whitney) de TM y $AdLM$. Escribiremos $T^LM = TM \oplus_\lambda AdLM$.*

Demostración: Definamos la aplicación fibrada (que resulta un monomorfismo)

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{q}_\lambda : & T^LM & \longrightarrow & AdLM \\ & [W] & \longmapsto & [l, \lambda(W)], \end{array}$$

para $W \in T_l LM$. Está bien definida pues $[l, \lambda(W)] = [la, Ad_{a^{-1}}\lambda(W)] = [la, \lambda(R^L_{a*}W)]$. Se comprueba inmediatamente que se verifican las condiciones:

$$\mathfrak{r} \circ \mathfrak{s}_\lambda = id|_{TM}, \qquad \mathfrak{q}_\lambda \circ \mathfrak{j} = id|_{AdLM},$$
$$\mathfrak{q}_\lambda \circ \mathfrak{s}_\lambda = 0, \qquad \mathfrak{r} \circ \mathfrak{j} = 0;$$

y que

$$\mathfrak{s}_\lambda \circ \mathfrak{r} + \mathfrak{j} \circ \mathfrak{q}_\lambda = id_{T^L M}.$$

Para cada $m \in M$, resulta $T^L_m M = \mathfrak{s}_\lambda(T_m M) \oplus \mathfrak{j}(Ad_m LM)$.

Se obtiene el diagrama

$$0 \longrightarrow AdLM \underset{\mathfrak{q}_\lambda}{\overset{\mathfrak{j}}{\rightleftarrows}} T^L M \underset{\mathfrak{s}_\lambda}{\overset{\mathfrak{r}}{\rightleftarrows}} TM \longrightarrow 0,$$

que en ambos sentidos es de secuencias exactas.

Nota 37

a. En particular se verifica, para cada $z \in F^2(M)$, con $\pi(z) = m$, $T^L_m M = \mathfrak{s}_\lambda(T_m M) \oplus \mathfrak{j}(Ad_m LM) \equiv T_m M \oplus_\lambda Ad_m LM$, siendo $\lambda \in \mathcal{C}_z$. Esta descomposición es independiente de la λ escogida.

b. Sea λ una conexión lineal simétrica y sea $\sigma_\lambda : LM \to F^2(M)$ la sección en $\mathcal{S}(F^2(M))$ asociada (ver Cap.IV, L.17). Entonces el monomorfismo correspondiente a λ es $\mathfrak{s}_\lambda : [l, v] \mapsto [\sigma_\lambda(l)(v, 0)]$.

Es inmediato, pues se tiene (ver dem. a L.17.a) $\sigma_\lambda(l)(v, 0) = B^\lambda(v)|_l$.

c. Sea λ una conexión lineal sobre LM. Sea una sección $X \in Sec(TM)$ (un campo de vectores sobre M) y sea X_λ el alzado λ-horizontal de X a LM (ver I.3.3); entonces, por construcción, $\mathfrak{s}_\lambda(X|_m) = [X_\lambda|_l]$, con $\pi^L(l) = m$. Se sigue del lema que una sección $Z \in Sec(T^L M)$ induce unívocamente dos secciones $X \in Sec(TM)$ y $A \in Sec(AdLM)$, tales que $Z(m) = [X_\lambda|_l] + \mathfrak{j}(A(m))$, con $\pi^L(l) = m$.

Veamos la expresión de X_λ en coordenadas. Sea (x, U) una carta en M y (x_{-1}, x_0) la carta inducida en LM. Sea $X \in Sec(TM)$, con $X|_U = \vartheta\, \partial_x$, siendo $\vartheta : U \to \mathbf{R}^n$. Entonces

$$X_\lambda|_{LM|_U} = (\vartheta \circ \pi^L)\partial_{x_{-1}} - (\Gamma \circ \pi^L)(\vartheta \circ \pi^L)x_0\, \partial_{x_0}.$$

En efecto: Como (ver I.3.3) $\pi^L_*(X_\lambda|_l) = X|_{\pi^L(l)}$, $\forall\, l \in LM$, X_λ será de la forma $X_\lambda|_{LM|_U} = (\vartheta \circ \pi^L)\partial_{x_{-1}} + \alpha\, \partial_{x_0}$, para cierta función $\alpha : LM|_U \to \mathfrak{gl}(n)$. Por otro lado, como debe ser $\lambda(X_\lambda|_l) = 0$, $\forall\, l \in LM$, usando la expresión en coordenadas de λ (ver I.4.2), se encuentra para α el valor dado arriba.

2.2 Isomorfimo canónico de T^LM y $\mathcal{A}^2F^2(M)$.

Sea $\mathcal{A}^2F^2(M)$ el fibrado vectorial asociado a $F^2(M)$ y a la representación $\mathcal{A}^2$ de $G^2(n) \equiv GL(n) \otimes S^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ (ver II.3.3). En [Yue, Part.II, Sec.4] se definen este tipo de fibrados asociados para fibrados de referencias de orden arbitrario y, siguiendo a [Lib], se prueba el isomorfismo canónico con los fibrados de jets de secciones de TM. En particular $\mathcal{A}^2F^2(M)$ resultaría ser canónicamente isomorfo al fibrado $J^1(TM)$ de 1-jets de secciones de TM (o 1-jets de campos sobre M; [Lib]). Pues bien, el siguiente teorema establece que el fibrado vectorial $\mathcal{A}^2F^2(M)$ es canónicamente isomorfo a T^LM.

Teorema 4 *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^2F^2(M) & \longrightarrow & T^LM \\ [z,(v,\alpha)] & \longmapsto & [W] = [z(v,\alpha)], \end{array}$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales.

Demostración: La aplicación está bien definida pues

$$z(a,t)(\mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}(v,\alpha)) = (R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,t)})(\mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}(v,\alpha)) = R^L_{a*}z(v,\alpha).$$

Sea (x,U) una carta en M. La trivialización local $\Psi_x^{\mathcal{A}^2F^2(M)}$ de $\mathcal{A}^2F^2(M)$, inducida (ver 1.1) por la trivialización local Ψ_x de $F^2(M)$, se corresponde, bajo la aplicación dada, con la trivialización local $\overline{\Psi}_x$ de T^LM:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^2F^2(M)|_U & \xrightarrow{\Psi_x^{\mathcal{A}^2F^2(M)}} & U \times (\mathbf{R}^n \times \mathfrak{gl}(n)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow id \\ T^LM & \xrightarrow{\overline{\Psi}_x} & U \times (\mathbf{R}^n \times \mathfrak{gl}(n)). \end{array}$$

En efecto: consideremos la trivialización local de $F^2(M) \cong (LM)_1$ (ver N.17.b, en Cap.III)

$$\begin{array}{rccc} \Psi_x: & F^2(M)|_U & \longrightarrow & U \times (GL(n) \otimes S^2(n)) \\ & z & \longmapsto & (\pi(z), (x_0(z), \bar{x}_1(z))). \end{array}$$

Ésta induce (ver 1.1) la trivialización local de $\mathcal{A}^2F^2(M)$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \Psi_x^{\mathcal{A}^2F^2(M)}: & \mathcal{A}^2F^2(M)|_U & \longrightarrow & U \times (\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) \\ & [z,(v,\alpha)] & \longmapsto & (\pi(z), \mathcal{A}^2_{(x_0(z),\bar{x}_1(z))}(v,\alpha)). \end{array}$$

Y, por otro lado, llamando $l \equiv \Pi(z)$ y usando cualquier $\lambda \in \mathcal{C}_z$ con Γ los coeficientes de λ en la carta x, se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_x([z(v,\alpha)]) &= (\pi^L(l),(\theta^L,\lambda_x)(R^L_{x_0(l)^{-1}*}(z(v,\alpha)))) = \\
\text{(III.N.10.b)} &= (\pi(z),(\theta^L,\lambda_x)(R^L_{x_0(l)^{-1}*}(B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l))) = \\
\text{(I.4.1)} &= (\pi(z),(\theta^L,\lambda_x)(B^\lambda(x_0(l)v)|_{\sigma^L_x(\pi(z))} + \\
&\qquad +(x_0(l)\alpha x_0(l)^{-1})^\sharp|_{\sigma^L_x(\pi(z))})) = \\
\text{(I.4.2)} &= (\pi(z),(x_0(l)v,-\Gamma|_{\pi(z)}(x_0(l)v) + \\
&\qquad +x_0(l)\alpha x_0(l)^{-1})) = \\
\text{(III.N.19.a)} &= (\pi(z),(x_0(z)v,x_0(z)(\bar{x}_1(z)(v)+\alpha)x_0(z)^{-1})).
\end{aligned}$$

Y se sigue que $\Psi_x^{\mathcal{A}^2F^2(M)}([z,(v,\alpha)]) = \overline{\Psi}_x([z(v,\alpha)])$.

Por tanto, la aplicación es fibrada (diferenciable) e induce la identidad en la base.

Sea $\rho : \mathcal{A}^2F^2(M) \to M$ la proyección en el fibrado asociado. Para cada $z \in F^2(M)$, con $\pi(z) = m$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc}
\hat{z}: & \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & \rho^{-1}(m) \\
& (v,\alpha) & \longmapsto & [z,(v,\alpha)],
\end{array}$$

es un isomorfismo lineal. Por otro lado, z es un isomorfismo lineal de $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ en T_lLM; y, por definición, también lo es $T_lLM \to T^L_mM$, $W \mapsto [W]$. Obviamente, la aplicación dada en el lema, restringida a la fibra sobre m, es la composición

$$\rho^{-1}(m) \xrightarrow{\hat{z}^{-1}} \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \xrightarrow{z} T_lLM \longrightarrow T^L_mM$$

y, por tanto, un isomorfismo lineal. El teorema se sigue (ver 1.2).

Nota 38

a. En lo sucesivo identificaremos $\mathcal{A}^2F^2(M) \cong T^LM$.

b. Sea λ una conexión lineal sobre M. Bajo la identificación anterior, el homomorfismo $\mathfrak{s}_\lambda$ (definido en el lema L.21.b) puede escribirse como

$$\begin{array}{rccc}
\mathfrak{s}_\lambda: & TM & \longrightarrow & T^LM \\
& [l,v] & \longmapsto & [z,(v,-\Upsilon_\lambda|_z(v))],
\end{array}$$

con $\Pi(z) = l$.

En efecto: $\mathfrak{s}_\lambda([l,v]) := [(B^\lambda(v)|_l] =$ (III.N.12.c) $[(B^{\lambda'}(v)|_l - (\Upsilon_\lambda|_z(v))^\sharp|_l] =$ (III.N.10.b) $[z(v,-\Upsilon_\lambda|_z(v))]$, $\forall\, \lambda' \in \mathcal{C}_z$ (con $z \in F^2(M)$ tal que $\Pi(z) = l$).

Si λ es simétrica, eligiendo $z = \sigma_\lambda(l)$ (con $\sigma_\lambda : LM \to F^2(M)$ la correspondiente sección en $\mathcal{S}(F^2(M))$, ver IV.L.17) se verifica $\lambda \in \mathcal{C}_z$; lo que implica $\Upsilon_\lambda|_z = 0$, y se obtiene $\mathfrak{s}_\lambda([l,v]) = [\sigma_\lambda(l),(v,0)]$ (lo que se corresponde con N.37.b).

c. Recordemos las coordenadas inducidas en $T^L M$ definidas en la nota N.36. Según la identificación hecha en **a**, si expresamos $Z \in \mathcal{A}^2F^2(M) \cong T^L M$, con $\rho^L(Z) = m$, como $Z = [\sigma_x^2(m),(v,\alpha)]$ se obtiene $(\tilde{x}_{-1},\tilde{x}_0)(Z) = (v,\alpha)$ (se sigue de la demostración del teorema anterior).

d. Comentemos aquí brevemente el punto de vista de considerar las conexiones lineales sobre M como secciones de cierto fibrado asociado a $F^2(M)$ (véase p. ej. [FFR]). Para ello definimos la acción por la izquierda

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{K}: & (GL(n) \otimes S^2(n)) \times L^2(n) & \longrightarrow & L^2(n) \\ & ((a,t),s) & \longmapsto & (s-t)_a \end{array}$$

(se comprueba fácilmente que es una acción por la izquierda). *Las secciones del fibrado $\mathcal{K}F^2(M)$ asociado a $F^2(M)$ y a $\mathcal{K}$ están en correspondencia biyectiva con las conexiones lineales.*

En efecto: Nótese (ver el final del apartado 1.1) que el conjunto $Sec(\mathcal{K}F^2(M))$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de funciones $\Upsilon : F^2(M) \to L^2(n)$ que son $\mathcal{K}$-equivariantes, esto es, que verifican

$$\Upsilon|_{z(a,t)} = \mathcal{K}_{(a,t)^{-1}}\Upsilon_z = (\Upsilon|_z)_{a^{-1}} + t.$$

Recuérdese que para cada conexión lineal λ la función Υ_λ, definida en D.4, es de estas características (ver N.14.d). Recíprocamente, dada $\Upsilon : F^2(M) \to L^2(n)$, $\mathcal{K}$-equivariante, si definimos, $\forall\, l \in LM$ y $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$,

$$B(v)|_l := (\Upsilon|_z(v))^\sharp|_l - B^{\lambda'}(v)|_l, \text{ con } \Pi(z) = l \text{ y } \lambda' \in \mathcal{C}_z$$

(que se comprueba, por la $\mathcal{K}$-equivariancia de Υ y por N.11.b, que es independiente de z, con $\Pi(z) = l$), es inmediato verificar que los campos $B(v)$ son necesariamente los campos estándar horizontales para una conexión lineal λ tal que $\Upsilon_\lambda = \Upsilon$.

A la vista del lema L.21, está claro que existe una correspondencia biyectiva entre las secciones del fibrado $\mathcal{K}F^2(M)$ y las escisiones $\mathfrak{s}$ de la secuencia exacta de L.20. La nota N.38.b hace explícita esta correspondencia, via las funciones Υ de $F^2(M)$ en $L^2(n)$ que son $\mathcal{K}$-equivariantes.

2.3 Alzado natural a T^LM de campos de vectores sobre M.

Un campo de vectores sobre M, $X \in \mathfrak{X}(M)$, induce un único campo de vectores sobre LM, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(LM)$, con las condiciones de que $\pi^L_*(\tilde{X}|_l) = X|_{\pi^L(l)}$, $\forall\, l \in LM$ y que $L_{\tilde{X}}\theta^L = 0$ (véase [K-N, p.229]). A $\tilde{X}$ se le llama el *alzado natural de X a LM*. Además se verifica que $R^L_{a*}\tilde{X} = \tilde{X} \circ R^L_a$, lo que permite definir unívocamente la sección $[\tilde{X}] \in Sec(T^LM)$.

Sea (x, U) una carta en M y (x_{-1}, x_0) la carta inducida en LM. Sea $X \in Sec(TM)$, con $X|_U = \vartheta\, \partial_x$, siendo $\vartheta : U \to \mathbf{R}^n$. Entonces

$$\tilde{X}|_{LM|_U} = (\vartheta \circ \pi^L)\partial_{x_{-1}} + (D(\vartheta \circ x^{-1}) \circ x_{-1})x_0\, \partial_{x_0}.$$

En efecto: Como $\pi^L_*(\tilde{X}|_l) = X|_{\pi^L(l)}$, $\forall\, l \in LM$, $\tilde{X}$ será de la forma $\tilde{X}|_{LM|_U} = (\vartheta \circ \pi^L)\partial_{x_{-1}} + \alpha\, \partial_{x_0}$, para cierta función $\alpha : LM|_U \to \mathfrak{gl}(n)$. Para evaluar α, calculemos $L_{\tilde{X}}\theta^L$. Recordemos que la derivada de Lie verifica ([K-N, Pr.3.10]) $L_{\tilde{X}} = d \circ i_{\tilde{X}} + i_{\tilde{X}} \circ d$. Usaremos también que $d({x_0}^{-1}) = -{x_0}^{-1}d(x_0){x_0}^{-1}$; y, como $\vartheta \circ \pi^L$ no depende de x_0, es inmediato ver que $d(\vartheta \circ \pi^L) = (D(\vartheta \circ x^{-1}) \circ x_{-1})dx_{-1}$. Se obtiene que

$$\begin{aligned}
L_{\tilde{X}}\theta^L &= (d \circ i_{\tilde{X}} + i_{\tilde{X}} \circ d)\theta^L = \\
&= d(\theta^L(\tilde{X})) + i_{\tilde{X}}d\theta^L = \\
\text{(I.4.2)} &= d({x_0}^{-1}(\vartheta \circ \pi^L)) - (({x_0}^{-1}d(x_0){x_0}^{-1})\dot{\wedge}dx_{-1})(\tilde{X}, \cdot) = \\
&= -({x_0}^{-1}d(x_0){x_0}^{-1})(\vartheta \circ \pi^L) + {x_0}^{-1}(D(\vartheta \circ x^{-1}) \circ x_{-1})dx_{-1} - \\
&\qquad -{x_0}^{-1}\alpha{x_0}^{-1}dx_{-1} + ({x_0}^{-1}d(x_0){x_0}^{-1})(\vartheta \circ \pi^L) = \\
&= {x_0}^{-1}(D(\vartheta \circ x^{-1}) \circ x_{-1} - \alpha{x_0}^{-1})dx_{-1};
\end{aligned}$$

y de $L_{\tilde{X}}\theta^L = 0$ se encuentra para α el valor dado arriba.

Definición 16 *El* alzado natural a T^LM *de un campo de vectores X sobre M es la sección $[\tilde{X}]$ de $T^LM \to M$.*

Lema 23 *Una sección $Z \in Sec(T^LM)$ determina canónicamente sendas secciones $X \in Sec(TM)$ y $B \in Sec(AdLM)$ tal que $Z = [\tilde{X}] + \mathrm{j} \circ B$.*

Demostración: Se tiene que $Z = [W]$ para un único campo $GL(n)$-invariante $W \in Sec(TLM)$. Si definimos $X = \pi^L_* \circ W \in Sec(TM)$, entonces $W - \tilde{X}$ es un campo vertical, pues $\pi^L_* \circ (W - \tilde{X}) = X - X = 0$, y, además, es $GL(n)$-invariante, luego determina una sección $Z^v \in Sec(T^LM)$ que será imagen por j de alguna sección $B \in Sec(AdLM)$, ya que $\mathrm{r} \circ Z^v = 0$. Luego se sigue que $Z = [\tilde{X}] + [W - \tilde{X}] = [\tilde{X}] + \mathrm{j} \circ B$.

Ahora bien, dada una conexión lineal λ, una sección $Z \in Sec(T^LM)$ determina (ver N.37.c) unívocamente otras dos secciones $X \in Sec(TM)$ y $A \in Sec(AdLM)$ tales que $Z = [X_\lambda] + \mathrm{j} \circ A$. La condición para que $A = B$ puede expresarse diciendo que el campo $X \in Sec(TM)$ verifique $\tilde{X} = X_\lambda$. El siguiente lema da una condición necesaria y suficiente para ello (cuando λ es simétrica).

Lema 24 *Sea λ una conexión lineal simétrica. Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es λ-paralelo si y sólo si $\tilde{X} = X_\lambda$, esto es, los alzados natural y λ-horizontal de X a LM coinciden.*

Demostración: Sea (x, U) una carta en M y sea Γ la función de coeficientes de λ en x. Escribamos $X|_U = \vartheta\, \partial_x$, siendo $\vartheta : U \to \mathbf{R}^n$. Sabemos (ver 1.5(a)) que $X|_U$ es λ-paralelo (esto es, *$X|_U$ es transportado λ-paralelo en sí mismo a lo largo de cualquier curva en U*) si y sólo si se verifica

$$D(\vartheta \circ x^{-1})|_{x(m)} = -\Gamma|_m(\cdot, \vartheta(m)), \quad \forall\, m \in U.$$

Por otra parte, de las expresiones en coordenadas de $\tilde{X}$ (letra pequeña al principio de este apartado) y de X_λ (N.37.c) se deduce que $\tilde{X}|_U = X_\lambda|_U$ (esto es, *el flujo de $X|_U$ coincide con el transporte λ-paralelo a lo largo de sus curvas integrales*) si y sólo si

$$D(\vartheta \circ x^{-1})|_{x(m)} = -\Gamma|_m(\vartheta(m)), \quad \forall\, m \in U.$$

El resultado se sigue al ser λ simétrica.

3 El fibrado tangente de segundo orden.

En esta sección, en el apartado 3.1, se introducen los llamados *fibrados tangentes de orden arbitrario* (véase [YI2, Cap.XI]). En el apartado 3.2 se estudia el fibrado tangente de segundo orden T^2M ([YI1],[YI2, Cap.X]) explicitando (L.25), en base a una cierta acción de $GL(n) \otimes S^2(n)$ en $\mathbf{R}^{2n}$, el conocido isomorfismo (véase [CDL]) canónico entre T^2M y un fibrado asociado a $F^2(M)$. En el apartado 3.3, en estrecha relación con lo hallado sobre T^LM en la sección anterior, se encuentra (L.26) una secuencia

$$0 \longrightarrow TM \longrightarrow T^2M \longrightarrow TM \longrightarrow 0,$$

que, aunque T^2M no es (en principio) un fibrado vectorial, se puede considerar exacta teniendo en cuenta la existencia de una sección 0 en T^2M; se analiza (L.27 y L.28) la relación que existe entre T^2M y el fibrado vectorial

T^LMy se demuestra (L.29) que, asociadas a cada conexión λ en LM, hay una estructura de fibrado vectorial sobre T^2M y una escisión de la anterior secuencia que permite (L.30) expresar T^2M como suma de Whitney $TM \oplus TM$ (véase [Bow]). Por último se estudia (L.31) la condición de que una curva en M sea de aceleración paralela respecto de una conexión lineal.

3.1 El fibrado tangente de orden r.

En toda esta sección $r \in \mathbf{N}$, $r > 0$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, con $\mathcal{M}$ su atlas maximal. Sobre el conjunto de curvas $\gamma : \mathcal{J} \to M$, siendo $\mathcal{J} \subset \mathbf{R}$ un intervalo abierto arbitrario con $0 \in \mathcal{J}$, se introduce la relación de equivalencia $\overset{r}{\sim}$ definida por (véase [YI2, p.372]):

$$\gamma \overset{r}{\sim} \gamma' \quad \text{sii} \quad \gamma 0 = \gamma' 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{d^s(x \circ \gamma)}{du^s}\right|_0 = \left.\frac{d^s(x \circ \gamma')}{du^s}\right|_0, \ \forall\, s \text{ con } 1 \leq s \leq r,$$

siendo x una carta en $\mathcal{M}$, cuyo dominio contenga a $\gamma 0$. La definición de $\overset{r}{\sim}$ es independiente de la carta elegida. Una clase de equivalencia con representante γ se denota por $j^r(\gamma)$ y se denomina el *r-jet de la curva* γ *en* $\gamma 0$. El conjunto de clases de equivalencia se denota por T^rM.

T^rM tiene una estructura de *fibrado sobre* M con:

(i) proyección

$$\begin{array}{rccc} \rho^r : & T^rM & \longrightarrow & M \\ & j^r(\gamma) & \longmapsto & \gamma 0, \end{array}$$

(ii) y trivializaciones locales las siguientes biyecciones definidas para cada carta $(x, U) \in \mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_x^{T^r} : & T^rM|_U & \longrightarrow & U \times \mathbf{R}^n \times \overset{r}{\cdots} \times \mathbf{R}^n \\ & j^r(\gamma) & \longmapsto & (\gamma 0, \left.\frac{d(x \circ \gamma)}{du}\right|_0, \ldots, \left.\frac{d^r(x \circ \gamma)}{du^r}\right|_0). \end{array}$$

Llamaremos a T^rM el *fibrado tangente de orden* r. A la fibra sobre $m \in M$ la denotaremos por T^r_mM. Para todo $1 < r < r'$, la proyección $\rho^{r,r'} : T^rM \to T^{r'}M$, $j^r(\gamma) \mapsto j^{r'}(\gamma)$ es una aplicación fibrada; además T^rM resulta ser un fibrado sobre $T^{r'}M$.

Es bien conocido que T^1M es un fibrado vectorial canónicamente isomorfo al fibrado tangente TM, bajo el isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} j^1(\gamma) \longmapsto (\gamma_* 0 \equiv \gamma_*(\frac{d}{du}|_0) : & \mathcal{F}(M) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & h & \longmapsto & \frac{d(h \circ \gamma)}{du}|_0) \end{array}$$

(siendo $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la carta identidad en $\mathbf{R}$).

3.2 T^2M como fibrado asociado a $F^2(M)$.

En esta sección nos ocuparemos del fibrado $T^2M(M, \mathbf{R}^{2n}, \rho^2)$, *fibrado tangente de segundo orden*, con proyección $\rho^2 : T^2M \to M$, $j^2(\gamma) \mapsto \gamma 0$, y trivializaciones locales $(\forall (x, U) \in \mathcal{M})$:

$$\begin{array}{rccl} \Psi_x^{T^2} : & T^2M|_U & \longrightarrow & U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & j^2(\gamma) & \longmapsto & (\gamma 0, \frac{d(x \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0). \end{array}$$

Demostraremos (L.25) que T^2M puede considerarse un fibrado asociado a $F^2(M)$.

Nota 39

a. Es frecuente (véase, por ejemplo, [Bow]) definir el fibrado tangente de segundo orden de la siguiente forma: Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T(TM) & \xrightarrow{\rho_*} & TM \\ {\scriptstyle \boldsymbol{\rho}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ TM & \xrightarrow{id} & TM, \end{array}$$

siendo $\rho : TM \to M$ y $\boldsymbol{\rho} : T(TM) \to TM$ las respectivas proyecciones de los fibrados tangentes de M y de TM. Se define

$$T^{(2)}M := \{Y \in T(TM) : \boldsymbol{\rho}(Y) = \rho_*(Y)\}.$$

Sea γ una curva en M (ver I.3.1). La curva de vectores tangentes a γ es una curva en TM que se denota por γ_* (y dada por $\gamma_*\tau := \gamma_*(\frac{d}{du}|_\tau)$). A su vez, la *curva de vectores tangentes a* γ_* es una curva en $T(TM)$ que denotaremos por $\tilde{\gamma}$. Se verifica que $\tilde{\gamma}\tau \in T^{(2)}M$.

En efecto: $\tilde{\gamma}$ viene dada por $\tilde{\gamma}\tau := (\gamma_* \circ \frac{d}{du})_*(\frac{d}{du}|_\tau)$; se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\rho}(\tilde{\gamma}\tau) & = & (\gamma_* \circ \frac{d}{du})(\tau), \text{ y} \\ \rho_*(\tilde{\gamma}\tau) & = & (\rho \circ \gamma_* \circ \frac{d}{du})_*(\frac{d}{du}|_\tau) = \gamma_*(\frac{d}{du}|_\tau). \end{array}$$

Recíprocamente todo elemento de $T^{(2)}M$ se puede expresar de esta manera para alguna curva en M. Es inmediato probar que existe una correspondencia biyectiva

$$\begin{array}{ccc} T^2M & \longrightarrow & T^{(2)}M \\ j^2(\gamma) & \longmapsto & \tilde{\gamma}0, \end{array}$$

(que verifica $j^2(\gamma \circ T_\tau) \mapsto \tilde{\gamma}\tau$), que es un isomorfismo de fibrados y permite la identificación $T^2M \cong T^{(2)}M$. Nosotros asumiremos esta identificación.

b. Coordenadas en T^2M. Dada una carta (x, U) en M, la carta inducida en T^2M es

$$(x, id|_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n}) \circ \Psi_x^{T^2} : \begin{array}{rcl} T^2M|_U & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ j^2(\gamma) & \longmapsto & (x(\gamma 0), \left.\frac{d(x \circ \gamma)}{du}\right|_0 \equiv \dot{\gamma}^x(0), \\ & & \left.\frac{d^2(x \circ \gamma)}{du}\right|_0 \equiv \ddot{\gamma}^x(0)) \end{array}$$

(recordar las notaciones introducidas en 1.5(a)).

Definamos la siguiente acción que refleja (ver la nota N.40, posterior a la definición) el cambio de coordenadas de $j^2(\gamma)$ ante un cambio de carta.

Definición 17 *La acción $\mathcal{B}$ por la izquierda de $GL(n) \otimes S^2(n)$ sobre $\mathbf{R}^{2n}$ es*

$$\mathcal{B} : \begin{array}{rcl} GL(n) \otimes S^2(n) \times \mathbf{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{2n} \\ ((a,t),(v,w)) & \longmapsto & (av, at(v,v) + aw). \end{array}$$

Efectivamente es una acción por la izquierda:

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{B}_{(a,t)} \circ \mathcal{B}_{(a',t')})(v,w) & = & \mathcal{B}_{(a,t)}(a'v, a't'(v,v) + a'w) = \\ & = & (aa'v, at(a'v, a'v) + a(a't'(v,v) + a'w)) = \\ & = & (aa'v, aa'(t_{a'^{-1}} + t')(v,v) + aa'w) = \\ & = & \mathcal{B}_{(aa', t_{a'^{-1}} + t')}(v,w) = \mathcal{B}_{(a,t)\cdot(a',t')}(v,w). \end{array}$$

Nótese que $\mathcal{B}$ no está asociada a una representación de $GL(n) \otimes S^2(n)$, ya que sólo es lineal en $\mathbf{R}^{2n}$ si se restringe al subgrupo $GL(n)$.

Nota 40 Sean (x, U) y (x', U') dos cartas de M. Se obtiene que

$$\Psi_{x'}^{T^2} \circ (\Psi_x^{T^2})^{-1} : \begin{array}{rcl} U \times \mathbf{R}^{2n} & \longrightarrow & U \times \mathbf{R}^{2n} \\ (m, v, w) & \longmapsto & (m, a_m v, a_m t_m(v,v) + a_m w). \end{array}$$

siendo $a_m \equiv D(x' \circ x^{-1})|_{x(m)}$ y $t_m \equiv a_m^{-1} D^2(x' \circ x^{-1})|_{x(m)}$.

En efecto: Sea la curva $\gamma\tau = x^{-1}(x(m) + \tau v + \frac{1}{2}\tau^2 w)$; se verifica fácilmente que $(\Psi_x^{T^2})^{-1}(m, v, w) = j^2(\gamma)$. Se obtiene que

$$\begin{array}{rcl} \left.\frac{d(x' \circ \gamma)}{du}\right|_0 & = & D(x' \circ x^{-1})|_{x(m)} \left.\frac{d(x(m) + \tau v + \frac{1}{2}\tau^2 w)}{du}\right|_0 = \\ & = & D(x' \circ x^{-1})|_{x(m)} v, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left.\frac{d^2(x' \circ \gamma))}{du^2}\right|_0 & = & D^2(x' \circ x^{-1})|_{x(m)}(v,v) + \\ & & + D(x' \circ x^{-1})|_{x(m)} \left.\frac{d^2(x(m) + \tau v + \frac{1}{2}\tau^2 w)}{du^2}\right|_0 = \\ & = & D^2(x' \circ x^{-1})|_{x(m)}(v,v) + D(x' \circ x^{-1})|_{x(m)} w; \end{array}$$

y el resultado se sigue.

Es sabido (véase [CDL]) que T^2M es isomorfo a un fibrado asociado a $F^2(M)$; el siguiente lema explicita este isomorfismo usando la acción $\mathcal{B}$ (D.17).

Lema 25 *El fibrado T^2M es isomorfo al fibrado asociado a $F^2(M)$ y a $\mathcal{B}$ por la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} T^2M & \longrightarrow & \mathcal{B}F^2(M) \\ j^2(\gamma) & \longmapsto & [z, (\frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x_\lambda \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)], \end{array}$$

con z tal que $\pi(z) = \gamma 0$ y con x_λ una carta normal para (cualquier) $\lambda \in \mathcal{C}_z$ centrada en $\gamma 0$ y correspondiente a $\Pi(z) \equiv l$.

Demostración: Comencemos viendo que la aplicación está bien definida.

(i) Es independiente de la $\lambda \in \mathcal{C}_z$ elegida: Sea $\lambda' \in \mathcal{C}_z$ y $x_{\lambda'}$ la carta normal para λ' centrada en $\gamma 0$ y correspondiente a l. Entonces, por L.11 (Cap.III), $j^2(x_\lambda^{-1}) = j^2(x_{\lambda'}{}^{-1})$ lo que implica que

$$D(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 = I \quad \text{y} \quad D^2(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 = 0.$$

Luego se tiene que

$$\frac{d(x_{\lambda'} \circ \gamma)}{du}\Big|_0 = D(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 \, \frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0 = \frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x_{\lambda'} \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0 &= D^2(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 (\frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0) + \\ &\quad + D(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 \, \frac{d^2(x_\lambda \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0 = \frac{d^2(x_\lambda \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0. \end{aligned}$$

(ii) Es independiente de z. Si tomamos $z' = z(a,t)$ y $\lambda' \in \mathcal{C}_{z'}$ se tiene, por L.11, que

$$\iota^2(j^2(x_\lambda{}^{-1})) = z \quad \text{y} \quad \iota^2(j^2(x_{\lambda'}{}^{-1})) = z(a,t).$$

Esto implica que, en cualquier carta (x, U) de M, la trivialización local Ψ_x de $(LM)_1 \cong F^2(M)$ (ver N.17, III.2.2) da lugar a

$$\begin{aligned} &(D(x \circ x_{\lambda'}{}^{-1})|_0, D(x \circ x_{\lambda'}{}^{-1})|_0^{-1} D^2(x \circ x_{\lambda'}{}^{-1})|_0) = \\ &= (D(x \circ x_\lambda{}^{-1})|_0, D(x \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 D^2(x \circ x_\lambda{}^{-1})|_0) \cdot (a,t) \end{aligned}$$

(siendo $\cdot$ la ley de producto en $GL(n) \otimes S^2(n)$, ver N.5, II.3.1), lo que prueba, tomando $x = x_{\lambda'}$, que

$$D(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 = a^{-1} \quad \text{y} \quad D^2(x_{\lambda'} \circ x_\lambda{}^{-1})|_0 = -a^{-1} t_a.$$

De lo cual se sigue que

$$\begin{aligned} [z', (\frac{d(x_{\lambda'} \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x_{\lambda'} \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)] &= [z(a,t), (a^{-1} \, \frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \\ &\quad -a^{-1} t_a (\frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0) + a^{-1} \, \frac{d^2(x_\lambda \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)] = \\ &= [z(a,t), \mathcal{B}_{(a,t)^{-1}} (\frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x_\lambda \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)] = \\ &= [z, (\frac{d(x_\lambda \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x_\lambda \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)]. \end{aligned}$$

(iii) Por último, es inmediato ver que es independiente del representante $\gamma \in j^2(\gamma)$; luego, efectivamente, la aplicación está bien definida.

Obviamente, la aplicación induce la identidad en M y preserva las fibras. Por otra parte dada una carta (x, U) en M, la trivialización local $\Psi_x^{\mathcal{B}F^2(M)}$ de $\mathcal{B}F^2(M)$ inducida (ver 1.1) por la trivialización local Ψ_x de $F^2(M)$ se corresponde, bajo la aplicación dada, con la trivialización local $\Psi_x^{T^2}$ de T^2M;

$$\begin{array}{ccc} T^2M|_U & \xrightarrow{\Psi_x^{T^2}} & U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow id \\ \mathcal{B}F^2(M)|_U & \xrightarrow{\Psi_x^{\mathcal{B}F^2(M)}} & U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n. \end{array}$$

En efecto: Ya que, trivialmente, $\lambda_x \in \mathcal{C}_{\sigma_x^2(m)}$ (recordar N.19.b, III.2.2) y x es carta normal de λ_x correspondiente a $\sigma_x^L(m)$, sobre $T^2M|_U$ la aplicación dada se puede escribir como

$$\begin{array}{ccc} T^2M|_U & \longrightarrow & \mathcal{B}F^2(M)|_U \\ j^2(\gamma) & \longmapsto & [\sigma_x^2(\gamma 0), (\frac{d(x \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)]. \end{array}$$

(El que x esté o no centrada en $\gamma 0$ es indiferente pues un cambio de carta por traslación en $\mathbf{R}^n$ no afecta ni a $\sigma_x^2(\gamma 0)$ ni a las derivadas de $(x \circ \gamma)$). Por otra parte, se tiene

$$\begin{array}{rccc} \Psi_x^{T^2(M)}: & T^2(M)|_U & \longrightarrow & U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & j^2(\gamma) & \longmapsto & (\gamma 0, \frac{d(x \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0). \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \Psi_x^{\mathcal{B}F^2(M)}: & \mathcal{B}F^2(M)|_U & \longrightarrow & U \times (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \\ & [z, (v, w)] & \longmapsto & (\pi(z), \mathcal{B}_{(x_0(z), \bar{x}_1(z))}(v, w)). \end{array}$$

Como $(x_0(\sigma_x^2(m)), \bar{x}_1(\sigma_x^2(m))) = (I, 0)$, se sigue que

$$\Psi_x^{T^2}(j^2(\gamma)) = \Psi_x^{\mathcal{B}F^2(M)}([\sigma_x^2(\gamma 0), (\frac{d(x \circ \gamma)}{du}\Big|_0, \frac{d^2(x \circ \gamma)}{du^2}\Big|_0)]).$$

Por tanto es un isomorfismo de fibrados (recordar la definición en I.3.3).

Nota 41 En lo sucesivo identificaremos $T^2M \cong \mathcal{B}F^2(M)$.

3.3 Relación entre T^2M y T^LM.

Aunque T^2M no es, de forma natural, un fibrado vectorial se obtiene una secuencia análoga a la obtenida para T^LM (ver L.20, en 2.1).

Lema 26 *Si definimos la aplicación fibrada*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{f}: & TM & \longrightarrow & T^2M \\ & [l,v] & \longmapsto & [z,(0,v)], \end{array}$$

$\forall\, z \in F^2(M)$ *tal que* $\Pi(z) = l$, *obtenemos la siguiente secuencia de fibrados*

$$0 \longrightarrow TM \xrightarrow{\mathfrak{f}} T^2M \xrightarrow{\rho^{2,1}} TM \longrightarrow 0,$$

que es exacta en el sentido siguiente: $\mathfrak{f}$ *es inyectiva,* $\rho^{2,1}$ *es sobreyectiva y* $\rho^{2,1} \circ \mathfrak{f} = 0$.

Demostración: Se comprueba de forma inmediata.

Nota 42 Se verifica que $\mathfrak{f}(TM)$ es un subfibrado de T^2M que es vectorial y canónicamente isomorfo a TM.

Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \delta: & \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & (v,\alpha) & \longmapsto & (v,\alpha v). \end{array}$$

La primera componente de δ es lineal y la segunda componente es bilineal. Se obtiene $(\forall\,(a,t) \in GL(n) \otimes S^2(n))$ que $\delta \circ \mathcal{A}^2_{(a,t)} = \mathcal{B}_{(a,t)} \circ \delta$.

Lema 27 *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\delta}: & T^LM & \longrightarrow & T^2M \\ & [z,(v,\alpha)] & \longmapsto & [z,\delta(v,\alpha)] = [z,(v,\alpha v)] \end{array}$$

es una aplicación fibrada que verifica ($\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{j}$ se definen en L.20)*:*

(i) $\rho^{2,1} \circ \boldsymbol{\delta} = \mathfrak{r}, \qquad \boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{j} = 0.$

(ii) $\boldsymbol{\delta}(T^LM) \cap \mathfrak{f}(TM) = \emptyset, \quad \boldsymbol{\delta}(T^LM) \cup \mathfrak{f}(TM) = T^2M.$

Demostración: Es inmediata.

El siguiente diagrama resume la situación:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & AdLM & \xrightarrow{\mathfrak{j}} & T^LM & \xrightarrow{\mathfrak{r}} & TM & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & TM & \xrightarrow{\mathfrak{f}} & T^2M & \xrightarrow{\rho^{2,1}} & TM & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Introducimos la siguiente definición, con una notación coherente con la identificación hecha en N.39.a.

Definición 18 *Llamamos* alzado natural a T^2M *de una curva* γ *en* M *a la curva* γ^2 *en* T^2M *dada por* $\gamma^2\tau = j^2(\gamma \circ T_\tau)$.

Nota 43 Claramente $\rho^{2,1} \circ \gamma^2 = \gamma_*$. Si (x, U) es una carta, $\forall\, \tau \in \mathcal{J}$ con $\gamma\tau \in U$, se verifica (L.25 y N.19.b)

$$\gamma^2\tau = [\sigma_x^2(\gamma\tau), (\left.\frac{d(x\circ\gamma)}{du}\right|_\tau, \left.\frac{d^2(x\circ\gamma)}{du^2}\right|_\tau)] \equiv [\sigma_x^2(\gamma\tau), (\dot\gamma^x\tau, \ddot\gamma^x\tau)];$$

la última equivalencia según las notaciones introducidas en 1.5(a).

Definición 19 *El* alzado natural a T^2M *de una sección* $X \in Sec(TM)$ *es la única sección* $X^2 \in Sec(T^2M)$ *definida por* $X^2(m) = j^2(\gamma)$ *siendo* γ *una curva integral de* X *con* $\gamma 0 = m$.

Si γ es una curva integral de X se verifica que $X^2(\gamma\tau) = j^2(\gamma \circ T_\tau) = \gamma^2\tau$. Recordando que $[\tilde X] \in Sec(T^LM)$ denota el alzado natural de $X \in Sec(TM)$ a T^LM (D.16) se tiene el siguiente lema.

Lema 28 *Se verifica que* $\boldsymbol{\delta}([\tilde X]) = X^2$.

Demostración: Sea (x, U) una carta en M. Sea $X \in Sec(TM)$, con $X|_U = \vartheta\, \partial_x$. Entonces, $\forall\, l \in LM|_U, \pi^L(l) = m$,

$$\begin{aligned}
[\tilde X|_l] &\equiv [\tilde X|_{\sigma_x^L(m)}] = \\
(2.3) &= [(\vartheta \circ \pi^L)|_{\sigma_x^L(m)}, \partial_{x_{-1}}|_{\sigma_x^L(m)} + \\
&\qquad + ((D(\vartheta \circ x^{-1}) \circ x_{-1})x_0)|_{\sigma_x^L(m)} \partial_{x_0}|_{\sigma_x^L(m)}] = \\
(\text{N.19.b}) &= [\sigma_x^2(m)((\vartheta \circ \pi^L)|_{\sigma_x^L(m)}, ((D(\vartheta \circ x^{-1}) \circ x_{-1})x_0)|_{\sigma_x^L(m)})] = \\
(\text{T.4}) &= [\sigma_x^2(m), (\vartheta(m), D(\vartheta \circ x^{-1})|_{x(m)})].
\end{aligned}$$

Sea γ una curva en M, con $\gamma 0 = \pi^L(l)$, que sea curva integral de X. Por definición, $\gamma_*\tau = X|_{\gamma\tau}$; entonces, $\forall\, \tau$ en un entorno de 0, se verifica $\left.\frac{d(x\circ\gamma)}{du}\right|_\tau = \vartheta(\gamma\tau)$. Derivando esta ecuación en $\tau = 0$ queda

$$\left.\frac{d^2(x\circ\gamma)}{du^2}\right|_0 = D(\vartheta \circ x^{-1})|_{x(\pi^L(l))} \vartheta(\pi^L(l)).$$

El resultado se sigue.

Veamos la estructura de fibrado vectorial ([Bow]) que una conexión lineal induce sobre el fibrado tangente de segundo orden.

Lema 29 *Dada una conexión* λ *en* LM *se obtiene una estructura de fibrado vectorial en* T^2M, *con fibra típica* $\mathbf{R}^{2n}$, *definiendo sobre cada fibra* T_m^2M *las operaciones*

$$\begin{aligned}
[z,(v,w)] \overset{\lambda}{+} [z,(v',w')] &= [z, (v+v', -\Upsilon_\lambda|_z(v,v') - \Upsilon_\lambda|_z(v',v) + w + w')], \\
k \overset{\lambda}{\cdot} [z,(v,w)] &= [z, (kv, (k-k^2)\,\Upsilon_\lambda|_z(v,v) + kw)],
\end{aligned}$$

con $k \in \mathbf{R}$.

Demostración: Se prueba que las operaciones están bien definidas pues no dependen de los representantes. Se comprueba que cada fibra $T^2_m M$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$. Se obtiene un sistema de trivializaciones locales de T^2M tomando para cada carta (x, U) de M la trivialización local

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{T^2}_x : & T^2M|_U & \longrightarrow & U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & [\sigma^2_x(m), (v,w)] & \longmapsto & (m, (v, \Upsilon_\lambda|_{\sigma^2_x(m)}(v,v) + w)), \end{array}$$

que restringida a cada fibra es un isomorfismo lineal.

Lema 30 *Una conexión lineal λ permite expresar T^2M como suma directa (suma de Whitney) de TM y TM. Escribiremos $T^2M = TM \oplus_\lambda TM$.*

Demostración: Definimos la aplicación fibrada

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{p}_\lambda : & T^2M & \longrightarrow & TM \\ & [z, (v,w)] & \longmapsto & [\Pi(z), \Upsilon_\lambda|_z(v,v) + w]. \end{array}$$

Se comprueba que está bien definida por las propiedades de Υ_λ de la nota N.12.d. Se comprueba inmediatamente que se verifican las condiciones:

$$\begin{array}{ll} \rho^{2,1} \circ (\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda) = id|_{TM} & \mathfrak{p}_\lambda \circ \mathfrak{f} = id|_{TM} \\ \mathfrak{p}_\lambda \circ (\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda) = 0 & \rho^{2,1} \circ \mathfrak{f} = 0; \end{array}$$

y que

$$(\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda) \circ \rho^{2,1} \overset{\lambda}{+} \mathfrak{f} \circ \mathfrak{p}_\lambda = id_{T^2M}.$$

Para cada $m \in M$, resulta $T^2_m M = (\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda)(T_m M) \oplus \mathfrak{f}(T_m M)$.

Se obtiene el diagrama con dos filas de secuencias exactas (las de abajo en el sentido del lema L.26):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & AdLM & \underset{\mathfrak{q}_\lambda}{\overset{\mathfrak{j}}{\rightleftarrows}} & T^LM & \underset{\mathfrak{s}_\lambda}{\overset{\mathfrak{r}}{\rightleftarrows}} & TM & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \boldsymbol{\delta} & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & TM & \underset{\mathfrak{p}_\lambda}{\overset{\mathfrak{f}}{\rightleftarrows}} & T^2M & \underset{\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda}{\overset{\rho^{2,1}}{\rightleftarrows}} & TM & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Nota 44

a. Si λ_s es la conexión lineal simétrica con las mismas geodésicas que λ (véase [K-N, Prop.III.7.9]) entonces $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda_s}$.

b. Sea λ una conexión lineal simétrica y sea $\sigma_\lambda : LM \to F^2(M)$ la sección en $\mathcal{S}(F^2(M))$ asociada (ver L.17). Entonces la aplicación fibrada $\mathfrak{p}_\lambda$ correspondiente verifica $\mathfrak{p}_\lambda([\sigma_\lambda(l),(v,w)]) = [l,w]$ (ya que $\Upsilon_\lambda \circ \sigma_\lambda = 0$).

c. En particular se verifica, para cada $z \in F^2(M)$, con $\pi(z) = m$, $T^2_m M = T_m M \oplus_\lambda T_m M$, siendo $\lambda \in \mathcal{C}_z$. Esta descomposición es independiente de la λ escogida.

d. Si λ_s es la conexión lineal simétrica con las mismas geodésicas que λ (véase [K-N, Prop.III.7.9]) entonces la estructura de fibrado vectorial de T^2M, así como su descomposición en suma directa, es la misma para ambas conexiones.

Finalmente, veamos una caracterización alternativa del hecho de que una curva en M sea una geodésica o de que sea una curva de aceleración paralela respecto de una conexión lineal sobre M.

Lema 31 *Sea λ una conexión lineal en M (sea ∇ la conexión vectorial inducida por λ en TM) y sea γ una curva en M. Entonces:*

a. *γ es geodésica de λ (esto es, $\nabla_{\gamma_*}\gamma_* = 0$) si y sólo si $\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = 0$.*

b. *γ es* de aceleración λ-paralela *(esto es, $\nabla^2_{\gamma_*}\gamma_* = 0$) si y sólo si $\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = [\gamma_\lambda, w]$, para algún $w \in \mathbf{R}^n$.*

Demostración: (a) Se comprueba que $\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = \nabla_{\gamma_*}\gamma_*$.

En efecto: En una carta (x,U) de M, se tiene

$$\mathfrak{p}_\lambda(j^2(\gamma)) = [\sigma^L_x \circ \gamma, (\Upsilon_\lambda \circ \sigma^2_x)(\gamma 0)(\dot\gamma^x 0, \dot\gamma^x 0) + \ddot\gamma^x 0];$$

y, por N.19.b, $(\Upsilon_\lambda \circ \sigma^2_x)(\gamma 0) = \Gamma|_{\gamma 0}$, siendo Γ los coeficientes de λ en x. Comparando con la expresión estándar en coordenadas de $\nabla_{\gamma_* 0}\gamma_*$ se obtiene la igualdad.

(b) Se comprueba directamente que la ecuación $\nabla^2_{\gamma_*}\gamma_* = 0$ se corresponde con la ecuación en coordenadas

$$(1)\quad \dddot\gamma^x + ((d\Gamma)\circ\gamma)(\dot\gamma^x)(\dot\gamma^x,\dot\gamma^x) + (\Gamma\circ\gamma)(\ddot\gamma^x,\dot\gamma^x) + 2(\Gamma\circ\gamma)(\dot\gamma^x,\ddot\gamma^x) + \\ + (\Gamma\circ\gamma)(\dot\gamma^x,(\Gamma\circ\gamma)(\dot\gamma^x,\dot\gamma^x)) = 0.$$

Por otra parte, sabemos por (a) que

$$\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = [\sigma^L_x \circ \gamma, (\Gamma\circ\gamma)(\dot\gamma^x,\dot\gamma^x) + \ddot\gamma^x]$$

y, por otro lado (ver 1.5(a)),

$$[\gamma_\lambda, w] = [\sigma^L_x \circ \gamma, \gamma^x_0 w].$$

Entonces la condición $\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = [\gamma_\lambda, w]$ equivale a

$$(\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) + \ddot{\gamma}^x = \gamma_0^x w,$$

para algún $w \in \mathbf{R}^n$; y ello es equivalente a

$$\frac{d}{du}((\gamma_0^x)^{-1}(\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) + (\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x) = 0.$$

Derivando,

$$\begin{aligned} -(\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}_0^x(\gamma_0^x)^{-1}(\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) + (\gamma_0^x)^{-1}((d\Gamma) \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) + \\ + (\gamma_0^x)^{-1}(\Gamma \circ \gamma)(\ddot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) + (\gamma_0^x)^{-1}(\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \ddot{\gamma}^x) - \\ - (\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}_0^x(\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x + (\gamma_0^x)^{-1}\dddot{\gamma}^x = 0; \end{aligned}$$

y, multiplicando por γ_0^x y usando la ecuación (1) en 1.5(a), que caracteriza a γ_λ como alzado λ-horizontal de γ a LM, queda que la condición necesaria y suficiente para que $\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = [\gamma_\lambda, w]$ es la ecuación (1) de arriba.

Nota 45

a. La ec. (1) es la misma ecuación que Bowman obtiene, en [Bow, ec.(4.8)], cuando define una "geodésica de segundo orden" para una "conexión de segundo orden" (en el sentido de [Bow]) inducida por una conexión lineal.

b. Por ser la secuencia $0 \leftarrow TM \xleftarrow{\mathfrak{p}_\lambda} T^2M \xleftarrow{\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda} TM \longrightarrow 0$ exacta, por ser $\rho^{2,1} \circ \gamma^2 = \gamma_*$ y por ser $\rho^{2,1} \circ (\boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda) = id|_{TM}$, la condición para que γ sea geodésica puede escribirse alternativamente, en vez de $\mathfrak{p}_\lambda \circ \gamma^2 = 0$, en la forma $\gamma^2 = \boldsymbol{\delta} \circ \mathfrak{s}_\lambda \circ \gamma_*$ (lo que puede comprobarse directamente).

4 Conexiones en fibrados asociados al orden dos.

Dada una conexión ω en $F^2(M)$, en el apartado 4.1 se definen los alzados ω-horizontales a $F^2(M)$ y los alzados λ_ω-horizontales a LM (con λ_ω la conexión en LM inducida por ω) de curvas en M; se obtienen, en coordenadas, las ecuaciones que verifican. En el apartado 4.2 se estudian las conexiones inducidas por ω en los fibrados asociados T^LM y T^2M, se definen los alzados ω-horizontales a T^LM y a T^2M de curvas en M y se da una relación que los liga

(L.32); se introduce (D.20) el concepto de *geodésica (de orden dos) respecto de* ω (diferente del dado en [Bow] como "geodésica de segundo orden"); se prueba (L.33) que una geodésica (de orden dos) respecto de ω es también geodésica respecto de la conexión lineal inducida λ_ω; y se demuestra (L.34) que, en el caso de la conexión de segundo orden ω_λ inducida por una conexión lineal λ, las geodésicas (de orden dos) respecto de ω_λ coinciden con las geodésicas respecto de λ, probando así que este tipo de conexiones de segundo orden son de las llamadas "admisibles" en [CDL] (véanse referencias allí); por último se retoman las nociones, anteriormente definidas, de alzados naturales de un campo sobre M a T^LM (D.16) y a T^2M (D.19), junto con la relación que las liga (L.28), y se exploran las consecuencias (L.35) de que cada uno de ellos sea ω-horizontal.

En el apartado 4.3 se muestra como las 2-formas (sobre $F^2(M)$) de torsión ($\mathbf{R}^n$+$\mathfrak{gl}(n)$-valuada) y curvatura ($\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)$-valuada) de una conexión de segundo orden inducen 2-formas sobre M a valores en T^LM y $AdF^2(M)$, respectivamente (D.21 y L.36).

4.1 Alzados horizontales a $F^2(M)$ de curvas en M.

Sea ω una conexión en $F^2(M)$. Sea γ una curva en M. El *alzado ω-horizontal de γ a $F^2(M)$* (ver I.3.3) *con condición inicial* z, es la curva γ_ω en $F^2(M)$ determinada, unívocamente, por las condiciones ($\forall \tau \in \mathcal{J}$):

$$\pi \circ \gamma_\omega = \gamma, \quad \omega(\gamma_{\omega *}\tau) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_\omega 0 = z.$$

Sea (x, U) una carta en M con $\gamma(\mathcal{J}) \subset U$ y sea $(x_{-1}, x_0, \bar{x}_1)$ la carta inducida en $F^2(M)$. Usaremos las siguientes notaciones:

$$\dot{\gamma}^x := \frac{d(x \circ \gamma)}{du}, \qquad \ddot{\gamma}^x := \frac{d^2(x \circ \gamma)}{du^2}, \qquad \dddot{\gamma}^x := \frac{d^3(x \circ \gamma)}{du^3};$$
$$\gamma^x_{-1} := x_{-1} \circ \gamma_\omega = x \circ \gamma, \qquad \gamma^x_0 := x_0 \circ \gamma_\omega, \qquad \gamma^x_1 := \bar{x}_1 \circ \gamma_\omega;$$
$$\dot{\gamma}^x_{-1} := \frac{d(x_{-1} \circ \gamma_\omega)}{du} = \dot{\gamma}^x, \qquad \dot{\gamma}^x_0 := \frac{d(x_0 \circ \gamma_\omega)}{du}, \qquad \dot{\gamma}^x_1 := \frac{d(\bar{x}_1 \circ \gamma_\omega)}{du}.$$

Entonces la curva de vectores tangentes $\gamma_{\omega *}$ se escribe en coordenadas

$$\gamma_{\omega *}\tau = \dot{\gamma}^x_{-1}\tau\, \partial_{x_{-1}}|_{\gamma_\omega \tau} + \dot{\gamma}^x_0 \tau\, \partial_{x_0}|_{\gamma_\omega \tau} + \dot{\gamma}^x_1 \tau\, \partial_{\bar{x}_1}|_{\gamma_\omega \tau}.$$

Y la ecuación $(\omega_0, \omega_1)(\gamma_{\omega *}) = 0$ se escribe

$$(1) \qquad \begin{cases} (\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x)\gamma^x_0 + \dot{\gamma}^x_0 = 0 \\ ((\bar{\Gamma} \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x))_{(\gamma^x_0)^{-1}} + \dot{\gamma}^x_1 = 0, \end{cases}$$

siendo Γ y $\bar{\Gamma}$ las funciones de coeficientes de ω en la carta (x, U) (N.24, IV.2.1).

Sea λ_ω la conexión en LM inducida por ω. Sea γ_{λ_ω} el *alzado λ_ω-horizontal de γ a LM con condición inicial* $\pi(z) = l$ (ver 1.5(a)). Se verifica que $\gamma_{\lambda_\omega} = \Pi \circ \gamma_\omega$ y que $\gamma_{\lambda_\omega *} = \Pi_* \circ \gamma_{\omega *}$.

La ecuación $\lambda_\omega(\gamma_{\lambda_\omega *}) = 0$ es la primera ecuación de (1) (comparar con lo dicho en 1.5(a)).

4.2 Conexiones inducidas en $T^L M$ y $T^2 M$.

Con las mismas notaciones que en el apartado anterior, el *alzado ω-horizontal de γ a $T^L M$* (ver 1.4(a)), *con condición inicial* $[z,(v,\alpha)]$ es la curva en $T^L M$ $[\gamma_\omega,(v,\alpha)]$, con γ_ω como en el apartado anterior.

Se obtiene que

$$[\gamma_\omega,(v,\alpha)] = [\sigma_x^2 \circ \gamma, \mathcal{A}^2_{(\gamma_0^x,\gamma_1^x)}(v,\alpha)] = [\sigma_x^2 \circ \gamma, (\gamma_0^x v, \gamma_0^x(\gamma_1^x(v)+\alpha)(\gamma_0^x)^{-1})],$$

con σ_x^2 la sección de $F^2(M)|_U \to U$ inducida (N.19.b) por una carta (x,U) en M.

El *alzado ω-horizontal de γ a $T^2 M$* (ver 1.4(a)), *con condición inicial* $[z,(v,w)]$ es la curva en $T^L M$ $[\gamma_\omega,(v,w)]$, con γ_ω como arriba.

Se obtiene que

$$[\gamma_\omega,(v,w)] = [\sigma_x^2 \circ \gamma, \mathcal{B}_{(\gamma_0^x,\gamma_1^x)}(v,w)] = [\sigma_x^2 \circ \gamma, (\gamma_0^x v, \gamma_0^x \gamma_1^x(v,v) + \gamma_0^x)].$$

Lema 32 *La imagen por $\boldsymbol{\delta}$* (ver L.27) *de un alzado ω-horizontal de γ a $T^L M$ es un alzado ω-horizontal de γ a $T^2 M$.*

Demostración: Escribiendo $\delta(v,\alpha) = (v,w)$ ($\Leftrightarrow w = \alpha v$) entonces, obviamente, $[\gamma_\omega,(v,w)] = \boldsymbol{\delta} \circ [\gamma_\omega,(v,\alpha)]$.

Análogamente al caso lineal (apartado 1.5), definamos las geodésicas (de orden dos) respecto de ω.

Definición 20 *Una curva γ en M es una* geodésica (de orden dos) respecto de *ω si el alzado natural γ^2 a $T^2 M$* (D.18) *verifica $\gamma^2 = [\gamma_\omega,(v,w)]$, con $v,w \in \mathbf{R}^n$ tales que $\gamma^2 0 = [\gamma_\omega 0,(v,w)]$.*

Sabemos (ver N.43) que $\gamma^2 = [\sigma_x^2 \circ \gamma, (\dot\gamma^x, \ddot\gamma^x)]$. Por tanto, una curva γ es geodésica respecto de ω si y solo si

$$\begin{cases} \dot\gamma^x = \gamma_0^x v, \\ \ddot\gamma^x = \gamma_0^x \gamma_1^x(v,v) + \gamma_0^x w, \end{cases}$$

para algunos $v, w \in \mathbf{R}^n$; si y solo si

$$\begin{cases} (\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x = v, \\ (\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x - \gamma_1^x(v,v) = w, \end{cases}$$

para algunos $v, w \in \mathbf{R}^n$; si y solo si

$$\begin{cases} \frac{d}{du}((\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x) = 0, \\ \frac{d}{du}((\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x - \gamma_1^x((\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x, (\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x) = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación da (ver 1.5(a))

$$-(\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}_0^x(\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x + (\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x = 0;$$

y la segunda ecuación da (usando la que acabamos de hallar)

$$-(\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}_0^x(\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x + (\gamma_0^x)^{-1}\dddot{\gamma}^x - \dot{\gamma}_1^x((\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x, (\gamma_0^x)^{-1}\dot{\gamma}^x) = 0,$$

equivalente a

$$-\dot{\gamma}_0^x(\gamma_0^x)^{-1}\ddot{\gamma}^x + \dddot{\gamma}^x - (\dot{\gamma}_1^x)_{\gamma_0^x}(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) = 0.$$

Ahora, usando las ecuaciones (1) de 4.1, queda que γ es geodésica (de orden dos) respecto de ω si y solo si

$$(2) \qquad \begin{cases} \ddot{\gamma}^x + (\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) = 0, \\ \dddot{\gamma}^x + (\Gamma \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \ddot{\gamma}^x) + (\bar{\Gamma} \circ \gamma)(\dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x, \dot{\gamma}^x) = 0. \end{cases}$$

Lema 33 *Si una curva es geodésica (de orden dos) respecto de ω lo es también respecto de la conexión lineal inducida λ_ω.*

Demostración: Una curva geodésica de orden dos respecto de ω, debe vericar las dos ecuaciones (2); y la primera ecuación es la ecuación estándar de las geodésicas respecto de la conexión lineal inducida λ_ω. También puede verse sin recurrir a las ecuaciones. Basta tener en cuenta que $\rho^{2,1} \circ \gamma^2 = \gamma_*$ (N.43), que $\rho^{2,1}([\gamma_\omega, (v,w)]) = [\gamma_{\lambda_\omega}, v]$ y que la condición de que γ sea geodésica respecto de λ_ω se escribió (apartado 1.5(a)) $\gamma_* = [\gamma_{\lambda_\omega}, v]$, con $v \in \mathbf{R}^n$ tal que $\gamma_* 0 = [\gamma_{\lambda_\omega} 0, v)]$.

El recíproco es cierto en el caso de conexiones de segundo orden inducidas por conexiones lineales simétricas (ver D.15, IV.4.2).

Lema 34 *Si ω_λ es la conexión en $F^2(M)$ inducida por una conexión simétrica λ en LM las geodésicas respecto de λ coinciden con las geodésicas respecto de ω_λ.*

Demostración: Si derivamos la primera ecuación de (2) se obtiene

$$\dddot{\gamma}^x + ((d\Gamma)\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x)\,(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) + (\Gamma\circ\gamma)\,(\ddot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) + (\Gamma\circ\gamma)\,(\dot{\gamma}^x,\ddot{\gamma}^x) = 0.$$

Por otro lado la conexion de segundo orden inducida por una conexión lineal simétrica verifica (ver N.33.b):

$$\bar{\Gamma}(dx) = d\Gamma + \Gamma^{\Gamma(dx)};\ \Longrightarrow\quad (\bar{\Gamma}\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x) = ((d\Gamma)\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x) + (\Gamma\circ\gamma)^{(\Gamma\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x)}.$$

En particular verifica

$$\begin{aligned}
(\bar{\Gamma}\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) &= ((d\Gamma)\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x)\,(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) + \\
&\qquad + (\Gamma\circ\gamma)^{(\Gamma\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x)}(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) = \\
\text{(L.2.b.vi)} &= ((d\Gamma)\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x)\,(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) - \\
&\qquad - (\Gamma\circ\gamma)\,((\Gamma\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x),\dot{\gamma}^x) = \\
\text{(1^{a} ecuación de (2))} &= ((d\Gamma)\circ\gamma)(\dot{\gamma}^x)\,(\dot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x) + (\Gamma\circ\gamma)(\ddot{\gamma}^x,\dot{\gamma}^x).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la derivada hallada arriba de la primera ecuación de (2) nos da la segunda ecuación de (2).

Nota 46 Las conexiones en $F^2(M)$ cuyas geodésicas (de orden dos) coinciden con las geodésicas de la conexión inducida en LM son destacadas en [CDL, 10.4] (véanse allí referencias) como *conexiones de segundo orden "admisibles"*. El lema anterior prueba que toda conexión de segundo orden inducida por una conexión lineal simétrica es "*admisible*".

Recordemos el apartado 1.4(a). Sea X un campo de vectores sobre M y sea X_ω el alzado ω-horizontal de X a $F^2(M)$ (I.3.3). El campo sobre T^LM (respectivamente, sobre T^2M) $(v,\alpha)^\smile_*\circ X_\omega$ (resp., $(v,w)^\smile_*\circ X_\omega$) es, por definición, el alzado ω-horizontal de X a T^LM (resp., a T^2M) y su construcción no depende del $(v,\alpha)\in\mathbf{R}^n+\mathfrak{gl}(n)$ (resp., del $(v,w)\in\mathbf{R}^{2n}$) que se elija. Las curvas integrales de este campo sobre T^LM (resp., sobre T^2M) son alzados ω-horizontales a T^LM (resp., a T^2M) de las curvas integrales de X. Es inmediato (ya que $(\delta(v,\alpha))^\smile = \boldsymbol{\delta}\circ(v,\alpha)^\smile$; ver L.27, apartado 3.3) que $\boldsymbol{\delta}_*$ compuesto con el alzado ω-horizontal de X a T^LM da lugar al alzado ω-horizontal de X a T^2M.

Recordemos también las definiciones de alzados naturales $[\tilde{X}]$ a T^LM (D.16) y X^2 a T^2M (D.19) de un campo X sobre M, así como la relación que los liga (L.28). Podemos considerar los casos en que $[\tilde{X}]\in Sec(T^LM)$ sea una sección de T^LM ω-horizontal o que $X^2\in Sec(T^2M)$ sea una sección de T^2M ω-horizontal.

Lema 35 *Sea X un campo de vectores sobre M.*

a. *Si $[\tilde{X}]$ es una sección de T^LM ω-horizontal entonces X^2 es una sección de T^2M ω-horizontal.*

b. *Si X^2 es una sección de T^2M ω-horizontal entonces X es un campo λ_ω-paralelo* (ver 1.5(a)).

> **Demostración:** El apartado **a** se sigue de los lemas L.28 y L.32 y de las definiciones en 1.4(a). Para el apartado **b** nótese que $X = \rho^{2,1} \circ X^2$ y que si H es el subespacio ω-horizontal en $[z,(v,w)] \in T^2M$ entonces $\rho^{2,1}_*(H)$ es el subespacio λ_ω-horizontal en $[\Pi(z),v)] \in TM$.

4.3 Tensores de torsión y curvatura de segundo orden

En este apartado se obtienen, dada una conexión de segundo orden ω, los objetos análogos a los tensores de torsión y curvatura para una conexión lineal.

Recordemos la siguiente construcción (véase [GHV, II, secs.7 y 8]):
Sea $P(M,G)$ un fibrado principal y $\mathcal{A}$ una representación de G en F. Sea $\mathcal{A}P$ el fibrado vectorial asociado a P y a $\mathcal{A}$. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{q}: & P\times F & \longrightarrow & \mathcal{A}P \\ & (p,\xi) & \longmapsto & \hat{p}(\xi)\equiv[p,\xi], \end{array}$$

se puede considerar una aplicación fibrada entre el fibrado trivial $P\times F$ sobre P y el fibrado vectorial $\mathcal{A}P$ sobre M, que induce entre las bases la aplicación $\pi : P \to M$. La aplicación $\mathbf{q}$, restringida a una fibra $\{p\}\times F$, establece un isomorfismo entre F y $F_{\pi(p)}$. Entonces (véase [GHV, II, Sec.7.3, p.308]) se puede definir la aplicación $\mathbf{R}$-lineal $(\forall\, r \geq 0)$

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{q}^\flat: & \Lambda^r(M,\mathcal{A}P) & \longrightarrow & \Lambda^r(P,F) \\ & \boldsymbol{\mu} & \longmapsto & \mathbf{q}^\flat(\boldsymbol{\mu}), \end{array}$$

dada (para $X_1,\ldots,X_r \in T_pP$) por

$$\mathbf{q}^\flat(\boldsymbol{\mu})(X_1,\ldots,X_r) := \hat{p}^{-1}(\boldsymbol{\mu}(\pi_*X_1,\ldots,\pi_*X_r)) \in F$$

(ver 1.4(b) para la notación $\Lambda^r(M,\mathcal{A}P)$). Se puede probar (siguiendo a [GHV, II, Sec.8.22, Prop.9]) que $\mathbf{q}^\flat$ establece un isomorfismo entre $\Lambda^r(M,\mathcal{A}P)$ y el conjunto $\overline{\Lambda}^r(P,F)$ de r-formas F-valuadas *tensoriales* $\boldsymbol{\mu}$ sobre P, es decir, que se anulan si se aplican sobre algún vector vertical y que verifican

$$R_a^*\boldsymbol{\mu} = \mathcal{A}_{a^{-1}} \circ \boldsymbol{\mu}.$$

En el caso $r = 0$, $\mathbf{q}^\flat : Sec(\mathcal{A}P) \to \overline{\mathcal{F}}(P,F)$ es la biyección dada al final del apartado 1.1, que ahora resulta ser un isomorfismo $\mathbf{R}$-lineal.

Definición 21 *Sea ω una conexión de segundo orden y sean Θ_ω y Ω_ω la torsión de segundo orden y curvatura asociadas* (D.11, IV.3).

a. *Llamamos* "tensor" de torsión de segundo orden *a la 2-forma T^LM-valuada $T_\omega \in \Lambda^2(M, T^LM)$ definida por*

$$T_\omega(X,Y) := \hat{z}(\Theta_\omega(\bar{X},\bar{Y})),$$

con $X,Y \in T_mM$, $z \in F^2(M)$, $\pi(z) = m$, $\bar{X},\bar{Y} \in T_zF^2(M)$ tales que $\pi_*(\bar{X}) = X$, $\pi_*(\bar{Y}) = Y$ y $\hat{z}$ la aplicación definida en 1.1 *relativa al fibrado asociado T^LM.*

b. *Llamamos* "tensor" de curvatura de segundo orden *a la 2-forma $AdF^2(M)$-valuada $R_\omega \in \Lambda^2(M, AdF^2(M))$ definida por*

$$R_\omega(X,Y) := \hat{z}(\Omega_\omega(\bar{X},\bar{Y})),$$

con $X,Y \in T_mM$, $z \in F^2(M)$, $\pi(z) = m$, $\bar{X},\bar{Y} \in T_zF^2(M)$ tales que $\pi_*(\bar{X}) = X$, $\pi_*(\bar{Y}) = Y$ y $\hat{z}$ la aplicación definida en 1.1 *relativa al fibrado asociado $AdF^2(M)$.*

Comprobemos que es una buena definición, independiente de los $z, \bar{X}, \bar{Y}$ elegidos. Si variamos $\bar{X},\bar{Y}$ en $T_zF^2(M)$ con $\pi_*(\bar{X}) = X$, $\pi_*(\bar{Y}) = Y$, el resultado no cambia ya que tanto Θ_ω como Ω_ω son tensoriales. Entonces basta ver, para **a**, que

$$\widehat{z(a,t)}(\Theta_\omega(R_{(a,t)*}\bar{X}, R_{(a,t)*}\bar{Y})) = [z(a,t), \mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}\Theta_\omega(\bar{X},\bar{Y})] =$$
$$\text{(L.9)} \quad = [(R^L_a \circ z), \Theta_\omega(\bar{X},\bar{Y})] = \hat{z}(\Theta_\omega(\bar{X},\bar{Y}));$$

y análogamente para **b**.

Definamos, como se hace al principio de este apartado,

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{q}: & F^2(M) \times (\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)) & \longrightarrow & T^LM \\ & (z,(v,\alpha)) & \longmapsto & \hat{z}(v,\alpha) \equiv [z,(v,\alpha)] \end{array}$$

correspondiente al fibrado vectorial asociado T^LM, y

$$\begin{array}{rccc} \bar{\mathbf{q}}: & F^2(M) \times (\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)) & \longrightarrow & AdF^2(M) \\ & (z,(\alpha,s)) & \longmapsto & \hat{z}(\alpha,s) \equiv [z,(\alpha,s)] \end{array}$$

correspondiente al fibrado vectorial asociado $AdF^2(M)$.

Lema 36 *Se verifica:*

a. $\mathbf{q}^\flat(T_\omega) = \Theta_\omega$

b. $\bar{\mathbf{q}}^{\flat}(R_\omega) = \Omega_\omega$.

Demostración: Sean $X, Y \in T_mM$, $z \in F^2(M)$, $\pi(z) = m$, y $\bar{X}, \bar{Y} \in T_zF^2(M)$ tales que $\pi_*(\bar{X}) = X$, $\pi_*(\bar{Y}) = Y$. Por la definición dada en 1.4.(d) se tiene, para **a**,

$$\mathbf{q}^{\flat}(T_\omega)(\bar{X}, \bar{Y}) = \hat{z}^{-1}(T_\omega(\pi_*\bar{X}, \pi_*\bar{Y})) = \hat{z}^{-1}(\hat{z}(\Theta_\omega(\bar{X}, \bar{Y}))) = \Theta_\omega(\bar{X}, \bar{Y});$$

y análogamente para **b**.

Nota 47

a. Bajo la aplicación $\mathfrak{r} : T^LM \to TM$ dada en el L.18, se comprueba fácilmente que $T^L_\omega := \mathfrak{r} \circ T_\omega$ es el clásico *tensor de torsión* para la conexión lineal λ_ω inducida por ω. Por otro lado, identificando el fibrado vectorial $AdF^2(M)$ con cierto subfibrado vectorial de $End(T^LM)$ bajo la aplicación

$$(1) \qquad \begin{aligned} AdF^2(M) &\longrightarrow End(T^LM) \\ [z, (\alpha, s)] &\longmapsto \hat{z} \circ \mathfrak{a}^2{}_{(\alpha,s)} \circ \hat{z}^{-1}, \end{aligned}$$

y definiendo

$$\bar{\mathfrak{r}} : End(T^LM) \longrightarrow End(TM) \equiv AdLM \text{ (ver 1.5.c)}$$

como la única aplicación que hace conmutativo el siguiente diagrama ($\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in End(T^LM)$)

$$\begin{array}{ccc} T^LM & \xrightarrow{\alpha} & T^LM \\ \downarrow \mathfrak{r} & & \downarrow \mathfrak{r} \\ TM & \xrightarrow{\bar{\mathfrak{r}}(\alpha)} & TM, \end{array}$$

se comprueba fácilmente que $R^L_\omega := \bar{\mathfrak{r}} \circ R_\omega$ es el clásico *tensor de curvatura* para λ_ω.

La aplicación (1) dada arriba está bien definida pues, por $\widehat{z(a,t)} = \hat{z} \circ \mathcal{A}^2{}_{(a,t)}$ (ver 1.1) y por un cálculo directo, se sigue que

$$\widehat{z(a,t)} \circ \mathfrak{a}^2{}_{Ad_{(a,t)^{-1}}(\alpha,s)} \circ \widehat{z(a,t)}^{-1} = \hat{z} \circ \mathfrak{a}^2{}_{(\alpha,s)} \circ \hat{z}^{-1}.$$

Fácilmente se prueba que la aplicación definida es un monomorfismo de fibrados vectoriales.

Un tratamiento, similar al dado aquí, para los tensores de torsión y curvatura *del caso lineal* se halla en [GHV, II, p.403 y ss.].

b. Coordenadas de T_ω y R_ω. Sea (x,U) una carta en M. Por definición, se tiene

$$T_\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^p}|_m, \tfrac{\partial}{\partial x^q}|_m) = [\sigma^2_x(m), \Theta_\omega(\sigma^2_{x*}(\tfrac{\partial}{\partial x^p}|_m, \tfrac{\partial}{\partial x^q}|_m))].$$

Demos a T^LM las coordenadas (ver N.36)

$$(x, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0)[\sigma^2_x(m), (v,\alpha)] := (x(m), v, \alpha),$$

y escribamos $\tilde{x}_{-1} \equiv (\tilde{x}^i)$ y $\tilde{x}_0 \equiv (\tilde{x}^i_j)$. Por definición, se tiene

$$(\tilde{x}^i, \tilde{x}^i_j)(T_\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^p}|_m, \tfrac{\partial}{\partial x^q}|_m) = (T^i_{pq}, T^i_{jpq}),$$

siendo estas últimas funciones las coordenadas de Θ_ω definidas en N.29, Cap.IV.

Por otro lado, demos a $AdF^2(M)$ las coordenadas

$$(x, \tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{x}}_1)[\sigma^2_x(m), (\alpha, s)] := (x(m), \alpha, s),$$

y escribamos $\tilde{\tilde{x}}_0 \equiv (\tilde{\tilde{x}}^i_j)$ y $\tilde{\tilde{x}}_1 \equiv (\tilde{\tilde{x}}^i_{jk})$. Por definición, se tiene

$$R_\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^p}|_m, \tfrac{\partial}{\partial x^q}|_m) = [\sigma^2_x(m), \Omega_\omega(\sigma^2_{x*}(\tfrac{\partial}{\partial x^p}|_m, \tfrac{\partial}{\partial x^q}|_m))];$$

se sigue que

$$(\tilde{\tilde{x}}^i_j, \tilde{\tilde{x}}^i_{jk})(R_\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^p}|_m, \tfrac{\partial}{\partial x^q}|_m) = (R^i_{jpq}, R^i_{jkpq}),$$

siendo estas últimas funciones las coordenadas de Ω_ω definidas en N.29, Cap.IV.

Capítulo VI

G-estructuras 1-integrables.

En este capítulo queremos estudiar sobre todo las G-estructuras 1-integrables (que son las que admiten conexiones lineales simétricas). Una G-estructura de este tipo define una reducción de $F^2(M)$ con grupo de estructura el que hemos dado en llamar el "levantamiento" al orden dos G^2 del grupo $G \subset GL(n)$. Probaremos que dicha reducción se puede considerar isomorfa a la *primera prolongación* de la G-estructura (en el sentido de [Ste] y [Ko2]) que, en este caso, resulta estar unívocamente definida. También estudiaremos el concepto de *segunda prolongación*, definido para G-estructuras 1-integrables, en analogía con el concepto de primera prolongación; nos ocuparemos especialmente del caso en que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G sea de tipo (finito) 2.

Comenzamos (Sec.1) con la noción de "levantamiento" al orden r, G^r, de un subgrupo de Lie G de $GL(n)$; G^r es un grupo de Lie, que involucra las prolongaciones hasta orden $r-1$ del álgebra $\mathfrak{g}$ de G. Estudiamos en detalle los levantamientos a órdenes 2 y 3 y ciertas representaciones naturales asociadas (L.37 al L.40). Consideramos a continuación (Sec.2) la noción de $(r-1)$-integrabilidad de una G-estructura $P(M,G)$, equivalente a la posibilidad de definir el que hemos llamado "levantamiento" al orden r, P^r, de P; en tal caso, se sabe ([Gui]) que P^r tiene una estructura de fibrado principal sobre M, reducción de $F^r(M)$ con grupo de estructura G^r. Cuando además es $\mathfrak{g}_r = 0$, tiene interés definir (D.27) lo que entendemos por *formas de tipo Cartan* sobre P^r, que en ciertos casos resultan ser conexiones de Cartan (ver Cap.VII).

En la sección 3 recordamos la definición de primeras prolongaciones de una G-estructura y reformulamos algunos resultados ya conocidos sobre existencia de conexiones functoriales en G-estructuras (T.5) y de conexiones con una torsión prescrita de antemano (L.44). La existencia de conexiones simétricas sobre una G-estructura $P(M,G)$, que es equivalente a la 1-integrabilidad de ésta, resulta también equivalente (T.6) a la unicidad de su primera prolongación, que puede entonces identificarse (L.46) con el levantamiento al orden 2, P^2, de P.

Finalmente, en la sección 4 (la más importante) estudiamos (4.1) el concepto de *segunda prolongación* P^2 de una G-estructura 1-integrable P. Cuando $\mathfrak{g}$ es de tipo (finito) 2, encontramos: que las conexiones en P^2, con igual conexión lineal inducida simétrica (en P), vienen caracterizadas por su torsión de segundo orden (T.7); que cada segunda prolongación de P (de cierto tipo) induce sobre P^2 una forma canónica de tipo Cartan (T.8), de cuya curvatura calculamos su ecuación de estructura (T.9); y que cada conexión simétrica en P induce, a partir de una forma de tipo Cartan sobre P^2, una conexión en P^2, y viceversa (T.10). Por último (4.3), encontramos (sin restricciones sobre el tipo de $\mathfrak{g}$) que la existencia de conexiones en P^2 con torsión de segundo orden nula es equivalente a la 2-integrabilidad de P y equivalente a la unicidad de su segunda prolongación (T.11).

1 Levantamientos de grupos de matrices.

En el apartado 1.1 se define la r-ésima prolongación $\mathfrak{g}_r$ (D.22) de una subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(n)$, y también lo que se entiende por que $\mathfrak{g}$ sea de tipo finito (D.23); en 1.2 se explicitan las nociones básicas de la cohomología bigraduada de Spencer para subálgebras de $\mathfrak{gl}(n)$.

Un subgrupo de Lie G de $GL(n)$ da lugar a una G-estructura canónica sobre $\mathbf{R}^n$, que es (D.24) la que resulta de mover por G la sección global σ_I del fibrado de referencias $L\mathbf{R}^n$ definida por la carta estándar de $\mathbf{R}^n$. El subgrupo de $G^r(n)$ constituido por los r-jets de difemorfismos (locales de $\mathbf{R}^n$ que preservan el 0) para los cuales la transformada de σ_I tiene orden de tangencia $r-1$ sobre el 0 con alguna sección de la G-estructura canónica constituyen el *levantamiento al orden* r, G^r, de G (D.25). G^r resulta ser un subgrupo de Lie de $G^r(n)$. La representación natural (II.1.4) $\mathcal{A}^r$ de $G^r(n)$ restringe bien a una representación (denotada igual) $\mathcal{A}^r : G^r \to GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \cdots + \mathfrak{g}_{r-2})$. Cuando $\mathfrak{g}$ es de tipo finito $r-1$, entonces $\mathcal{A}^r$ induce una representación $\overline{\mathcal{A}}^r : G^{r-1} \to GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \cdots + \mathfrak{g}_{r-2})$. Todo ello se comenta, sin detalle de demostraciones, en el apartado 1.3.

Estudiamos a continuación (apartados 1.4 y 1.5) los levantamientos G^2 (L.37) y G^3 (L.39) de un subgrupo de Lie G de $GL(n)$, explicitando las representaciones adjuntas (L.35 para G^2) y las representaciones $\mathcal{A}^2$ (L.38) y $\mathcal{A}^3$, así como también las $\overline{\mathcal{A}}^2$ (cuando $\mathfrak{g}_1 = 0$) y $\overline{\mathcal{A}}^3$ (cuando $\mathfrak{g}_2 = 0$; L.40).

1.1 Prolongaciones de álgebras de matrices.

En toda esta sección $r \in \mathbf{N}$, $r > 0$.

Definición 22 *Sea* $\mathfrak{g}$ *una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(n)$. *La* r-ésima prolongación, $\mathfrak{g}_r$, *de* $\mathfrak{g}$ *es el espacio vectorial*

$$\mathfrak{g}_r := \{t \in S^{r+1}(n) \ : \ t(v_1, \ldots, v_r, \cdot) \in \mathfrak{g}, \ \forall\, v_1, \ldots, v_r \in \mathbf{R}^n\}.$$

Se define, además, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g}_{-1} := \mathbf{R}^n$.

Nota 48

a. Resulta obvio que una definición alternativa de $\mathfrak{g}_r$, por recurrencia, es (dando por supuesto $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_r := & \ \{t \in S^{r+1}(n) \ : \ t(v) \in \mathfrak{g}_{r-1}, \ \forall\, v \in \mathbf{R}^n\} = \\ = & \ L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_{r-1}) \cap S^{r+1}(n) \end{aligned}$$

(recordar la notación $t(v)$ en N.1, I.2.3).

b. Como consecuencia de (a) nótese que: $\mathfrak{g}_r = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}_{r'} = 0$, $\forall\, r' > r$.

c. Obviamente: $(\mathfrak{gl}(n))_r = S^{r+1}(n)$.

Definición 23 *Se dice que* $\mathfrak{g}$ *es de* tipo (finito) r *si* $\mathfrak{g}_{r-1} \neq 0$ *y* $\mathfrak{g}_r = 0$. *Se dice que* $\mathfrak{g}$ *es de* tipo infinito *si* $\mathfrak{g}_r \neq 0$, $\forall\, r$.

Sobre la suma directa de espacios vectoriales $\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$ definimos el corchete siguiente

$$\begin{cases} [t_p, t'_q] := \frac{(p+q+1)!}{p!(q+1)!}\mathbb{S}(t_p(t'_q(\cdot, \overset{q+1}{\ldots}, \cdot), .\overset{p}{.}, \cdot)) - \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!q!}\mathbb{S}(t'_q(t_p(\cdot, \overset{p+1}{\ldots}, \cdot), .\overset{q}{.}, \cdot)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } p+q \leq r-1, \\ [t_p, t'_q] := 0, \quad \text{si } p+q > r-1, \end{cases}$$

con $t_p \in \mathfrak{g}_p$, $t'_q \in \mathfrak{g}_q$, $p, q \geq 0$ (resulta que $[t_p, t'_q] \in \mathfrak{g}_{p+q}$). Se dota así a $\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$ de una estructura de *álgebra de Lie*, subálgebra de $\sum_{s=0}^{r-1} S^{s+1}(n)$ (ver II.1.3).

Nota 49

a. Sea $0 \leq r' < r$; el núcleo $\sum_{s=r'}^{r-1} \mathfrak{g}_s$ del homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s & \longrightarrow & \sum_{s=0}^{r'-1} \mathfrak{g}_s \\ (t_0, \ldots, t_{r'-1}, t_{r'}, \ldots, t_{r-1}) & \longmapsto & (t_0, \ldots, t_{r'-1}) \end{array}$$

es un ideal nilpotente (y $\mathfrak{g}_{r-1}$ un ideal abeliano) del álgebra $\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$ y se tiene:

$$\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g} \supset \sum_{s=1}^{r-1} \mathfrak{g}_s$$

(suma semidirecta; ver notación en I.1.3). Obsérvese que, salvo que $r = 2$, *no* se puede escribir $\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s = \sum_{s=0}^{r-2} \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}_{r-1}$ (el subespacio $\sum_{s=0}^{r-2} \mathfrak{g}_s$ *no cierra* como subálgebra de $\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$).

b. Sobre la suma directa de espacios vectoriales

$$\sum_{s=-1}^{r-1} \mathfrak{g}_s = \mathbf{R}^n + \sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$$

se puede definir un corchete como arriba, añadiendo ($\forall\, v, v' \in \mathbf{R}^n$, $\forall\, t_s \in \mathfrak{g}_s$, $0 \leq s \leq r-1$)

$$\begin{cases} [v, v'] := 0, \\ [t_s, v] := t_s(v). \end{cases}$$

Pero este corchete *no* satisface la identidad de Jacobi, salvo que $r = 1$ (en tal caso se obtiene la subálgebra afín $\mathbf{R}^n \in \mathfrak{g}$) o que $\mathfrak{g}_r = 0$ (esto es, $\mathfrak{g}$ es de tipo finito $\leq r$; en tal caso se tiene: $\sum_{s=-1}^{r-1} \mathfrak{g}_s = \mathbf{R}^n \in \sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$). Por ejemplo, si $\mathfrak{g}$ es de tipo 2, el corchete de Lie en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$ es

$$[(v, \alpha, t), (v', \alpha', t')] := (\alpha v' - \alpha' v, [\alpha, \alpha'] + t(v') - t(v), t'^{\alpha} - t^{\alpha'}).$$

1.2 Cohomología de Spencer de $\mathfrak{g}$.

La cohomología de Spencer de una subálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(n)$ es de gran importancia en el estudio de las sucesivas prolongaciones y de la integrabilidad de una G-estructura. Definimos aquí sucintamente esta cohomología (véase p.ej. [Gui]; ver también 1.1 y I.2.3 para notación).

El complejo bigraduado de Spencer se define como la suma formal $\sum_{p,q} C^{p,q}(\mathfrak{g})$, siendo

$$C^{p,q}(\mathfrak{g}) := \begin{cases} A^q(n, \mathfrak{g}_{p-1}), & \text{si } p, q \geq 0 \\ 0 & \text{si } p \text{ ó } q < 0, \end{cases}$$

donde $A^q(n, \mathfrak{g}_{p-1})$ es el subespacio vectorial de $L(\mathbf{R}^n \times \overset{q}{\ldots} \times \mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_{p-1}) \subset L(\mathbf{R}^n \times \overset{q}{\ldots} \times \mathbf{R}^n, S^p(n)) \subset L^{p+q}(n)$ constituido por las aplicaciones antisimétricas en los q primeros índices con valores en $\mathfrak{g}_{p-1}$. Puesto que $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbf{R}^n$, es $C^{0,q}(\mathfrak{g}) = A^q(n, \mathfrak{g}_{-1}) = A^q(n)$ (si $q > 0$). Se sobrentiende que $C^{p,0}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{p-1}$ (si $p \geq 0$), en particular $C^{0,0}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}^n$. El operador de Spencer se define como la aplicación

$$\partial : C^{p,q}(\mathfrak{g}) \to C^{p-1,q+1}(\mathfrak{g}), \quad \begin{cases} t \mapsto \mathbb{A}_{1,\ldots,q+1}(t), & \text{si } p > 0,\ q \geq 0 \\ t \mapsto 0, & \text{si } p \leq 0 \text{ ó } q < 0, \end{cases}$$

donde

$$\mathbb{A}_{1,\dots,q+1}(t)(v_1,\dots,v_{q+p}) := \\ := \frac{1}{(q+1)!}\sum_{\sigma\in P_{q+1}}(-1)^\sigma t(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q+1)},v_{q+2},\dots,v_{q+p})$$

es el *antisimetrizado de t en los $q+1$ primeros índices.* Si $t \in C^{1,q}(\mathfrak{g}) = A^q(n,\mathfrak{g})$ $(q>0)$ es $\mathbb{A}_{1,\dots,q+1}(t) = \mathbb{A}(t)$ (ver I.2.3). Por otra parte, $\partial|_{C^{p,0}(\mathfrak{g})}$ $(p>0)$ no es sino la inclusión de $A^0(n,\mathfrak{g}_{p-1}) \equiv \mathfrak{g}_{p-1}$ en $A^1(n,\mathfrak{g}_{p-2}) \equiv L(\mathbf{R}^n,\mathfrak{g}_{p-2})$.

Las secuencias resultantes pueden escribirse como sigue:

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$
$p+q=0$	$0\to\mathbf{R}^n\to$	0			
$p+q=1$	$0\to\mathfrak{g}\hookrightarrow$	$\mathfrak{gl}(n)$	$\longrightarrow 0$		
$p+q=2$	$0\to\mathfrak{g}_1\hookrightarrow$	$L(\mathbf{R}^n,\mathfrak{g})$	$\xrightarrow{\mathbb{A}} A^2(n)$	$\longrightarrow 0$	
$p+q=3$	$0\to\mathfrak{g}_2\hookrightarrow$	$L(\mathbf{R}^n,\mathfrak{g}_1)$	$\xrightarrow{\mathbb{A}_{12}} A^2(n,\mathfrak{g})$	$\xrightarrow{\mathbb{A}} A^3(n)$	$\to 0$
$p+q=4$	$0\to\mathfrak{g}_3\hookrightarrow$	$L(\mathbf{R}^n,\mathfrak{g}_2)$	$\xrightarrow{\mathbb{A}_{12}} A^2(n,\mathfrak{g}_1)$	$\xrightarrow{\mathbb{A}_{123}} A^3(n,\mathfrak{g})$	$\xrightarrow{\mathbb{A}} A^4(n)\to 0$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Es obvio que $\partial\circ\partial = 0$. Escribiendo $Z^{p,q}(\mathfrak{g}) := Ker(\partial|_{C^{p,q}(\mathfrak{g})}) \subset C^{p,q}(\mathfrak{g})$ y $B^{p,q}(\mathfrak{g}) := Im(\partial|_{C^{p+1,q-1}(\mathfrak{g})}) \subset C^{p,q}(\mathfrak{g})$, se definen los grupos de cohomología

$$H^{p,q}(\mathfrak{g}) := \frac{Z^{p,q}(\mathfrak{g})}{B^{p,q}(\mathfrak{g})}.$$

Es claro que $Z^{p,0}(\mathfrak{g}) = 0$, si $p>0$; con lo que $H^{p,0}(\mathfrak{g}) = 0$, si $p>0$. Por otra parte, $B^{p,1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_p$, si $p \geq 0$; y de la definición de prolongación (N.48.a) se deduce que $Z^{p,1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_p$, si $p>0$; con lo que $H^{p,1}(\mathfrak{g}) = 0$, si $p>0$. Para cualquier $\mathfrak{g}$, la tabla de los grupos de cohomología de Spencer puede escribirse como sigue

$H^{0,0}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}^n$				
0	$H^{0,1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(n)/\mathfrak{g}$			
0	0	$H^{0,2}(\mathfrak{g})$		
0	0	$H^{1,2}(\mathfrak{g})$	$H^{0,3}(\mathfrak{g})$	
0	0	$H^{2,2}(\mathfrak{g})$	$H^{1,3}(\mathfrak{g})$	$H^{0,4}(\mathfrak{g})$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Los grupos de cohomología que afectan a nuestro estudio son los de la forma $H^{p,2}(\mathfrak{g})$ (véase [Gui]). Trivialmente se ve que, para $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, todas las secuencias de la cohomología de Spencer son exactas, esto es, $H^{p,q}(\mathfrak{gl}(n)) = 0$, $\forall\, p,q$.

1.3 Levantamientos de grupos de matrices.

Consideremos el fibrado de referencias lineales $\pi^L : L\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Denotaremos por (ver I.4.2) σ_I a la sección global de $L\mathbf{R}^n$ correspondiente a la carta identidad $I \equiv (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ de $\mathbf{R}^n$.

Bajo los isomorfismos canónicos (ver II.1.4)

$$\begin{array}{ccccc} F^1(\mathbf{R}^n) & \longrightarrow & L\mathbf{R}^n & \stackrel{(u_{-1},u_0)}{\longrightarrow} & \mathbf{R}^n \times GL(n) \\ j^1(\varphi) & \longmapsto & l \equiv \varphi_*|_0 & \longmapsto & (\varphi(0), D\varphi|_0), \end{array}$$

se tiene la correspondencia $(\forall\, v \in \mathbf{R}^n)$

$$j^1(T_v) \longmapsto \sigma_I(v) \equiv T_{v*}|_0 \longmapsto (v, I).$$

Para cada $v \in \mathbf{R}^n$, la referencia $\sigma_I(v)$ no es otra que el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & T_v\mathbf{R}^n \\ w & \longmapsto & \gamma_*|_0, \end{array}$$

siendo la curva $\gamma : \tau \mapsto v + \tau w$.

Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$; se obtiene el siguiente subfibrado principal de $L\mathbf{R}^n$ canónicamente isomorfo a $\mathbf{R}^n \times G$.

Definición 24 *La* G-estructura canónica *sobre* $\mathbf{R}^n$ *es*

$$G\mathbf{R}^n := \{l \in L\mathbf{R}^n :\ l = \sigma_I(\pi^L(l))\, a,\ \textit{con}\ a \in G\}.$$

Sea $g \in \mathcal{D}_{0,0}(\mathbf{R}^n)$, esto es, un difeomorfismo $g : U \to V$ entre entornos de $0 \in \mathbf{R}^n$, con $g(0) = 0$. Recordemos el isomorfismo $\tilde{g}$ de fibrados principales (D.6 en III.2.2):

$$\begin{array}{rccc} \tilde{g}: & L\mathbf{R}^n|_U & \longrightarrow & L\mathbf{R}^n|_V \\ & j^1(\psi) \equiv l & \longmapsto & j^1(g \circ \psi) \equiv g_*|_{\pi^L(l)} \circ l. \end{array}$$

Definamos ahora:

Definición 25 *El* levantamiento al orden r *(o* r-levantamiento*) de* G *es*

$$G^r := \{j^r(g) \in G^r(n) : \exists\, \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n) \text{ con } j^{r-1}(\tilde{g} \circ \sigma_I) = j^{r-1}(\sigma \circ g)\}.$$

Esta definición involucra $(r-1)$-jets en $0 \in \mathbf{R}^n$ de aplicaciones de (abiertos de) $\mathbf{R}^n$ en $L\mathbf{R}^n$.

Nota 50

a. La condición de la definición expresa la idea de que el difeomorfismo $g : U \to V$ *preserva hasta orden* $(r-1)$ (o $(r-1)$-*preserva*) la G-estructura canónica $G\mathbf{R}^n$ en 0; o, en otras palabras, que las subvariedades regulares (de $L\mathbf{R}^n$) $\tilde{g}(Im\,\sigma_I)$ e $Im\,\sigma$ tienen "contacto de orden $(r-1)$" en el punto $\tilde{g}(\sigma_I(0)) = \sigma(0) \in G\mathbf{R}^n$. La expresión clásica de esta condición es: existe una carta $(y, z; \mathcal{U})$ (donde $y \equiv (y^1, \ldots, y^n)$, $z \equiv (z^1, \ldots, z^{n^2})$) en torno a $\tilde{g}(\sigma_I(0)) \in L\mathbf{R}^n$, tal que las ecuaciones de $\tilde{g}(Im\,\sigma_I) \cap \mathcal{U}$ son: $z = 0$ (la carta está adaptada a la subvariedad $\tilde{g}(Im\,\sigma_I)$), mientras que las ecuaciones de $Im\,\sigma \cap \mathcal{U}$ son:

$$z = f(y), \text{ con } D^s f|_{y(\tilde{g}(\sigma_I(0)))} = 0 \quad (0 \leq s \leq r-1),$$

para cierta función $f : y(\mathcal{U}) \subset \mathbf{R}^n \to z(\mathcal{U}) \subset \mathbf{R}^{n^2}$.

b. Es claro que la condición de la definición sólo depende de $j^r(g)$. Por tanto, se puede decir que es el r-jet $j^r(g)$ el que $(r-1)$-*preserva* $G\mathbf{R}^n$.

c. En esta definición, se puede, equivalentemente, reemplazar la ecuación $j^{r-1}(\tilde{g} \circ \sigma_I) = j^{r-1}(\sigma \circ g)$ (que involucra jets de aplicaciones $U \to L\mathbf{R}^n|_V$) por la ecuación $j^{r-1}(\tilde{g} \circ \sigma_I \circ g^{-1}) = j^{r-1}(\sigma)$ (que involucra jets de secciones del fibrado $L\mathbf{R}^n|_V \to V$).

> En efecto: Cualquier difeomorfismo entre abiertos de $\mathbf{R}^n$, $g : U \to V$, induce una biyección entre los jets de aplicaciones de dichos abiertos en una variedad M, $J^k(V, M) \to J^k(U, M), j^k_{g(p)}\psi \mapsto j^k_p(\psi \circ g)$ $(\forall p \in V)$.

d. Se puede, equivalentemente, reemplazar la condición de esta definición por

$$\forall\, \varrho \in Sec_0(G\mathbf{R}^n),\ \exists\, \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n) \text{ tal que } j^{r-1}(\tilde{g} \circ \varrho) = j^{r-1}(\sigma \circ g);$$

o también (por (**c**)):

$$\forall\, \varrho \in Sec_0(G\mathbf{R}^n),\ \exists\, \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n) \text{ tal que } j^{r-1}(\tilde{g} \circ \varrho \circ g^{-1}) = j^{r-1}(\sigma).$$

e. Puesto que $j^1(g) \in G^1 \Leftrightarrow g_*|_0 = (\tilde{g} \circ \sigma_I)(0) \in G\mathbf{R}^n$, se deduce que el grupo G^1 es canónicamente isomorfo a G, por el isomorfismo $j^1(g) \mapsto Dg|_0$. Nosotros identificaremos ambos grupos.

f. Una descripción más operativa de G^r es la siguiente:

$$G^r = \{j^r(g) \in G^r(n) : \exists\, \kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G) \text{ con } Dg|_0 = \kappa(0) \\ \text{y } D^{s+1}g|_0 = D^s\kappa|_0 \ (1 \leq s \leq r-1)\}.$$

identificando $D^s\kappa|_0 \in L(\mathbf{R}^n \times \overset{s}{\cdots} \times \mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n))$ con el elemento de $L^{s+1}(n)$ dado por

$$D^s\kappa|_0(v_1, \ldots, v_{s+1}) \equiv (D^s\kappa|_0(v_1, \ldots, v_s))(v_{s+1});$$

en coordenadas

$$(D^s\kappa|_0)^i_{j_1,\ldots,j_{s+1}} \equiv \frac{\partial^s \kappa^i_{j_{s+1}}}{\partial u^{j_1} \ldots \partial u^{j_s}}.$$

En efecto: Basta tener en cuenta que, en la carta global

$$(u_{-1}, u_0) : L\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \times GL(n),$$

se tiene (para $\sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n)$):

$$\begin{cases} u_{-1} \circ \tilde{g} \circ \sigma_I = g \\ u_0 \circ \tilde{g} \circ \sigma_I = Dg \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{-1} \circ \sigma \circ g = g \\ u_0 \circ \sigma \circ g \equiv \kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G). \end{cases}$$

El conjunto G^r forma un *grupo*, de hecho un *subgupo* de $G^r(n)$, con ley de producto dada, por tanto, por (II.1.1)

$$j^r(g) \cdot j^r(g') := j^r(g \circ g').$$

En efecto: por la nota N.50.d, basta probar que, dados $j^r(g), j^r(g') \in G^r$ y $\varrho \in Sec_0(G\mathbf{R}^n)$, $\exists\, \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n)$ tal que

$$j^{r-1}(\widetilde{g \circ g'} \circ \varrho \circ (g \circ g')^{-1}) = j^{r-1}(\sigma).$$

Pues bien, se tiene:

$$\begin{aligned} j^{r-1}(\widetilde{g \circ g'} \circ \varrho \circ (g \circ g')^{-1}) &= j^{r-1}(\tilde{g} \circ \tilde{g'} \circ \varrho \circ g'^{-1} \circ g^{-1}) = \\ &= j^{r-1}(\tilde{g} \circ \varrho' \circ g^{-1}), \text{ para cierta } \varrho' \in Sec_0(G\mathbf{R}^n), \\ &= j^{r-1}(\sigma), \text{ para cierta } \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n); \end{aligned}$$

respecto de la segunda igualdad, obsérvese que, si bien la sección local de $L\mathbf{R}^n$ $\tilde{g'} \circ \varrho \circ g'^{-1}$ no pertenece, en general, a $Sec_0(G\mathbf{R}^n)$, su $(r-1)$-jet $j^{r-1}(\tilde{g'} \circ \varrho \circ g'^{-1})$ (que es de quien depende el miembro de la izquierda de dicha igualdad) sí puede escribirse (por ser $j^r(g') \in G^r$) como $j^{r-1}(\varrho')$, para cierta $\varrho' \in Sec_0(G\mathbf{R}^n)$; y la igualdad se sigue.

Se deduce de la sección II.1.1 que, para todo $0 < r' < r$, la proyección $\beta^{r,r'} : G^r \longrightarrow G^{r'}$, $j^r(g) \longmapsto j^{r'}(g)$, es un homomorfismo de grupos y que $G^{r,r'} \equiv Ker\ \beta^{r,r'}$ es un subgrupo invariante y nilpotente de G^r. En particular, el grupo $G^{r,r-1}$ $(r > 1)$ es abeliano. Asimismo, para $r > 1$, se tiene el isomorfismo canónico (ver II.1.2)

$$\begin{array}{rccc} \chi: & G^r & \longrightarrow & G \otimes G^{r,1} \\ & j^r(g) & \longmapsto & (Dg|_0\ ,\ j^r(Dg|_0^{-1} \circ g)), \end{array}$$

con el producto semidirecto $G \otimes G^{r,1}$ asociado a $Q^r \in Hom(G, Aut(G^{r,1}))$ definido por

$$Q^r(a)(j^r(g)) := j^r(a \circ g \circ a^{-1}).$$

Se puede probar (véase [Gui]; lo haremos con detalle más adelante para $r = 2$ y $r = 3$) que G^r es un subgrupo de Lie de $G^r(n)$, difeomorfo a la subvariedad $G \times \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_{r-1}$ de $GL(n) \times S^2(n) \times \cdots \times S^r(n)$ (ver II.1.1) y que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}^r$ de G^res isomorfa a $\sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s$ con el corchete dado en el apartado 1.1. Se sigue de lo dicho antes que el grupo abeliano $G^{r,r-1}$ $(r > 1)$ es isomorfo al grupo vectorial $\mathfrak{g}_{r-1}$. En el caso $\mathfrak{g}_{r-1} = 0$, el homomorfismo $\beta^{r,r-1} : G^r \to G^{r-1}$ es un isomorfismo de grupos de Lie.

La representación natural $\mathcal{A}^r$ de G^r.

Definimos el *levantamiento al orden r* (o *r-levantamiento*) $G^r\mathbf{R}^n$ de $G\mathbf{R}^n$ como (ver la sección 2 para la posibilidad de definir el levantamiento al orden r de una G-estructura P arbitraria):

$$G^r\mathbf{R}^n := \{j^r(\varphi) \in F^r(\mathbf{R}^n) : \exists\, \sigma \in Sec_{\varphi(0)}(G\mathbf{R}^n) \text{ con } j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \sigma_I) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi)\}.$$

$G^r\mathbf{R}^n$ es una reducción de $F^r(\mathbf{R}^n)$ con grupo de estructura G^r (recordar II.1.4).

> La acción de $j^r(g) \in G^r$ sobre $j^r(\varphi)$ es $j^r(\varphi) \cdot j^r(g) := j^r(\varphi \circ g)$. Se ve (análogamente a la comprobación (arriba) de la operación de grupo) que actúa dentro de $G^r\mathbf{R}^n$; y es transitiva pues dados $j^r(\varphi)$, $j^r(\varphi') \in G^r\mathbf{R}^n$ con $\varphi(0) = \varphi'(0)$, el elemento $j^r(\varphi^{-1} \circ \varphi') \in G^r$ pasa del uno al otro.

Se obtiene una trivialización global de $G^r\mathbf{R}^n$ bajo el difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Psi^r: & G^r\mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times G^r \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & (\varphi(0),\ j^r(T_{-\varphi(0)} \circ \varphi)). \end{array}$$

Sea $j^r(g) \in G^r$, donde $g : U \to V$ es un difeomorfismo entre entornos de $0 \in \mathbf{R}^n$, con $g(0) = 0$. Denotemos por

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}_g^{r-1}: & G^{r-1}(\mathbf{R}^n)|_U & \longrightarrow & F^{r-1}(\mathbf{R}^n)|_V \\ & j^{r-1}(\psi) & \longmapsto & j^{r-1}(g \circ \psi \circ g^{-1}) \end{array}$$

la restricción a $G^{r-1}(\mathbf{R}^n)|_U$ de la aplicación denotada por la misma letra en II.1.4. Se puede probar (véase [Gui]; lo haremos con detalle para $r = 2$ y $r = 3$) que la aplicación tangente

$$\mathcal{I}^{r-1}_{g*}\Big|_{j^{r-1}(I)} : T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n)$$

toma de hecho sus valores en $T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}(\mathbf{R}^n)$, por lo que escribiremos

$$\mathcal{I}^{r-1}_{g*}\Big|_{j^{r-1}(I)} : T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}(\mathbf{R}^n).$$

Identificando, via Ψ^{r-1}, $G^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ con la variedad producto $\mathbf{R}^n \times G^{r-1}$ y, por tanto, $T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}(\mathbf{R}^n)$ con $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}$, se obtiene una representación de G^r $(r > 1)$ denotada igual que la representación $\mathcal{A}^r$ de $G^r(n)$ de la que procede:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}^r : & G^r & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}) \\ & j^r(g) & \longmapsto & (\mathcal{I}^{r-1}_{g*}\Big|_{j^{r-1}(I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1} \to \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}). \end{array}$$

Análogamente, se obtiene una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}^r$ $(r > 1)$, denotada igual que la representación $\mathfrak{a}^r$ de $\mathfrak{g}^r(n)$ de la que procede (ver II.1.4):

$$\mathfrak{a}^r \equiv \mathcal{A}^r_*|_{j^r(I)} : \mathfrak{g}^r(n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}).$$

Si $\mathfrak{g}_{r-1} = 0$, el isomorfismo de grupos de Lie $\beta^{r,r-1} : G^r \to G^{r-1}$ antes citado induce una representación $\overline{\mathcal{A}}^r : G^{r-1} \to GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1})$ en la forma obvia. Se puede probar (véase [Gui]; lo haremos con detalle para $r = 2$ y $r = 3$) que esta representación preserva el corchete en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}$ dado en N.49.b, con lo que escribiremos (recordar I.1.1) $\overline{\mathcal{A}}^r : G^{r-1} \to Aut(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1})$. Se puede probar que

$$\overline{\mathcal{A}}^r_{j^{r-1}(g)}\Big|_{\mathfrak{g}^{r-1}} = Ad^{G^{r-1}}_{j^{r-1}(g)}, \quad \forall\, j^{r-1}(g) \in G^{r-1}.$$

1.4 Levantamiento al orden 2 de G.

Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. El homomorfismo $Q^2 \in Hom(GL(n), Aut(S^2(n)))$ (ver II.2.2) restringe bien a un homomorfismo, que denotamos por la misma letra, $Q^2 \in Hom(G, Aut(\mathfrak{g}_1))$, ya que si $t \in \mathfrak{g}_1$ y $a \in G$ entonces, obviamente, $t_a \in \mathfrak{g}_1$. Podemos, pues, definir el grupo de Lie producto semidirecto $G \circledS \mathfrak{g}_1$ asociado a Q^2 que resulta ser un subgrupo de Lie de $GL(n) \circledS S^2(n)$, pues la inclusión es obviamente una inmersión (véase [GHV, II, Ch.2, 2.1]).

El álgebra de Lie de $G \circledS \mathfrak{g}_1$ es la subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)$ dada por la suma semidirecta $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_1$ asociada al homomorfismo, restricción de $q^2 \in$

$Hom(\mathfrak{gl}(n), End(S^2(n)))$ a $\mathfrak{g}$ y denotado igualmente, $q^2 \in Hom(\mathfrak{g}, End(\mathfrak{g}_1))$ (que restringe bien, pues si $t \in \mathfrak{g}_1$ y $\alpha \in \mathfrak{g}$ entonces el elemento $t^\alpha \in S^2(n)$ verifica $t^\alpha(v) =$ (L.2.b.vi) $[\alpha, t(v)] - t(\alpha v) \in \mathfrak{g}$, $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$ y, consecuentemente, $t^\alpha \in \mathfrak{g}_1$).

El *levantamiento al orden* 2 de G, según D.25 y N.50.f es

$$G^2 := \{j^2(g) \in G^2(n) : \exists\, \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n) \text{ con } j^1(\tilde{g} \circ \sigma_I) = j^1(\sigma \circ g)\} =$$
$$= \{j^2(g) \in G^2(n) : \exists\, \kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G) \text{ con } Dg|_0 = \kappa(0),\ D^2g|_0 = D\kappa|_0\}.$$

Lema 37 *G^2 es un subgrupo de Lie de $G^2(n)$ isomorfo, via $(u_0, \bar{u}_1)$, a $G \otimes \mathfrak{g}_1$. Consiguientemente el álgebra de Lie $\mathfrak{g}^2$ de G^2 es isomorfa, via $(u_0, \bar{u}_1)_*|_{j^2(I)}$, a $\mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1$.*

Demostración: Sea $j^2(g) \in G^2$. Puesto que

$$S^2(n) \ni Dg|_0^{-1} D^2g|_0 = (\kappa^{-1} D\kappa)|_0 \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}),$$

se deduce (recordar D.22) que $Dg|_0^{-1} D^2g|_0 \in \mathfrak{g}_1$ y se puede escribir

$$G^2 := \{j^2(g) \in G^2(n) : Dg|_0 \in G,\ Dg|_0^{-1} D^2g|_0 \in \mathfrak{g}_1\}.$$

Así pues, la carta global e isomorfismo de grupos de Lie (ver II.2.2)

$$\begin{array}{rccc} (u_0, \bar{u}_1): & G^2(n) & \longrightarrow & GL(n) \otimes S^2(n) \\ & j^2(g) & \longmapsto & (Dg|_0, Dg|_0^{-1} D^2g|_0), \end{array}$$

induce, por restricción al subgrupo $G^2 \subset G^2(n)$, un isomorfismo de grupos (denotado de la misma forma)

$$(u_0, \bar{u}_1) : G^2 \longrightarrow G \otimes \mathfrak{g}_1;$$

al ser el subgrupo $G \otimes \mathfrak{g}_1$ de $GL(n) \otimes S^2(n)$ un subgrupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1$, se sigue el lema.

Nota 51 A partir de ahora identificaremos $G^2 \cong G \otimes \mathfrak{g}_1$, según el lema anterior, y denotaremos un elemento de G^2 indistintamente por (a, t) o por $j^2(g)$.

La representación (ver II.3.2) $Ad^{G^2(n)}|_{G^2} : G^2 \to Aut(\mathfrak{gl}(n) \ni S^2(n))$ da lugar, por restricción a $\mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1$, a la representación adjunta de G^2, que denotaremos simplemente por Ad; lo propio ocurre con la representación $ad^{\mathfrak{g}^2(n)}|_{\mathfrak{g}^2}$.

Asimismo la representación (ver II.3.3) $\mathcal{A}^2|_{G^2} : G^2 \to GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n))$ da lugar, por restricción a $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}$, a una representación de G^2, que denotaremos igualmente por $\mathcal{A}^2$; lo propio ocurre con la representación $\mathfrak{a}^2|_{\mathfrak{g}^2}$.

En efecto: De la demostración de L.4 (II.3.3) se obtiene que

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^2_{j^2(g)}: & \mathbf{R}^n+\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbf{R}^n+\mathfrak{gl}(n) \\ & (v,\beta) & \longmapsto & (Dg|_0 v, D^2g|_0(v)Dg|_0^{-1}+Dg|_0\beta Dg|_0^{-1}); \end{array}$$

y se observa que

$$D^2g|_0(v)Dg|_0^{-1}+Dg|_0\beta Dg|_0^{-1}=Dg|_0(Dg|_0^{-1}D^2g|_0(v)+\beta)Dg|_0^{-1}\in\mathfrak{g},$$

pues $Dg|_0\in G$ y $Dg|_0^{-1}D^2g|_0\in\mathfrak{g}_1$.

Resumimos en el siguiente lema (ver L.3 y L.4, Cap.II) estas representaciones, escritas teniendo en cuenta el isomorfismo del lema anterior.

Lema 38 *Se verifica:*

a. *La representación adjunta de G^2 es*

$$\begin{array}{rccl} Ad: & G\otimes\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1) \\ & (a,t) & \longmapsto & ((\beta,s)\mapsto(a\beta a^{-1}, s_a-(t^\beta)_a)), \\ & (a,t)^{-1} & \longmapsto & ((\beta,s)\mapsto(a^{-1}\beta a, s_{a^{-1}}+t^{a^{-1}\beta a})). \end{array}$$

b. *La representación adjunta de $\mathfrak{g}^2$ es*

$$\begin{array}{rccl} ad: & \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1) \\ & (\alpha,t) & \longmapsto & ((\beta,s)\mapsto([\alpha,\beta], s^\alpha-t^\beta)\equiv[(\alpha,t),(\beta,s)]). \end{array}$$

c. *La representación $\mathcal{A}^2$ de G^2 es la dada por*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^2: & G\otimes\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}) \\ & (a,t) & \longmapsto & ((v,\beta)\mapsto(av, a(t(v)+\beta)a^{-1})). \end{array}$$

d. *La representación $\mathfrak{a}^2$ de $\mathfrak{g}^2$ es la dada por*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{a}^2: & \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}) \\ & (\alpha,s) & \longmapsto & ((v,\beta)\mapsto(\alpha v, s(v)+[\alpha,\beta])). \end{array}$$

Caso $\mathfrak{g}_1=0$.

Cuando $\mathfrak{g}_1=0$, se obtiene que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G^2\cong G\otimes\{0\} \\ a & \longmapsto & (a,0) \end{array}$$

establece un isomorfismo entre G y G^2. Como ya se dijo al final del apartado 1.3, la representación $\mathcal{A}^2$ (respectivamente $\mathfrak{a}^2$) induce, en este caso, una representación de G (respectivamente, de $\mathfrak{g}$) en $\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}$, que denotaremos por $\overline{\mathcal{A}}^2$ (respectivamente, por $\overline{\mathfrak{a}}^2$) (recordar N.7.a en II.3.3). Esta representación $\overline{\mathcal{A}}^2$ verifica $\overline{\mathcal{A}}^2_a|_{\mathbf{R}^n}=Ad^{\mathbf{R}^n\otimes G}_{(0,a)}|_{\mathbf{R}^n}$ y $\overline{\mathcal{A}}^2_a|_{\mathfrak{g}}=Ad^G_a$ y *preserva* el corchete de Lie del álgebra afín $\mathbf{R}^n\oplus\mathfrak{g}$.

1.5 Levantamiento al orden 3 de G.

Recordemos la sección II.4. Debido a que, si $t, t' \in \mathfrak{g}_1$, $[t,t'] \in \mathfrak{g}_2$, es inmediato que $(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \square)$ es un subgrupo de $(S^2(n) \times S^3(n), \square)$. Asimismo, $G \circledS(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \square)$ es un subgrupo de $GL(n) \circledS(S^2(n) \times S^3(n), \square)$.

El *levantamiento al orden* 3 de G, según D.25 y N.50.f, es

$$\begin{aligned} G^3 &:= \{j^3(g) \in G^3(n) : \exists\, \sigma \in Sec_0(G\mathbf{R}^n) \text{ con } j^2(\tilde{g} \circ \sigma_I) = j^2(\sigma \circ g)\} = \\ &= \{j^2(g) \in G^2(n) : \exists\, \kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G) \text{ con } Dg|_0 = \kappa(0),\ D^2g|_0 = D\kappa|_0 \\ &\qquad\qquad \text{y}\ \ D^3g|_0 = D^2\kappa|_0\}. \end{aligned}$$

Lema 39 *G^3 es un subgrupo de Lie de $G^3(n)$ isomorfo, via $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$, a $G \circledS(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \square)$. Consiguientemente el álgebra de Lie $\mathfrak{g}^3$ de G^3 es isomorfa, via $(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)_*|_{j^3(I)}$, a $\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ (con corchete el dado en 1.1).*

Demostración: Es claro que $j^r(g) \in G^3$ si y solo si $\exists\, \kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G)$ con

$$\begin{aligned} Dg|_0 &= \kappa(0), \\ Dg|_0^{-1} D^2g|_0 &= (\kappa^{-1}D\kappa)|_0, \\ Dg|_0^{-1} D^3g|_0 &= (\kappa^{-1}D^2\kappa)|_0; \end{aligned}$$

equivalente, a su vez, a que $\exists\, \kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G)$ con

$$\begin{aligned} Dg|_0 &= \kappa(0), \\ (1) \qquad Dg|_0^{-1} D^2g|_0 &= (\kappa^{-1}D\kappa)|_0, \\ (2) \quad Dg|_0^{-1} D^3g|_0 - \frac{3}{2}\mathbb{S}(Dg|_0^{-1} D^2g|_0(\cdot) Dg|_0^{-1} D^2g|_0(\cdot,\cdot)) &= \\ = (\kappa^{-1}D^2\kappa)|_0 - \frac{3}{2}\mathbb{S}((\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot)(\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot,\cdot)). & \end{aligned}$$

Nótese que, si $\kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, G)$, entonces $D\kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n)))$ pero $\kappa^{-1}D\kappa \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}))$; luego la ecuación (1) implica que $(\kappa^{-1}D\kappa)|_0 \in \mathfrak{g}_1$. También se tiene que $D(\kappa^{-1}D\kappa) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathfrak{g}))$. Ahora bien, como $D(\kappa^{-1})(\cdot) = -\kappa^{-1}D\kappa(\cdot)\kappa^{-1}$, se obtiene que

$$D(\kappa^{-1}D\kappa)(\cdot,\cdot) = -\kappa^{-1}D\kappa(\cdot)\kappa^{-1}D\kappa(\cdot) + \kappa^{-1}D^2\kappa(\cdot,\cdot).$$

Por otra parte, si $s \in \mathfrak{g}_1$ se verifica (recordemos que $s(v)w \equiv s(v,w)$):

$$\begin{aligned} s(u)s(v,w) &\equiv \tfrac{1}{2}(s(u)s(v,w) + s(v)s(w,u) + s(w)s(u,v)) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(s(u)s(v,w) - s(s(u)w,v) - s(w,s(u)v)) = \\ (\text{D.1.b}) &= \tfrac{3}{2}\mathbb{S}(s(\cdot)s(\cdot,\cdot))(u,v,w) + \tfrac{1}{2}s^{s(u)}(v,w), \end{aligned}$$

lo cual podemos decirlo escribiendo que

$$s(\cdot)s = \frac{3}{2}\mathbb{S}(s(\cdot)s(\cdot,\cdot)) + \frac{1}{2}s^{s(\cdot)}.$$

De lo dicho es inmediato deducir que

$$(\kappa^{-1}D^2\kappa)|_0 - \frac{3}{2}\mathbb{S}((\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot)(\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot,\cdot)) = \\ = D(\kappa^{-1}D\kappa)|_0 + \frac{1}{2}((\kappa^{-1}D\kappa)|_0)^{(\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot)}.$$

Como los dos últimos sumandos pertenecen a $L(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ (identificado con $L(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}))$), y de la ecuación (2) se sabe que su suma está en $S^3(n)$, se sigue que

$$(\kappa^{-1}D^2\kappa)|_0 - \frac{3}{2}\mathbb{S}((\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot)(\kappa^{-1}D\kappa)|_0(\cdot,\cdot)) \in \mathfrak{g}_2.$$

Llegamos a la conclusión que $j^r(g) \in G^3$ si y solo si

$$\begin{aligned} Dg|_0 &\in G, \\ Dg|_0^{-1}D^2g|_0 &\in \mathfrak{g}_1, \\ Dg|_0^{-1}D^3g|_0 - \frac{3}{2}\mathbb{S}(Dg|_0^{-1}D^2g|_0(\cdot)Dg|_0^{-1}D^2g|_0(\cdot,\cdot)) &\in \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

Y la primera parte del lema se sigue inmediatamente. La segunda parte se sigue de L.6.b en II.4.

Nota 52 A partir de ahora identificaremos $G^3 \cong G \boxtimes(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \square)$, según el lema anterior, y denotaremos un elemento de G^3 indistintamente por (a,t,T) o por $j^3(g)$.

La representación (ver II.4) $Ad^{G^3(n)}|_{G^3} : G^3 \to Aut(\mathfrak{gl}(n) + S^2(n) + S^3(n))$ da lugar, por restricción a $\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, a la representación adjunta de G^3, que denotaremos simplemente por Ad y que, bajo el isomorfismo del lema anterior, se expresa igual que la dada en L.6.a; lo propio ocurre con la representación $ad^{\mathfrak{g}^3(n)}|_{\mathfrak{g}^3}$, que se expresa igual que la dada en L.6.b. La representación natural $\mathcal{A}^3$ de $G^3(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) + S^2(n)$ (ver II.4) restringe bien a una representación, que denotaremos igualmente por $\mathcal{A}^3$, de G^3 en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$. Bajo el isomorfismo del lema anterior es (ver L.7.a en II.4):

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^3 : & G \boxtimes(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \square) & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1) \\ & (a,t,T) & \longmapsto & ((v,\beta,s) \mapsto (av\,,\, a(t(v)+\beta)a^{-1}\,, \\ & & & (T(v) - \frac{1}{2}t^{t(v)} - t^{\beta} + s)_a)). \end{array}$$

Lo propio ocurre con la representación $\mathfrak{a}^3|_{\mathfrak{g}^3}$, que se expresa igual que la dada en L.7.b.

Nota 53 Tanto G como $\mathfrak{g}_2$ pueden considerase subgrupos de G^3 identificando G con $(G,0,0)$ y $\mathfrak{g}_2$ con $(I,0,\mathfrak{g}_2)$. A su vez, ambos, se pueden identificar con los subgrupos de $GL(\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1)$ dados por $\mathcal{A}^3_{(G,0,0)}$ y $\mathcal{A}^3_{(I,0,\mathfrak{g}_2)}$, respectivamente. En cambio, no sucede así con el grupo $G^2\cong G\otimes\mathfrak{g}_1$ que no es, en general, subgrupo de G^3, ni hay, en general, restricción de $\mathcal{A}^3$ a una representación de $G\otimes\mathfrak{g}_1$ que fuera de la forma

$$G\otimes\mathfrak{g}_1\to GL(\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1),\ (a,t)\mapsto\mathcal{A}^3_{(a,t,0)}$$

(recordar N.9 en II.4).

El caso $\mathfrak{g}_2=0$.

Cuando $\mathfrak{g}_2=0$ (como sucede en el caso del grupo lineal conforme $G=C(n)$, que estudiaremos en el Cap.VII) se obtiene que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G^2\cong G\otimes\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & G^3\cong G\otimes(\mathfrak{g}_1\times\{0\},\,\square) \\ (a,t) & \longmapsto & (a,t,0)\end{array}$$

establece un isomorfismo *canónico* entre G^2 y G^3.

Nótese que (ver II.4)

$$(a,t,0)\cdot(a',t',0)=(aa',\,t_{a'^{-1}}+t',\,\frac{1}{2}[t_{a'^{-1}},t'])$$

y que $\forall\, t,t'\in\mathfrak{g}_1,\ [t,t']\in\mathfrak{g}_2$.

Además en este caso $\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1$ admite una estructura de álgebra de Lie con corchete dado en N.49.b. Como ya se dijo al final del apartado 1.3, la representación $\mathcal{A}^3$ (respectivamente, $\mathfrak{a}^3$) induce, en este caso, una representación de G^2 (respectivamente, de $\mathfrak{g}^2$) en $\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1$, que denotaremos por $\overline{\mathcal{A}}^3$ (respectivamente, por $\overline{\mathfrak{a}}^3$) y cuya forma se sigue inmediatamente de L.7 (Cap.II):

Lema 40 *En el caso $\mathfrak{g}_2=0$, se tiene:*

a. *La representación inducida por $\mathcal{A}^3$ es*

$$\begin{array}{rccl}\overline{\mathcal{A}}^3: & G\otimes\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1) \\ & (a,t) & \longmapsto & ((v,\beta,s)\mapsto(av\,,\,a(t(v)+\beta)a^{-1}\,, \\ & & & \qquad(-\frac{1}{2}t^{t(v)}-t^{\beta}+s)_a)); \\ & (a,t)^{-1} & \longmapsto & ((v,\beta,s)\mapsto(a^{-1}v\,,\,-t(a^{-1}v)+a^{-1}\beta a\,, \\ & & & \qquad -\frac{1}{2}t^{t(a^{-1}v)}+t^{a^{-1}\beta a}+s_{a^{-1}})).\end{array}$$

b. *La representación inducida por* $\mathfrak{a}^3$ *es*

$$\begin{array}{rccl} \overline{\mathfrak{a}}^3: & \mathfrak{g}\ni\mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1) \\ & (\alpha,t) & \longmapsto & ((v,\beta,s)\mapsto(\alpha v\,,\,t(v)+[\alpha,\beta]\,,\,s^\alpha-t^\beta). \end{array}$$

Nota 54

a. Si $\mathfrak{g}_2=0$, se verifica:

(i) $t^{s(v)}=s^{t(v)},\quad \forall\, s,t\in\mathfrak{g}_1,\ \forall\, v\in\mathbf{R}^n.$

En efecto: Se tiene (ver N.8) $[s,t]=t^{s(\cdot)}-s^{t(\cdot)}$ y, como $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]\subset\mathfrak{g}_2$, el resultado se sigue.

(ii) $t^{[t(v),t(w)]}=0,\quad \forall\, t\in\mathfrak{g}_1,\ \forall\, v,w\in\mathbf{R}^n.$

En efecto: $t^{[t(v),t(w)]}=$ (L.2.b.v) $(t^{t(w)})^{t(v)}-(t^{t(v)})^{t(w)}=$ $=$ (i) $t^{(t^{t(w)}(v)-t^{t(v)}(w))}=$ (L.2.b.vii) $-2t^{[t(v),t(w)]}$; y el resultado se sigue.

b. Si $\mathfrak{g}_2=0$, se verifica:

(i) $\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(a,t)}|_{\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1}=Ad^{G\ltimes\mathfrak{g}_1}_{(a,t)}$ (recordar N.9 en II.4).

(ii) $\overline{\mathfrak{a}}^3{}_{(\alpha,t)}=ad^{\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1}_{(\alpha,t)}$ (recordar N.49.b).

(iii) $\overline{\mathcal{A}}^3$ *preserva* el corchete de $\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1$ (dado en N.49.b).

En efecto: Por (i) y puesto que $\overline{\mathcal{A}}^3$ es una representación, basta comprobar los tres siguientes casos:

(1) Por un lado

$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(a,0)}[(v,\beta,s),(w,0,0)]=\\&=\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(a,0)}(\beta w,s(w),0)=(a\beta w,as(w)a^{-1},0);\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}&[\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(a,0)}(v,\beta,s),\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(a,0)}(w,0,0)]=\\&=[(av,a\beta a^{-1},s_a),(aw,0,0)]=(a\beta w,s_a(aw),0),\end{aligned}$$

que es igual a lo primero (L.2.a.v).

(2) Por un lado $\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}[(v,0,0),(w,0,0)]=(0,0,0)$; por otro lado,

$$\begin{aligned}&[\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}(v,0,0),\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}(w,0,0)]=\\&=[(v,t(v),-\tfrac{1}{2}t^{t(v)}),(w,t(w),-\tfrac{1}{2}t^{t(w)})]=\\&=(t(v,w)-t(w,v),\\&\quad -\tfrac{1}{2}t^{t(v)}(w)+\tfrac{1}{2}t^{t(w)}(v)+[t(v),t(w)],\\&\quad -\tfrac{1}{2}(t^{t(w)})^{t(v)}+\tfrac{1}{2}(t^{t(v)})^{t(w)});\end{aligned}$$

donde la primera componente es 0 pues t es simétrico, la segunda es 0 por L.2.b.vii y la tercera es 0 por L.2.b.v y por a.ii de esta nota.

(3) Por un lado

$$\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}[(0,\beta,s),(v,0,0)] = \overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}(\beta v, s(v), 0 = \\ = (\beta v, t(\beta v) + s(v), -\tfrac{1}{2}t^{t(\beta v)} - t^{s(v)});$$

por otro lado,

$$[\overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}(0,\beta,s), \overline{\mathcal{A}}^3{}_{(I,t)}(v,0,0)] = \\ = [(0,\beta,-t^\beta + s),(v,t(v),-\tfrac{1}{2}t^{t(v)})] = \\ = (\beta v, [\beta, t(v)] - t^\beta(v) + s(v), -\tfrac{1}{2}(t^{t(v)})^\beta + (t^\beta)^{t(v)} - \\ - s^{t(v)});$$

siendo ambas primeras componentes y ambas segundas componentes (por L.2.b.vi) iguales. La igualdad entre las terceras componentes se sigue de (a.i) y de que

$$-\tfrac{1}{2}(t^{t(v)})^\beta + (t^\beta)^{t(v)} = \text{ (L.2.b.v) } \tfrac{1}{2}(t^\beta)^{t(v)} + \tfrac{1}{2}t^{[t(v),\beta]} = \\ = \text{ (a.i) } \tfrac{1}{2}t^{(t^\beta(v)+[t(v),\beta])} = \text{ (L.2.b.vi) } -\tfrac{1}{2}t^{t(\beta v)}.$$

c. El siguiente comentario será retomado cuando hablemos de conexiones de Cartan: Nótese que el álgebra de Lie, $\mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1$, de G^2 es justamente la subálgebra $(0, \mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1)$ de $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$ (con el corchete dado en N.49.b) y que $\overline{\mathfrak{a}}^3$ es (ver b.ii) la restricción a $(0, \mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1)$ de la representación adjunta del álgebra $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$. Podría ocurrir que G^2 fuera un subgrupo de un grupo de Lie, $\mathcal{L}$, cuya álgebra fuese $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$, y $\overline{\mathcal{A}}^3$ la restricción a G^2 de la representación adjunta de $\mathcal{L}$. Este suele ser el punto de partida al abordar el tema de las conexiones de Cartan (ver N.56.b, al final de la sección siguiente).

2 Integrabilidad de G-estructuras.

La noción clásica de *integrabilidad* de una G-estructura $P(M,G)$ (véase por ejemplo [Ko2, p.1]) se puede formular diciendo que $P(M,G)$ es *integrable* si: $\forall m \in M$, existe un entorno V de m y un difeomorfismo $\varphi : U \subset \mathbf{R}^n \to V$ tal que $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo de fibrados principales entre $G\mathbf{R}^n|_U$ y $P|_V$. (alternativamente: $\forall m \in M$, existe una base local de campos coordenados en torno a m, adaptada a la G-estructura; o también: $\forall m \in M$, existe un entorno V de m y una conexión en $P|_V$ con torsión y curvatura nulas; véase

p. ej. [Fuj]). Es bien sabido que para que una G-estructura P sea integrable es necesario que admita una conexión (lineal) simétrica ([Ko2, Prop.1.2]). En general esta condición no es suficiente; así ocurre por ejemplo con las estructuras (semi)riemannianas o con las estructuras conformes que estudiaremos en el capitulo VII.

Es posible definir una noción más debil que la de integrabilidad, a saber, la de *integrabilidad al orden* $r-1$ (o $r-1$-*integrabilidad*), con $r \in \mathbf{N}$, $r > 0$, consistente en la posibilidad de construir el llamado *levantamiento al orden* r (o r-*levantamiento*) P^r de P (D.26), que resulta ser un fibrado principal sobre M con grupo de estructura G^r.

La integrabilidad implica r-integrabilidad $(\forall r)$ y la r-integrabilidad implica r'-integrabilidad $(\forall r' < r)$. No sucede así a la inversa: supuesta la $(r-1)$-integrabilidad (toda G-estructura resulta por definición 0-integrable), la r-integrabilidad resulta *equivalente* ([Gui, Th.4.1]) a la anulación de cierta función (la r-*ésima función de estructura*) definida en P (aunque se necesita P^{r-1} para poder definirla) con valores en la clase de cohomología de Spencer $H^{r-1,2}(\mathfrak{g})$ construida a partir del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G (ver 1.2). La 1-integrabilidad de una G-estructura (esto es, la anulación de su primera función de estructura) resulta equivalente a que ésta admita una conexión (lineal) simétrica. Por otra parte, si $\mathfrak{g}$ es de tipo (finito) r, toda G-estructura que sea $(r+1)$-integrable es integrable ([Gui, Th.5.1]). Resulta aquí evidente el interés que tiene el tratamiento de las clases de cohomología de Spencer para un G dado, puesto que su no-anulación señaliza las obstrucciones a que una G-estructura arbitraria sea "automáticamente" integrable (se les llama también *clases de obstrucción*). En el capítulo VII estudiaremos lo dicho para el caso del grupo lineal conforme.

Sea un difeomorfismo $\varphi : U \to V$ entre un entorno de $0 \in \mathbf{R}^n$ y un abierto V de M. Recordemos el isomorfismo $\tilde{\varphi}$ de fibrados principales (D.6 en III.2.2):

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}: & L\mathbf{R}^n|_U & \longrightarrow & LM|_V \\ & j^1(\psi) \equiv l & \longmapsto & j^1(\varphi \circ \psi) \equiv \varphi_*|_{\pi^L(l)} \circ l. \end{array}$$

Definición 26 *Sea $P(M,G)$ una G-estructura sobre M. Sea $r \in \mathbf{N}$, $r > 0$. Se dice que P es integrable al orden $r-1$ (o $(r-1)$-integrable) si: $\forall m \in M$, $\exists\, j^r(\varphi) \in F^r(M)$, con $\varphi(0) = m$, y $\exists\, \sigma \in Sec_m(P)$ tal que*

$$j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \sigma_I) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi).$$

Si P es $(r-1)$-integrable, se define el levantamiento al orden r *(o r-*levantamiento*) P^r de $P(M,G)$ como el conjunto (no vacío)*

$$P^r := \{j^r(\varphi) \in F^r(M) : \exists\, \sigma \in Sec_{\varphi(0)}(P) \text{ con } j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \sigma_I) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi)\}.$$

Esta definición involucra $(r-1)$-jets en $0 \in \mathbf{R}^n$ de aplicaciones de (abiertos de) $\mathbf{R}^n$en LM.

Nota 55

a. La condición de la definición expresa la idea de que el difeomorfismo $\varphi : U \to V$ *preserva hasta orden* $(r-1)$ (o $(r-1)$-*preserva*) la G-estructura $G\mathbf{R}^n$ en 0 *en* la G-estructura $P(M,G)$ en $\varphi(0)$; o, en otras palabras, que las subvariedades regulares (de LM) $\tilde{\varphi}(Im\,\sigma_I)$ e $Im\,\sigma$ tienen "contacto de orden $(r-1)$" en el punto $\tilde{\varphi}(\sigma_I(0)) = \sigma(0) \in P$ (ver N.50.a).

b. Es claro que la condición de la definición sólo depende de $j^r(\varphi)$. Por tanto, se puede decir que es el r-jet $j^r(\varphi)$ el que $(r-1)$-*preserva* $G\mathbf{R}^n$ *en* $P(M,G)$.

c. En esta definición, se puede, equivalentemente, reemplazar la ecuación $j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \sigma_I) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi)$ (que involucra jets de aplicaciones $U \to LM$) por la ecuación $j^{r-1}_{\varphi(0)}(\tilde{\varphi} \circ \sigma_I \circ \varphi^{-1}) = j^{r-1}_{\varphi(0)}(\sigma)$ (que involucra jets de secciones del fibrado $LM|_V \to V$).

d. Se puede, equivalentemente, reemplazar la condición de esta definición por (ver N.50.d)

$$\forall\, \varrho \in Sec_0(G\mathbf{R}^n),\ \exists\, \sigma \in Sec_{\varphi(0)}(P) \text{ tal que } j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \varrho) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi);$$

o también (por (**c**)):

$$\forall\, \varrho \in Sec_0(G\mathbf{R}^n),\ \exists\, \sigma \in Sec_{\varphi(0)}(P) \text{ tal que } j^{r-1}_{\varphi(0)}(\tilde{\varphi} \circ \varrho \circ \varphi^{-1}) = j^{r-1}_{\varphi(0)}(\sigma).$$

e. Puesto que $j^1(\varphi) \in P^1 \Leftrightarrow \varphi_*|_0 = (\tilde{\varphi} \circ \sigma_I)(0) \in P$, se deduce que el conjunto P^1 se puede identificar con P, por la biyección $j^1(\varphi) \mapsto \varphi_*|_0$. Nosotros así lo haremos.

Sea $P(M,G)$ una G-estructura $(r-1)$-integrable. Se puede probar (remitimos a [Gui]; lo probaremos en detalle para el caso $r=2$) que P^r tiene una estructura de *fibrado principal sobre* M, *reducción de* $F^r(M)$ *con grupo de estructura* G^r, con proyección:

$$\begin{array}{rccc} \pi^r \equiv \pi^r|_{P^r} : & P^r & \longrightarrow & M \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & \varphi(0), \end{array}$$

y con G^r-acción por la derecha

$$R^r_{j^r(g)} j^r(\varphi) \equiv j^r(\varphi) \cdot j^r(g) := j^r(\varphi \circ g).$$

Para ver que R^r es una G^r-acción, habría que probar que (N.55.d)

$$\forall\, \varrho \in Sec_0(G\mathbf{R}^n),\ \exists\, \sigma \in Sec_{\varphi(0)}(P) \text{ tal que } j^{r-1}(\widetilde{\varphi \circ g} \circ \varrho) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi \circ g);$$

lo que es equivalente a

$$j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{g} \circ \varrho \circ g^{-1}) = j^{r-1}(\sigma \circ \varphi).$$

Pero como, por N.50.d, $j^{r-1}(\tilde{g} \circ \varrho \circ g^{-1}) = j^{r-1}(\sigma')$, para alguna $\sigma' \in Sec_0(G\mathbf{R}^n)$, se tiene que

$$j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{g} \circ \varrho \circ g^{-1}) = j^{r-1}(\tilde{\varphi} \circ \sigma');$$

entonces, por N.55.d, necesariamente existe $\sigma \in Sec_{\varphi(0)}(P)$ que verifica la condición.

Resulta inmediato que si P es r-integrable entonces, $\forall\, r' < r$, es r'-integrable. La proyección natural $\pi^{r,r'} : P^r \to P^{r'}$, $j^r(\varphi) \mapsto j^{r'}(\varphi)$, es un homomorfismo de fibrados principales correspondiente al homomorfismo de grupos $\beta^{r,r'}$ del apartado 1.3. Además, P^r resulta ser un fibrado principal trivializable sobre $P^{r'}$, con grupo de estructura $G^{r,r'}$ (demostración análoga a la dada en el apartado III.1.1).

Si P es $(r-1)$-integrable, la 1-forma canónica θ^r de $F^r(M)$ (III.1.3), $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}(n)$-valuada, define en P^r una 1-forma $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}$-valuada, que denotaremos igualmente por θ^r. Comentemos brevemente esta construcción ((véase [Gui]; lo haremos con detalle para $r = 2$, es decir, para el caso de G-estructuras 1-integrables):

(i) Sea $\varphi : U \to V$ un difeomorfismo entre un entorno U de $0 \in \mathbf{R}^n$ y un abierto V de M tal que $j^r(\varphi) \in P^r$. Se obtenía (III.1.2) la aplicación

$$(J^{r-1}\varphi)_*\big|_{j^{r-1}(I)} : T_{j^{r-1}(I)}F^{r-1}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow T_{j^{r-1}(\varphi)}F^{r-1}(M).$$

Se puede probar ([Gui]) que esta aplicación restringida a $T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}\mathbf{R}^n$, entonces toma sus valores en $T_{j^{r-1}(\varphi)}P^{r-1}$.

(ii) Identificando $T_{j^{r-1}(I)}G^{r-1}\mathbf{R}^n$ con $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}$ (ver 1.3), se puede definir ι^r (obtenida de la restricción de la aplicación homónima en III.1.2) como

$$\begin{array}{rccl} \iota^r : & P^r & \longrightarrow & L(P^{r-1}) \\ & j^r(\varphi) & \longmapsto & ((J^{r-1}\varphi)_*|_{j^{r-1}(I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1} \to T_{j^{r-1}(\varphi)}P^{r-1}). \end{array}$$

(iii) Ahora, análogamente a lo hecho en III.1.3, definimos sobre P^r la 1-forma $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^{r-1}$-valuada

$$\theta^r := \iota^{r\,*}\theta^L,$$

con θ^L la 1-forma canónica sobre $L(P^{r-1})$. Se puede comprobar que θ^r es de tipo $\mathcal{A}^r$ ([Gui]).

Introducimos la siguiente definición que será de utilidad más adelante.

Definición 27 *Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$ con $\mathfrak{g}_r = 0$ $(r > 0)$. Sea $P(M,G)$ una G-estructura $(r-1)$-integrable. Una 1-forma $\zeta \in \Lambda^1(P^r, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^r)$ se dice* de tipo Cartan *si verifica*

a. $\forall A \in \mathfrak{g}^r \cong \sum_{s=0}^{r-1} \mathfrak{g}_s, \quad \zeta(A^\sharp) = (0, A)$

b. $\forall X \in TP^r, \quad \zeta(X) = 0 \implies X = 0$

c. $\forall j^r(g) \in G^r, \quad R^{r\,*}_{j^r(g)} = \overline{\mathcal{A}}^{r+1}_{j^r(g^{-1})} \circ \zeta$

(con la representación $\overline{\mathcal{A}}^{r+1} : G^r \to Aut(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^r)$ definida al final del apartado 1.3).

Nota 56

a. Escribamos $\zeta \equiv (\zeta_{-1}, \zeta_{\mathfrak{g}^r})$, con $\zeta_{\mathfrak{g}^r} \in \Lambda^1(P^r, \mathfrak{g}^r)$. Obviamente $\zeta_{\mathfrak{g}^r}$ verifica $\zeta_{\mathfrak{g}^r}(A^\sharp) = A$, $\forall A \in \mathfrak{g}^r$. Por tanto, $\zeta_{\mathfrak{g}^r}$ será una conexión en P^r si y sólo si

$$(\overline{\mathcal{A}}^{r+1}_{j^r(g)} \circ \zeta)_{\mathfrak{g}^r} = Ad^{G^r}_{j^r(g)} \circ \zeta_{\mathfrak{g}^r},$$

si y sólo si (al ser $\overline{\mathcal{A}}^{r+1}_{j^r(g)}|_{\mathfrak{g}^r} = Ad^{G^r}_{j^r(g)}$, $\forall j^r(g) \in G^r$, ver 1.3) la subálgebra $(\mathbf{R}^n, 0)$ de $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^r$ es $\overline{\mathcal{A}}^{r+1}$-invariante, esto es, si y sólo si $r = 1$.

b. Si se diera un grupo de Lie $\mathcal{L}$, con álgebra de Lie $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^r$ (con el corchete dado en N.49.b), tal que G^r fuera un subgrupo de Lie de $\mathcal{L}$ y tal que $\overline{\mathcal{A}}^{r+1}$ fuera la restricción a G^r de la representación adjunta de $\mathcal{L}$, la 1-forma de tipo Cartan ζ sería una conexión de Cartan en P^r respecto de $\mathcal{L}$ (ver Cap.VII.3.1).

c. Supongamos que $P(M,G)$ fuera *además* r-integrable, esto es, que se pudiera definir (D.26) el $(r+1)$-levantamiento P^{r+1}, que sería el espacio total de un fibrado principal $P^{r+1}(M, G^{r+1})$. Al ser $G^{r+1} \cong G^r$, la proyección natural $\pi^{r+1,r} : P^{r+1} \to P^r$ sería un isomorfismo de fibrados principales sobre M y, denotando el isomorfismo inverso por $\jmath_r : P^r \to P^{r+1}$, es inmediato ver que la 1-forma $\jmath_r^*(\theta^{r+1}) \in \Lambda^1(P^r, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g}^r)$ sería de tipo Cartan.

En el caso de que $P(M,G)$ sólo sea (como indica la definición) $(r-1)$-integrable, se pueden definir en P^r formas de tipo Cartan en ciertos casos ([Gui]); ver más adelante.

3 Primera prolongación de G-estructuras.

Dada una G-estructura $P(M,G)$ comenzamos (3.1) definiendo (D.28) un cierto subconjunto $P_\star$ de referencias lineales sobre P, constituido por aquellas referencias que se corresponden con 1-jets arbitrarios de secciones (locales) del fibrado principal $P \to M$. A cada elemento $z \in P_\star$ se le asocia su "torsión" (D.29.b) $\mathcal{T}_z \in A^2(n)$. Consideremos la aplicación (1.2) $\mathbb{A} : C^{1,1}(\mathfrak{g}) \equiv L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^{0,2}(\mathfrak{g}) \equiv A^2(n)$; para cada subespacio E complementario de $Im\,\mathbb{A}$ en $Z^{0,2}(\mathfrak{g}) = A^2(n)$, se define (D.30) la primera prolongación P_1^E de P relativa a E como el conjunto de referencias en $P_\star$ cuya torsión está en E. P_1^E resulta ser (via la representación $\mathcal{A}^2$; L.42) una $\mathfrak{g}_1$-estructura sobre P (véase [Ste] y [Ko2]). El espacio total $P_\star$ admite una G-acción natural que, cuando E es G-invariante bajo la acción sobre $A^2(n)$ (3.2), preserva P_1^E (L.43). En este caso, las acciones de $\mathfrak{g}_1$ y G se pueden combinar en una acción de $G \otimes \mathfrak{g}_1$ sobre P_1^E; analizaremos esta cuestión en el siguiente apartado, en el caso de que la primera prolongación sea única. Tiene interés recoger aquí (T.5) un resultado de Bernard [Ber], que podemos enunciar así: si $\mathfrak{g}_1 = 0$, cada elección del subespacio (G-invariante) E, como antes, induce sobre P una forma *canónica* ζ^E de tipo Cartan, cuya parte $\mathfrak{g}$-valuada es una conexión *canónica* en P; este es el origen de la aparición de conexiones functoriales en ciertas G-estructuras (paralelismos proyectivos, paralelismos lineales, estructuras semiriemannianas); en el apartado 4.2 establecemos un resultado similar (T.8) para levantamientos a orden 2 de G-estructuras 1-integrables.

En el apartado 3.3 estudiamos la unicidad de la primera prolongación de una G-estructura P. Comenzamos recordando la definición (D.31) de la primera función de estructura $\mathbf{c}^1 : P \to H^{0,2}(\mathfrak{g})$. A continuación damos una demostración diferente de la habitual de otro resultado (L.44) de Bernard [Ber], que afirma que una función G-equivariante de P en $Z^{0,2}(\mathfrak{g})$ es la torsión de una conexión en P si y sólo si su clase de cohomología es $\mathbf{c}^1$ (esta demostración nos permitirá formular en el apartado 4.3 un resultado análogo para levantamientos a orden 2 de G-estructuras 1-integrables). Resulta ahora inmediata la equivalencia (T.6) entre la existencia de conexiones simétricas, la anulación de la primera función de estructura y la unicidad de la primera prolongación (denotada entonces por P_1); todo ello es también equivalente a la 1-integrabilidad de P y, en tal caso, se puede identificar (L.46) P_1 con P^2 (el levantamiento a orden 2 de P). P_1 tiene una estructura de fibrado principal sobre M (L.45), que aquí usamos para dotar a P^2 de la estructura de fibrado principal sobre M (L.48).

Por último en los apartados 3.4 y 3.5 comentamos brevemente cómo puede trasladarse lo dicho en los capítulos IV y V sobre conexiones de segundo orden y fibrados asociados a $F^2(M)(M, GL(n) \otimes S^2(n))$, al fibrado principal

$P^2(M, G \otimes \mathfrak{g}_1)$.

3.1 Primera prolongación P_1^E de una G-estructura P.

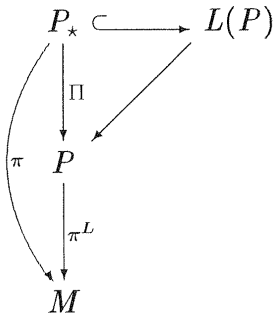
Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$ y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea $P(M,G)$ una G-estructura (ver el final del apartado I.4.1).

Definición 28 *Sea $P(M,G)$ una G-estructura. Definimos $P_\star \subset L(P)$ como el conjunto de* referencias lineales $z \in L(P)$ *(isomorfismos lineales $z : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} \to T_lP$, para algún $l \in P$) que verifican las condiciones siguientes:*

a. $\forall\, \alpha \in \mathfrak{g},\ z(0,\alpha) = \alpha^\sharp|_l$, *para algún $l \in P$.*

b. $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathfrak{g},\ \theta^L(z(v,\alpha)) = v$.

Denotaremos por Π *la proyección $P_\star \to P$, restricción de la proyección $L(P) \to P$. Denotaremos por π la proyección $P_\star \to M$, $\pi := \pi^L \circ \Pi$.*



Nota 57

a. En el caso $P = LM$, el conjunto $(LM)_\star$ había sido ya definido en N.10.d (Cap.III).

b. Es inmediato comprobar que cada $z \in P_\star$ induce *unívocamente* un $\bar{z} \in (LM)_\star$ (con $\Pi(\bar{z}) = \Pi(z) \equiv l$) que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} & \xrightarrow{\ z\ } & T_lP \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) & \xrightarrow{\ \bar{z}\ } & T_lLM. \end{array}$$

Nosotros, si no se advierte lo contrario, identificaremos z y $\bar{z}$. No existe una aplicación análoga entre $L(P)$ y $L(LM)$.

c. La condición **a** nos dice que z, aplicado al subespacio $(0, \mathfrak{g})$, da el subespacio vertical de $T_{\Pi(z)}P$. Puesto que z es un isomorfismo lineal, el subespacio $H^z := z(\mathbf{R}^n, 0)$ es transversal a la fibra y será el subespacio horizontal en $\Pi(z)$ para alguna conexión en P. Ello permite definir el conjunto $\mathcal{C}_z^P$ de conexiones en P (no se debe pensar que tienen que ser, ni siquiera que puedan ser, simétricas) que tienen a H^z por subespacio horizontal.

d. La condición **b** nos dice que para cada $\lambda \in \mathcal{C}_z^P$ se tiene $z(v, 0) = B^\lambda(v)|_l$, siendo $B^\lambda(v)$ el campo estándar λ-horizontal correspondiente a $v \in \mathbf{R}^n$ (ya que $\theta^L(B^\lambda(v)|_l) = v$, $\forall v \in \mathbf{R}^n$). Se obtiene que $z(v, \alpha) = B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l$, independientemente de la $\lambda \in \mathcal{C}_z^P$ que elijamos.

Resulta entonces que $z^{-1} = (\theta^L|_l, \lambda|_l)$, $\forall \lambda \in \mathcal{C}_z^P$.

Cualquier n-subespacio $H \subset T_l P$ transversal a la fibra de $P \to M$ determina unívocamente un isomorfismo lineal $z \in P_\star$ tal que $H = H^z$.

e. Es fácil dotar a $P_\star \to P$ de una estructura de fibrado afín, con fibra típica $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$, isomorfo al fibrado $J^1(P) \to P$ de *1-jets de secciones del fibrado principal* $P \to M$. La parte $\mathfrak{g}$-valuada de la forma canónica sobre $P_\star$ (que surge de restringir a $P_\star$ la 1-forma canónica sobre $L(P)$, que es $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}$-valuada) se corresponde con la llamada "forma de conexión canónica" en el fibrado $J^1(P)(J^1(P)/G, G)$ (N.32.b). Pero no nos detendremos en ésto pues estamos más bien interesados en ciertos subfibrados de $P_\star$.

En las definiciones D.29 y D.30 y en los lemas L.41 y L.42 recogemos las construcciones hechas en [Ste, p.316 y ss.] (véase también [Ko2, p.20 y ss.]), adaptándolas a las nociones introducidas arriba.

Definición 29 *Sea $P(M, G)$ una G-estructura.*

a. *Dados z, $z' \in P_\star$, con $\Pi(z) = \Pi(z') = l$, y dadas $\lambda \in \mathcal{C}_z^P$ y $\lambda' \in \mathcal{C}_{z'}^P$ definimos*

$$\Upsilon_{zz'} := \lambda(B^{\lambda'}(\cdot)|_l) \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$$

(que es independiente de las λ y λ' elegidas).

b. *Dado $z \in P_\star$, con $\Pi(z) = l$, definimos la aplicación bilineal antisimétrica de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$* (ver I.2.3) *dada por*

$$\mathcal{T}_z := d\theta^L \circ (B^\lambda(\cdot)|_l, B^\lambda(\cdot)|_l) \in Z^{0,2}(\mathfrak{g}) := A^2(n), \qquad \forall\, \lambda \in \mathcal{C}_z^P,$$

que llamaremos la torsión *de z (o de H^z).*

Nota 58

a. En el caso $P = LM$ la condición **c** de D.2 (III.2.1) equivale a $\mathcal{T}_z = 0$.

b. Dado $z \in P_\star$ y dado $t \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$, existe un único $z' \in P_\star$, con $\Pi(z) = \Pi(z')$, tal que

$$\Upsilon_{zz'} = t.$$

En efecto: El subespacio $H := \{B^\lambda(v)|_{\Pi(z)} + (t(v))^\sharp|_{\Pi(z)} : v \in \mathbf{R}^n\}$, con $\lambda \in \mathcal{C}_z^P$, es transversal a la fibra de $P \to M$ y determina un único $z' \in P_\star$ que verifica la propiedad deseada.

Ampliando la representación $\mathcal{A}^2$ (L.38.c) a una representación (definida y denotada de la misma forma)

$$\mathcal{A}^2 : G \otimes L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \longrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}),$$

el elemento

$$z' := z \circ \mathcal{A}^2_{(I,t)}$$

es el único que verifica la propiedad deseada.

c. Por N.57.d, es obvio que una conexión λ arbitraria en P define una sección global σ_λ de $P_\star \to P$ dada por $\sigma_\lambda(l)(v, \alpha) := B^\lambda(v)|_l + \alpha^\sharp|_l$, verificándose (por las propiedades de los campos λ-horizontales y de los campos fundamentales; ver I.4.1) que $R^L_{a\,*} \circ \sigma_\lambda(l) = \sigma_\lambda(la) \circ \mathcal{A}^2_{(a^{-1},0)}$, $\forall\, a \in G$. Recíprocamente, es inmediato comprobar que cualquier sección global de $P_\star \to P$, que verifique esta última propiedad, viene determinada por una conexión en P conforme a este procedimiento.

Por otro lado, una conexión λ en P determina una función

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_\lambda : & P & \longrightarrow & Z^{0,2}(\mathfrak{g}) := A^2(n) \\ & l & \longmapsto & \mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}, \end{array}$$

que verifica la propiedad

$$\mathcal{T}_{\sigma_\lambda(la)} = a^{-1}\mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}(a\cdot, a\cdot) = (\mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)})_{a^{-1}}, \quad \forall\, a \in G.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\sigma_\lambda(la)}(v,w) &= d\theta^L(B^\lambda(v)|_{la}, B^\lambda(w)|_{la}) = \\ &= d\theta^L(R^L_{a*}(B^\lambda(av)|_l), R^L_{a*}(B^\lambda(aw)|_l)) = \\ \text{(I.4.1)} &= a^{-1}d\theta^L(B^\lambda(av)|_l, B^\lambda(aw)|_l) = a^{-1}\mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}(av, aw).\end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{T}_\lambda$ determina (y es determinada por) la torsión Θ_λ de λ; de hecho se tiene

$$\Theta_\lambda = \mathcal{T}_\lambda \circ (\theta^L, \theta^L).$$

En particular, Θ_λ se anula en un punto si y sólo si $\mathcal{T}_\lambda$ se anula en ese punto.

Recordemos la aplicación $\mathbb{A} : C^{1,1}(\mathfrak{g}) \equiv L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^{0,2}(\mathfrak{g}) \equiv A^2(n)$, dada en 1.2.

Lema 41

a. $Ker\mathbb{A} = \mathfrak{g}_1$.

b. $\forall\, z, z' \in P_\star$, *con* $\Pi(z) = \Pi(z') = l$, *se tiene que* $\mathcal{T}_{z'} - \mathcal{T}_z = -2\mathbb{A}(\Upsilon_{zz'})$.

c. $\forall\, z, z' \in P_\star$, *con* $\Pi(z) = \Pi(z')$, *se tiene que*

$$\mathcal{T}_{z'} = \mathcal{T}_z \iff z' = z \circ \mathcal{A}^2_{(l,t)},\ \textit{con}\ t \in \mathfrak{g}_1.$$

Demostración: La parte **a** es inmediata. Basta en efecto recordar (N.48.a) que $\mathfrak{g}_1 = L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \cap S^2(n)$.

Para demostrar **b**, recordar que $\mathcal{T}_z(v,w) = d\theta^L(B^\lambda(v)|_l, B^\lambda(w)|_l)$, siendo $\lambda \in \mathcal{C}^P_z$. Sea $\lambda' \in \mathcal{C}^P_{z'}$; entonces, usando la primera ecuación de estructura (ver I.4.1) de la conexión lineal λ', se tiene que

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{z'} - \mathcal{T}_z)(v,w) &= d\theta^L(B^{\lambda'}(v)|_l, B^{\lambda'}(w)|_l) - \\ &\qquad - d\theta^L(B^\lambda(v)|_l, B^\lambda(w)|_l) = \\ &= \Theta'(B^{\lambda'}(v)|_l, B^{\lambda'}(w)|_l) - \\ &\quad -(-\lambda' \dot\wedge \theta^L + \Theta')(B^\lambda(v)|_l, B^\lambda(w)|_l) = \\ &= (\lambda' \dot\wedge \theta^L)(B^\lambda(v)|_l, B^\lambda(w)|_l) = \\ &= \lambda'(B^\lambda(v)|_l)w - \lambda'(B^\lambda(w)|_l)v = \\ &= -(\Upsilon_{zz'}(v))w + (\Upsilon_{zz'}(w))v,\end{aligned}$$

con Θ' la torsión de λ' (la antepenúltima igualdad se sigue de que la componente λ'-horizontal de $B^\lambda(v)|_l$ es precisamente $B^{\lambda'}(v)|_l$). Por tanto, se obtiene el resultado.

La demostración de **c** es inmediata por **a**, **b** y por N.58.b.

Nota 59

a. $\forall z \in P_\star$ y $\forall t \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$, $\exists z' \in P_\star$, con $\Pi(z) = \Pi(z')$, tal que $\mathcal{T}_{z'} - \mathcal{T}_z = \mathbb{A}(t)$.

En efecto: Tomando $z' = z \circ \mathcal{A}^2_{(I, -\frac{1}{2}t + t')}$, con $t' \in \mathfrak{g}_1$ arbitrario (y $\mathcal{A}^2$ como en N.58.b), se verifica la condición.

Se sigue que: $\forall z \in P_\star$ y $\forall \tau \in Im\,\mathbb{A}$, el elemento $z' = z \circ \mathcal{A}^2_{(I, -\frac{1}{2}s(\tau))}$, con s una sección arbitraria de $\mathbb{A} : L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \to Im\,\mathbb{A}$, verifica $\mathcal{T}_{z'} - \mathcal{T}_z = \tau$.

En particular: si $\mathcal{T}_z \in Im\,\mathbb{A}$, $\exists z' \in P_\star$, con $\mathcal{T}_{z'} = 0$.

b. Sea P una G-estructura y sea $\mathfrak{g}_1 = 0$. Sean λ y λ' dos conexiones en P. Se tiene, $\forall l \in P$,

$$(\Theta_{\lambda'} - \Theta_\lambda)|_l = \text{ (N.58.c) } (\mathcal{T}_{\sigma_{\lambda'}(l)} - \mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}) \circ (\theta^L, \theta^L)|_l,$$

siendo σ_λ y $\sigma_{\lambda'}$ las secciones globales de $P_\star \to P$ inducidas por λ y λ'; se sigue (por $\mathfrak{g}_1 = 0$ y por L.41.c), $\forall l \in P$,

$$\Theta_{\lambda'}|_l = \Theta_\lambda|_l \iff \sigma_{\lambda'}(l) = \sigma_\lambda(l);$$

finalmente (por la biyección existente entre conexiones λ en P y secciones σ_λ)

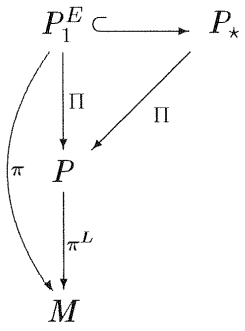
$$\Theta_{\lambda'} = \Theta_\lambda \iff \lambda' = \lambda.$$

Hemos obtenido el resultado (bien conocido; véase p. ej. [Fuj, Cap.III, Prop.2.1]) siguiente: *Si* $\mathfrak{g}_1 = 0$, *las conexiones en una* G*-estructura* $P(M, G)$ *vienen caracterizadas por su torsión.*

Definición 30 *Sea* P *una* G*-estructura. Sea* E *un subespacio complementario de* $Im\,\mathbb{A}$ *en* $Z^{0,2}(\mathfrak{g})$, *es decir,* $Z^{0,2}(\mathfrak{g}) := A^2(n) = Im\,\mathbb{A} + E$ *(suma directa). Se define la* primera prolongación de P relativa a E,

$$P_1^E := \{z \in P_\star : \mathcal{T}_z \in E\}.$$

Denotaremos por Π *la proyección* $P_1^E \to P$, *que es la restricción de la proyección* $L(P) \to P$. *Denotaremos por* π *la proyección* $P_1^E \to M$, $\pi := \pi^L \circ \Pi$.



Sobrentenderemos el grupo aditivo $\mathfrak{g}_1$ identificado con el subgrupo de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$ dado por la imagen del monomorfismo $\mathfrak{g}_1 \hookrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$, $t \mapsto \mathcal{A}^2_{(I,t)}$. Obtenemos el siguiente lema:

Lema 42 *Sea P una G-estructura. Sea E un subespacio complementario de $Im\,\mathbb{A}$ en $Z^{0,2}(\mathfrak{g})$. Entonces $\Pi : P_1^E \to P$ es una $\mathfrak{g}_1$-estructura sobre P, esto es, una reducción de $L(P) \to P$ con grupo de estructura $\mathfrak{g}_1 \hookrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$ y acción*

$$\begin{array}{ccc} P_1^E \times \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & P_1^E \\ (z,t) & \longmapsto & R_t z \equiv zt := z \circ \mathcal{A}^2_{(I,t)}; \end{array}$$

Además P_1^E es una subvariedad regular de $L(P)$.

Demostración: Se siguen en lo posible los pasos dados en la demostración de L.8 en III.2.1.

(i) $L(P) \to P$ es trivializable. En efecto: Basta tomar cualquier conexión en P, que da una paralelización global de $L(P)$ ([K-N, Pr.2.6, p.122]). Dada cualquier sección diferenciable global σ de $L(P) \to P$ se tiene un difeomorfismo $\Psi_\sigma : L(P) \to P \times GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$, que verifica $\Psi_\sigma(Im\,\sigma) = P \times \{e\}$, con e el elemento identidad de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$. Consecuentemente, $L(P)$ es reducible a cualquier subgrupo de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$, en particular a $\mathfrak{g}_1$; y $\Psi_\sigma^{-1}(P \times \mathfrak{g}_1)$ es una reducción.

(ii) Existe una sección diferenciable de $L(P) \to P$ que es sección de $P_1^E \to P$. En efecto: Tomemos la sección σ_λ de $L(P) \to P$ determinada por una conexión λ en P. Se tiene que σ_λ es sección, a su vez, de $P_\star \to P$ y define una función diferenciable (N.58.c) $\mathcal{T}_\lambda : P \to A^2(n)$, $l \mapsto \mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}$. Sea $\mathcal{T}_{\lambda,1} : P \to Im\,\mathbb{A}$ la primera componente de la función $\mathcal{T}_\lambda$ en la descomposición $A^2(n) = Im\,\mathbb{A} + E$. Sea S un subespacio de $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ tal que $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) = S + \mathfrak{g}_1$ (suma directa); entonces (L.41.a) existe un isomorfismo $f : Im\,\mathbb{A} \to S$ tal que $\mathbb{A} \circ f = id_{Im\,\mathbb{A}}$. Se sigue que $f \circ \mathcal{T}_{\lambda,1} : P \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ es una

función diferenciable. Sea $\sigma : P \to P_\star$, $l \mapsto \sigma_\lambda(l) \circ \mathcal{A}^2_{(I,\frac{1}{2}f(\mathcal{T}_{\lambda,1}(l)))}$. Entonces, por N.59.a, $\mathcal{T}_{\sigma(l)} - \mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)} = -\mathcal{T}_{\lambda,1}(l)$. Se sigue que $\mathcal{T}_{\sigma(l)} = \mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)} - \mathcal{T}_{\lambda,1}(l) \in E$ y, por tanto, σ es una sección diferenciable de $P_1^E \to P$ (nótese que σ *no será, en general,* la sección global determinada por una conexión en P, en el sentido de la nota N.58.c).

P_1^E se obtiene como la órbita de $\sigma(P)$ bajo $\mathfrak{g}_1$. En efecto (véase [Ste, Ch.VII, Th.3.2], [Ko2, p.22]): Sea $l \in P$ y sea $z \in P_1^E$ con $\Pi(z) = l$ y tal que $\sigma(l) = z$; sea $z' \in P_\star$ con $\Pi(z') = l$. Probemos que $z' \in P_1^E$ si y solo si $\exists\, t \in \mathfrak{g}_1$ tal que $z' = z \circ \mathcal{A}^2_{(I,t)}$. Pues bien, la condición $z' \in P_1^E$ es equivalente (por el L.41.b y D.30) a $\mathcal{T}_{z'} = \mathcal{T}_z$, lo que a su vez es equivalente (por L.41.c) a que $z' = z \circ \mathcal{A}^2_{(I,t)}$ con $t \in \mathfrak{g}_1$.

(iii) De (i), (ii) y de la propiedad de las trivializaciones locales de un fibrado principal se deduce:

$$\begin{aligned} P_1^E &= (Im\,\sigma)\cdot\mathfrak{g}_1 = \Psi_\sigma^{-1}(P\times\{e\})\cdot\mathfrak{g}_1 = \\ &= \Psi_\sigma^{-1}(P\times\mathfrak{g}_1), \end{aligned}$$

que, por lo dicho antes, es una reducción de $L(P) \to P$ a $\mathfrak{g}_1$.

(iv) Como $\mathfrak{g}_1$ es un subgrupo cerrado de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$, entonces P_1^E es una subvariedad regular de $L(P)$.

Nota 60 Si $P = LM$, como $\mathbb{A}(L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{gl}(n))) = A^2(n)$, el subespacio E es, necesariamente, igual a $\{0\}$, con lo que la primera prolongación de LM es única e igual a $(LM)_1$ (dado en la D.2, III.2.1). Esto será consecuencia también del teorema T.6.

3.2 El caso E invariante y $\mathfrak{g}_1 = 0$.

El espacio total $L(P)$ admite, obviamente, la siguiente G-acción por la derecha $L(P) \times G \to L(P)$, dada por $R_a z \equiv za := R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,0)}$, que no preserva las fibras de $L(P) \to P$, aunque sí las de la proyección $L(P) \to M$. Esta acción tiene de particular que preserva $P_\star$ y, más concretamente, que corresponde (N.61.a, a continuación) a la condición $R^L_{a*}(H^z) = H^{za}$, $\forall\, z \in P_\star$ (N.57.c), equivalente a $C^P_{za} = C^P_z$, $\forall\, z \in P_\star$ (conviene señalar que la acción $\widetilde{R^L_a} : L(P) \to L(P)$, $z \mapsto R^L_{a*} \circ z$ no preserva $P_\star$; ver N.13.e). Pues bien, esta acción también preserva el conjunto P_1^E, si el subespacio E es G-invariante en el sentido que se precisa a continuación.

Lema 43 *Sea P una G-estructura. Sea E un subespacio complementario de $Im\,\mathbb{A}$ en $A^2(n)$, invariante respecto de la representación*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(A^2(n)) \\ a & \longmapsto & (\tau \mapsto a\tau(a^{-1}\cdot, a^{-1}\cdot)). \end{array}$$

Entonces existe la siguiente G-acción sobre P_1^E:

$$\begin{array}{rccc} R: & P_1^E \times G & \longrightarrow & P_1^E \\ & (z,a) & \longmapsto & R_a z \equiv za := R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,0)}. \end{array}$$

Demostración: Sea $z \in P_\star$ con $\Pi(z) \equiv l$. Entonces $za \in P_\star$, pues

$$(za)(0,\alpha) = (R^L_{a*} \circ z)(0, a\alpha a^{-1}) = R^L_{a*}(a\alpha a^{-1})^\sharp|_l = \text{ (I.4.1) } \alpha^\sharp|_{la}$$

y

$$\theta^L((za)(v,0)) = \theta^L((R^L_{a*} \circ z)(av,0)) = \text{ (I.4.1) } a^{-1}\theta^L(z(av,0)) = v.$$

Calculemos ahora (recordar D.29.b):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{za}(v,w) &= d\theta^L((za)(v,0),(za)(w,0)) = \\ &= d\theta^L((R^L_{a*} \circ z)(av,0),(R^L_{a*} \circ z)(aw,0)) = \\ &= \text{(I.4.1) } a^{-1} d\theta^L(z(av,0),z(aw,0)) = a^{-1}\mathcal{T}_z(av,aw); \end{aligned}$$

como E es G-invariante, $\mathcal{T}_z \in E$ implica $\mathcal{T}_{za} \in E$.

Nota 61

a. Como ya se ha dicho antes, la definición dada de za es precisamente la que corresponde a la condición $R^L_{a*}(H^z) = H^{za}$, $\forall\, z \in P_\star$, equivalente a $\mathcal{C}^P_{za} = \mathcal{C}^P_z$, $\forall\, z \in P_\star$.

En efecto: una vez probado que $z \in P_\star \Rightarrow za \in P_\star$ (ver dem. al lema anterior), el resto se sigue inmediatamente de N.13.a.

b. Se verifica $\Pi \circ R_a = R^L_a \circ \Pi$, $\forall\, a \in G$ (ver N.13.b).

Por su interés, damos ahora un teorema de Bernard ([Ber, Cor.III.6.2]) sobre existencia de conexiones canónicas en G-estructuras cuando el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G posee primera prolongación nula y existe un subespacio E complementario de $Im\,\mathbb{A}$ en $A^2(n)$ que sea G-invariante.

Teorema 5 *Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$ con $\mathfrak{g}_1 = 0$. Sea E un subespacio complementario de $Im\,\mathbb{A}$ en $A^2(n)$. Entonces E induce en cualquier G-estructura $P(M,G)$ una 1-forma $\zeta^E \equiv (\zeta^E_{-1}, \zeta^E_0) \in \Lambda^1(P, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$, canónicamente definida, que verifica*

a. $\forall\, \alpha \in \mathfrak{g},\ \zeta^E(\alpha^\sharp) = (0, \alpha)$

b. $\forall\, X \in TP,\ \zeta^E(X) = 0 \implies X \neq 0.$

Se encuentra $\zeta^E_{-1} = \theta^L$, *la 1-forma canónica sobre* P. *Si además* E *es* G-*invariante se verifica*

c. $\forall\, a \in G,\ R_a^{L\,*}\zeta^E = \overline{\mathcal{A}}^2_{a^{-1}} \circ \zeta^E$;

entonces ζ^E *es una forma de tipo Cartan* (D.27), *resultando que* ζ^E_0 *es una conexión en* P *canónicamente definida.*

Demostración: Sea P_1^E la primera prolongación de P relativa a E. Por ser $\mathfrak{g}_1 = 0$, P_1^E es una $\{I\}$-estructura, es decir, una paralelización de P (L.42), con lo que $\Pi : P_1^E \to P$ es un difeomorfismo; llamemos $\jmath_E : P \to P_1^E$ al difeomorfismo inverso. Sea $\theta^{L(P)} \in \Lambda^1(L(P), \mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$ la 1-forma canónica sobre $L(P)$. Entonces la 1-forma

$$\zeta^E \equiv (\zeta^E_{-1}, \zeta^E_0) := \jmath_E{}^*\theta^{L(P)} \in \Lambda^1(P, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g})$$

verifica, de forma inmediata, las propiedades (a) y (b). Finalmente, por N.57.d, se sigue de la definición de ζ^E que $\zeta^E_{-1} = \theta^L$.

Sea E G-invariante. Probemos (c): $\forall\, l \in P$ (llamemos $z \equiv \jmath_E(l)$) y $\forall\, X \in T_lP,\ \zeta^E(X) = \theta^{L(P)}(\jmath_{E*}X) = z^{-1}(X)$, y entonces

$$\begin{array}{rcl} \zeta^E(R^L_{a*}X) & = & \theta^L(\jmath_{E*}(R^L_{a*}X)) = \\ \text{(N.61.b)} & = & (za)^{-1}(R^L_{a*}X) = \\ \text{(L.43)} & = & \mathcal{A}^2_{(a^{-1},0)}(z^{-1}(X)) = (\mathcal{A}^2_{(a^{-1},0)} \circ \zeta^E)(X). \end{array}$$

De lo anterior, y del hecho de que $\mathcal{A}^2_{(a,t)}|_{\mathfrak{g}} = Ad^G_a$ (L.38.c), se sigue que la parte $\mathfrak{g}$-valuada $\zeta^E_0 \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ es una conexión en P.

Nota 62

a. La forma ζ^E es *functorial* respecto de la categoría de G-estructuras, lo que se prueba fácilmente por el hecho de que la forma canónica θ^L así lo es.

b. Se sigue de N.57.d que, $\forall\, l \in P$ (llamemos $z \equiv \jmath_E(l)$), $\zeta^E_0|_l = \lambda|_l,\ \forall\, \lambda \in \mathcal{C}^P_z$; esto es, la sección $\sigma_{\zeta^E_0}$ de $P_\star \to P$ inducida (N.58.c) por la conexión ζ^E_0 verifica $\sigma_{\zeta^E_0}(l) = z = \jmath_E(l)$. Entonces, obviamente, la función (N.58.c) $\mathcal{T}_{\zeta^E_0} : P \to A^2(n)$ toma valores en E.

c. Puesto que la representación adjunta del grupo afín[1] $\mathbf{R}^n \otimes G$ verifica

$$Ad^{\mathbf{R}^n \otimes G}_{(0,a)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & Ad^G_a \end{pmatrix} = \mathcal{A}^2_{(a,0)},$$

en el caso que nos ocupa la representación $\overline{\mathcal{A}}^2$ es la restricción al subgrupo G de la representación adjunta de $\mathbf{R}^n \otimes G$. Por tanto, con las tres propiedades (a, b y c) la 1-forma ζ^E resulta ser una "conexión de Cartan" en P (ver N.56.b; ver también Cap.VII.3.1).

d. Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n)$ con $\mathfrak{g}_1 = 0$; entonces en la secuencia de Spencer resultante, $0 \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathbb{A}} A^2(n) \to 0$, $\mathbb{A}$ es inyectiva (L.41.a) y ello pone una cota superior a la dimensión d de $\mathfrak{g}$ ($d \leq \frac{n(n-1)}{2}$). Supongamos $0 < dim\ H^{0,2}(\mathfrak{g}) < n\frac{n(n-1)}{2}$ (esto es, la aplicación $\mathbb{A}$ no es nula ni tampoco suprayectiva); equivalentemente, $0 < d < \frac{n(n-1)}{2}$. En tal caso, si existe un subespacio E tal que $A^2(n) = Im\,\mathbb{A} \oplus E$ y G-invariante no tiene porque ser único.

Ejemplo: Sea $G = \mathbf{R}^*$ (múltiplos de la identidad no nulos); $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_1 = 0$ y $n\frac{n(n-1)}{2} > dim\ H^{0,2}(\mathfrak{g}) = n(\frac{n(n-1)}{2} - 1) > 0$ (si $n \geq 3$). Las $\mathbf{R}^*$-estructuras han sido estudiadas en [Val]; allí se encuentra una conexión *functorial* adaptada a cada $\mathbf{R}^*$-estructura, con la condición de que la traza de su torsión sea nula. En nuestro lenguaje esta conexión es precisamente ζ^E_0, con $E := \{T \in A^2(n) : T^i_{ji} = 0\}$ (recordar **b** y N.58.c).

e. Con las mismas hipótesis que en **d**: si $dim\ H^{0,2}(\mathfrak{g}) = n\frac{n(n-1)}{2}$ (equivalentemente $d = 0$), existe un *único* subespacio E tal que $A^2(n) = Im\,\mathbb{A} \oplus E$, a saber $E = A^2(n)$ (trivialmente G-invariante).

Ejemplo: Sea $G = \{I \equiv e\}$; $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = 0$ y $\mathfrak{g}_1 = 0$. Las $\{e\}$-estructuras (paralelismos lineales) admiten una conexión *functorial única* (en este sentido), la asociada a la correspondiente paralelización de M. Esta conexión es precisamente ζ^E_0, con $E = A^2(n)$.

---

[1] Acorde con la definición de producto semidirecto dada en I.1.3, el producto en $\mathbf{R}^n \otimes G$ debe leerse $(v, a) \cdot (w, b) = (b^{-1}v + w, ab)$. Es más común (ver p.ej. [K-N, p.125]) tratar el grupo afín como $(\mathbf{R}^n \times G, \star)$, con $(v, a) \star (w, b) = (v + aw, ab)$. Ambas versiones del grupo afín son isomorfas bajo la aplicación $(\mathbf{R}^n \times G, \star) \to \mathbf{R}^n \otimes G$, $(v, a) \mapsto (a^{-1}v, a)$. Lo dicho arriba es independiente de cual sea la versión que se adopte.

f. ([Ber, Cor.III.6.3]) Igual que antes: si *dim* $H^{0,2}(\mathfrak{g}) = 0$ (equivalentemente $d = \frac{n(n-1)}{2}$), existe un *único* subespacio E tal que $A^2(n) = Im\,\mathbb{A} \oplus E$, a saber $E = \{0\}$ (trivialmente G-invariante).

Ejemplo: Sea $G = O(p,q)$ $(p+q=n)$; $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = 0$ y $\mathfrak{g}_1 = 0$. Las $O(p,q)$-estructuras (estructuras semiriemannianas) admiten una conexión *functorial única* (en este sentido), que es precisamente ζ_0^E, con $E = \{0\}$. Esta conexión es de torsión nula (recordar **b** y N.58.c) y es, evidentemente, la de Levi-Civita.

3.3 Unicidad de la primera prolongación y 1-integrabilidad.

Definición 31 *Sea $P(M,G)$ una G-estructura. La* primera función de estructura de P *es*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{c}^1: & P & \longrightarrow & H^{0,2}(\mathfrak{g}) \\ & l & \longmapsto & [\mathcal{T}_z], \end{array}$$

siendo $z \in P_\star$, tal que $\Pi(z) = l$.

En efecto está bien definida: Nótese que $\mathcal{T}_z \in Z^{0,2}(\mathfrak{g}) := A^2(n)$ (ver 1.2) y que si $z, z' \in P_\star$, con $\Pi(z) = \Pi(z')$, entonces $[\mathcal{T}_z] = [\mathcal{T}_{z'}]$, pues, por L.41.b, $\mathcal{T}_z - \mathcal{T}_{z'} \in B^{0,2}(\mathfrak{g}) := Im\,\mathbb{A}$.

Dados $a \in G$ y $\tau \in Z^{0,2}(\mathfrak{g})$, $\tau_a := a\tau(a^{-1}\cdot, a^{-1}\cdot) \in Z^{0,2}(\mathfrak{g})$. Pues bien, se puede definir $[\tau]_a := [\tau_a] \in H^{0,2}(\mathfrak{g})$ (la razón es que, si $\tau \in B^{0,2}(\mathfrak{g})$, entonces $\tau_a \in B^{0,2}(\mathfrak{g})$). Se verifica: $\mathbf{c}^1(la) = \mathbf{c}^1(l)_{a^{-1}}$.

En efecto: Tomemos $z' := R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,0)}$; es inmediato verificar que $z' \in P_\star$, y es obvio que $\Pi(z') = \Pi(z)a$. Tomando $\lambda \in \mathcal{C}^P_z$, y procediendo como en N.58.c, se obtiene que $\mathcal{T}_{z'} = a^{-1}\mathcal{T}_z(a\cdot, a\cdot)$. El resultado se sigue.

Por otra parte, dada una conexión λ arbitraria en P, con sección global asociada (N.58.c) σ_λ de $P_\star \to P$, se verifica

$$\mathbf{c}^1(l) = \text{ (ver arriba) } [\mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}] = \text{ (N.58.c) } [\mathcal{T}_\lambda(l)].$$

El siguiente resultado se debe a Bernard ([Ber, Teor.III.6.1]; véase también [Fuj, Cap.III, Teor.2.1]). Nos ha parecido interesante dar otra demostración, que no usa la correspondencia biyectiva entre las conexiones en P y las escisiones de la secuencia de Atiyah (ver L.21 y apartado 3.5 más adelante), y que nos será además de utilidad cuando tratemos la segunda prolongación de G-estructuras 1-integrables (ver L.52, en el apartado 4.3).

Lema 44 *Sea P una G-estructura y $\mathbf{c}^1 : P \to H^{0,2}(\mathfrak{g})$ su primera función de estructura. Para cada función $\mathcal{T} : P \to Z^{0,2}(\mathfrak{g}) := A^2(n)$, tal que $\mathcal{T}(la) = (\mathcal{T}(l))_{a^{-1}}$ (con $(\ )_a$ definido en D.1 en I.2.3) y $\mathbf{c}^1(l) = [\mathcal{T}(l)]$, $\forall\, l \in P$, existe una conexión λ en P tal que $\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}$.*

Demostración: Sea λ una conexión en P con sección asociada $\sigma_\lambda : P \to P_\star$ y función $\mathcal{T}_\lambda : P \to A^2(n)$, $l \mapsto \mathcal{T}_{\sigma_\lambda(l)}$ (N.58.c). Entonces (L.41.b) $\forall\, l \in P$, $\mathcal{T}_\lambda(l) - \mathcal{T}(l) \in Im\,\mathbb{A}$. Sea S un subespacio de $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ tal que $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) = S + \mathfrak{g}_1$ (suma directa); entonces (L.41.a) existe un isomorfismo $f : Im\,\mathbb{A} \to S$ tal que $\mathbb{A} \circ f = id_{Im\,\mathbb{A}}$. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento por abiertos de M tal que, $\forall\, i$, $P|_{U_i}$ admita una sección $s_i : U_i \to P|_{U_i}$. Y sea $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$ (véase [GHV, I, Ch.I, 1.8]). Definimos, $\forall\, i$, una función $h_i : P|_{U_i} \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$ tal que

$$\begin{array}{rccl} h_i : & P|_{U_i} & \longrightarrow & L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \\ & l \equiv s_i(m)a_i & \longmapsto & \frac{1}{2}a_i^{-1} f(\mathcal{T}_\lambda(s_i(m)) - \mathcal{T}(s_i(m)))(a_i, a_i), \end{array}$$

con $a_i \in G$. Sea la función diferenciable $h = \sum(\varphi_i \circ \pi^L)h_i : P \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g})$; entonces, $\forall\, l \in P$ con $\pi^L(l) = m$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}(h|_l) & = & \sum \varphi_i(m)\mathbb{A}(h_i|_l) = \\ & = & \sum \varphi_i(m)\mathbb{A}(\frac{1}{2}a_i^{-1} f(\mathcal{T}_\lambda(s_i(m)) - \mathcal{T}(s_i(m)))(a_i, a_i)) = \\ & = & \sum \varphi_i(m)\frac{1}{2}a_i^{-1}(\mathcal{T}_\lambda(s_i(m)) - \mathcal{T}(s_i(m)))(a_i, a_i) = \\ \text{(N.58.c)} & = & \sum \varphi_i(m)\frac{1}{2}(\mathcal{T}_\lambda(l) - \mathcal{T}(l)) = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_\lambda(l) - \mathcal{T}(l)). \end{array}$$

Demostremos que $\sigma : P \to P_\star$, dada por $\sigma(l) := \sigma_\lambda(l) \circ \mathcal{A}^2_{(I,h|_l)}$ (N.58.b) es la sección global determinada por una conexión (ver N.58.c). En efecto: Es fácil comprobar que $h|_{la} = (h|_l)_{a^{-1}}$ y que, por tanto, $(a^{-1}, 0) \cdot (I, h|_l) =$ (N.5) $(I, h|_{la}) \cdot (a^{-1}, 0)$. Se sigue que

$$\begin{array}{rcl} R^L_{a*} \circ \sigma(l) & = & R^L_{a*} \circ \sigma_\lambda(l) \circ \mathcal{A}^2_{(I,h|_l)} = \\ \text{(N.58.c)} & = & \sigma_\lambda(la) \circ \mathcal{A}^2_{(a^{-1},0)} \circ \mathcal{A}^2_{(I,h|_l)} = \\ & = & \sigma_\lambda(la) \circ \mathcal{A}^2_{(I,h|_{la})} \circ \mathcal{A}^2_{(a^{-1},0)} = \sigma(la) \circ \mathcal{A}^2_{(a^{-1},0)}, \end{array}$$

lo que nos dice que σ está determinada por una conexión λ' en P, esto es, $\sigma = \sigma_{\lambda'}$. Además, por N.58.b, $h|_l = \Upsilon_{\sigma_\lambda(l)\sigma_{\lambda'}(l)}$, y entonces, por L.41.b, $\mathcal{T}_{\lambda'}(l) - \mathcal{T}_\lambda(l) = -2\mathbb{A}(h|_l) = -\mathcal{T}_\lambda(l) + \mathcal{T}(l)$, $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_{\lambda'} = \mathcal{T}$.

Teorema 6 *Sea P una G-estructura. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) P admite una conexión simétrica.

(ii) La primera función de estructura es nula, esto es, $\mathbf{c}^1(l) = 0$, $\forall\, l \in P$.

(iii) P admite una única primera prolongación, que denotaremos por P_1, independiente del subespacio E elegido.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$. ([Ber, Cor.III.6.4]) Inmediato, de la nota N.58.c.

$(ii) \Rightarrow (i)$. ([Ber, Cor.III.6.4]) Se sigue del lema anterior, tomando $\mathcal{T} = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que $\mathbf{c}^1 = 0$. Entonces, para toda primera prolongación P_1^E y $\forall z \in P_1^E$, $\mathcal{T}_z \in Im\,\mathbb{A} \cap E = \{0\}$. Se concluye que cualquier primera prolongación de P consta de todos aquellos $z \in P_\star$ que verifican $\mathcal{T}_z = 0$; por tanto la primera prolongación es única.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que la primera prolongación de P es única. Dados E, E' tales que $A^2(n) = Im\,\mathbb{A} + E = Im\,\mathbb{A} + E'$, cualquier $z \in P_1^E = P_1^{E'} = P_1$ debe verificar $\mathcal{T}_z \in E \cap E' = \{0\}$. Se concluye que, $\forall l \in P$, $\exists z \in P_\star$, con $\Pi(z) = l$, tal que $\mathcal{T}_z = 0$; por tanto $\mathbf{c}^1 = 0$.

Corolario 3 *Sea P una G-estructura que admita una conexión simétrica. Entonces la (única) primera prolongación P_1 se identifica* (según N.57.b) *con un subfibrado principal de $(LM)_1(LM, S^2(n))$.*

Demostración: Es claro que todos los $z \in P_1$ verifican $\mathcal{T}_z = 0$, con lo que la aplicación $P_\star \to (LM)_\star$, $z \mapsto \bar{z}$ (ver N.57.b) restringe bien a una aplicación $\jmath : P_1 \to (LM)_1$. Por otro lado, una conexión simétrica λ en P, que determina (N.58.c) una sección global de $P_1 \to P$ y por tanto (L.42) una trivialización global de P_1, $\Psi_\lambda^{P_1} : P_1 \to P \times \mathfrak{g}_1$, induce, por imagen directa de la inclusión $P \hookrightarrow LM$, una conexión λ en LM simétrica, y por tanto una trivialización global de $(LM)_1$, $\Psi_\lambda : (LM)_1 \to LM \times S^2(n)$. Sin necesidad de tener en cuenta, por el momento, la expresión explícita de estas trivializaciones, es claro que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\Psi_\lambda^{P_1}} & P \times \mathfrak{g}_1 \\ \downarrow \jmath & & \downarrow (\imath, j) \\ (LM)_1 & \xrightarrow{\Psi_\lambda} & LM \times S^2(n), \end{array}$$

con $\imath : P \to LM$ y $j : \mathfrak{g}_1 \to S^2(n)$ las inclusiones respectivas. Al ser tanto $\imath$ como j inmersiones inyectivas, se sigue que $\jmath(P_1)$ es subvariedad de $(LM)_1$, que $\jmath(P_1)(i(P), j(\mathfrak{g}_1))$ es un fibrado principal y que la inclusión $\jmath(P_1) \hookrightarrow (LM)_1$ es un homomorfismo de fibrados principales que induce una inmersión inyectiva $\imath : P \hookrightarrow LM$ entre las bases.

Sea $P(M, G)$ una G-estructura que admite una conexión simétrica. Procederemos análogamente a lo hecho en el apartado III.2.1.

La acción principal, dada en el L.42, del grupo vectorial $\mathfrak{g}_1$ en el fibrado $\Pi : P_1 \to P$ (que corresponde a la dada en D.3 en III.2.1) verifica las propiedades análogas a las de la nota N.11. Y análogamente a D.4 podemos introducir la siguiente definición:

Definición 32 *Sea λ una conexión en P. Definimos la función*

$$\begin{array}{rccl} \Upsilon^P_\lambda : & P_1 & \longrightarrow & L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \\ & z & \longmapsto & \Upsilon^P_\lambda|_z := \lambda(B^{\lambda'}(\cdot)|_{\Pi(z)}) \quad (\forall\, \lambda' \in \mathcal{C}^P_z). \end{array}$$

Nota 63

a. Al poseer los subespacios horizontales H^z torsión nula (por la construcción de P_1), consideraremos sin perder generalidad que las conexiones lineales $\lambda' \in \mathcal{C}^P_z$ son *simétricas* (ver N.10.c). En el caso de que λ sea simétrica la función Υ^P_λ está valuada en $\mathfrak{g}_1$ (ver N.12.a).

b. Puesto que una conexión λ en P induce una conexión λ en LM (por imagen directa via la inclusión de P en LM) se puede ver que Υ^P_λ es la restricción de Υ_λ (D.4) a P_1.

c. Se verifica para Υ^P_λ, adaptándolos a este caso, los correspondientes análogos a la nota N.12.b, c y d). Destaquemos en particular que la trivialización global $\Psi^{P_1}_\lambda$ de $P_1 \to P$, inducida por una conexión simétrica λ en P, viene dada por

$$\begin{array}{rccl} \Psi^{P_1}_\lambda : & P_1 & \longrightarrow & P \times \mathfrak{g}_1 \\ & z & \longmapsto & (\Pi(z), \Upsilon^P_\lambda|_z). \end{array}$$

Respecto a N.12.e, en nuestro caso *no* es posible, en general, tomar $\lambda = \lambda_x$ (conexión lineal simétrica y plana asociada a una carta x), ya que la G-estructura P no tiene por qué ser integrable. Tómese, sin embargo, una carta x λ-normal de M centrada en $\pi(z)$ y correspondiente a cualquier referencia lineal sobre $\pi(z)$; en tal caso se tiene se tiene (igual que en N.12.e)

$$\Upsilon^P_\lambda|_z = -(x_0^{-1}(\Gamma' \circ \pi^L)(x_0, x_0)|_{\Pi(z)}, \quad \forall\, \lambda' \in \mathcal{C}^P_z,$$

siendo Γ' los coeficientes de λ' en x.

Lema 45 *P_1 es un fibrado principal sobre M con proyección $\pi := \pi^L \circ \Pi$ y la siguiente $G \otimes \mathfrak{g}_1$-acción*

$$\begin{array}{rccl} R : P_1 \times (G \otimes \mathfrak{g}_1) & \longrightarrow & P_1 \\ (z, (a,t)) & \longmapsto & R_{(a,t)}z \equiv z(a,t) := R^L_{a*} \circ z \circ \mathcal{A}^2_{(a,t)}. \end{array}$$

Además, $P_1(M, G \otimes \mathfrak{g}_1)$ *se identifica* (según N.57.b) *con una reducción del fibrado* $(LM)_1(M, GL(n) \otimes S^2(n))$.

Demostración: La primera parte se demuestra análogamente a L.9: la acción definida lo es por la derecha y es diferenciable; la proyección π es diferenciable; y las trivializaciones locales vienen dadas, para cada sección local σ de P (con trivialización local asociada $\Psi^P_\sigma : P|_U \to U \times G$) y para cada conexión simétrica λ en P (con trivialización global asociada $\Psi^{P_1}_\lambda : P_1 \to P \times \mathfrak{g}_1$, ver N.63.c), por

$$\Psi^{P_1}_{\sigma,\lambda} := (\Psi^P_\sigma, id) \circ \Psi^{P_1}_\lambda : P_1|_U \longrightarrow U \times (G \otimes \mathfrak{g}_1).$$

En cuanto a la segunda parte, cada trivialización local Ψ^P_σ de P induce una trivialización local de LM $\Psi^L_\sigma : LM|_U \to U \times GL(n)$ y cada conexión simétrica λ en P induce una trivialización global $\Psi_\lambda : (LM)_1 \to LM \times S^2(n)$; ambas inducen una trivialización local (ver dem. a L.9) $\Psi_{\sigma,\lambda} := (\Psi^L_\sigma, id) \circ \Psi_\lambda : (LM)_1|_U \to U \times (GL(n) \otimes S^2(n))$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_1|_U & \xrightarrow{\Psi^{P_1}_{\sigma,\lambda}} & U \times (G \otimes \mathfrak{g}_1) \\ \downarrow \jmath & & \downarrow (id,(i,j)) \\ (LM)_1|_U & \xrightarrow{\Psi_{\sigma,\lambda}} & U \times (GL(n) \otimes S^2(n)), \end{array}$$

con $\jmath : P_1 \to (LM)_1$, $i : G \to GL(n)$ y $j : \mathfrak{g}_1 \to S^2(n)$ las inclusiones respectivas. Se comprueba entonces trivialmente que la inclusión $\jmath(P_1) \hookrightarrow (LM)_1$ es un homomorfismo de fibrados principales, que induce la aplicación identidad en la base.

Nota 64 Se verifican, adaptando a este caso, los correspondientes análogos a la nota N.14.a, b, c y d).

Sea $P(M, G)$ una G-estructura 1-integrable. Entonces el *levantamiento al orden* 2 de $P(M, G)$, según D.26, es

$$P^2 := \{j^2(\varphi) \in F^2(M) : \exists\, \sigma \in Sec_{\varphi(0)}(P) \text{ con } j^1(\tilde{\varphi} \circ \sigma_I) = j^1(\sigma \circ \varphi)\}.$$

Pretendemos dotar a P^2 de una estructura de fibrado principal sobre M, reducción de $F^2(M)$ con grupo de estructura G^2. Recordemos (T.1 en Cap.III) que la aplicación ι^2 establecía un isomorfismo de fibrados principales sobre M entre $F^2(M)$ y $(LM)_1$. Demostraremos que ι^2 establece una biyección entre P^2 y la (necesariamente única) primera prolongación P_1 de P. Entonces, por L.45, se induce en P^2 la estructura anunciada.

Lema 46 *La aplicación inyectiva* $\iota^2|_{P^2} : P^2 \to L(LM)$ *tiene por imagen el conjunto* $\jmath(P_1)$, *con* $\jmath : P_1 \to (LM)_1$, $z \mapsto \bar{z}$ (ver N.57.b), *y siendo* P_1 *la (necesariamente única) primera prolongación de* P.

Demostración: La restricción de la aplicación ι^2 a P^2 es

$$\begin{array}{rccl} \iota^2|_{P^2} : & P^2 & \longrightarrow & L(LM) \\ & j^2(\varphi) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_*|_{j^1(I)} : \mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n) \to T_{j^1(\varphi)}LM. \end{array}$$

Sea $j^2(\varphi) \in P^2$; sabemos que $\iota^2(j^2(\varphi)) \in (LM)_1$. Por otra parte, $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_*|_{j^1(I)}(v,0) & = & (\tilde{\varphi} \circ \sigma_I)_*|_0(v) = \\ (\text{al ser } j^2(\varphi) \in P^2) & = & \sigma_*(\varphi_*|_0(v)) \in T_{j^1(\varphi)}P, \end{array}$$

para alguna $\sigma \in Sec_{\varphi(0)}P$; esto implica (D.24) que $\iota^2(j^2(\varphi)) = \bar{z}$ con $z \in P_\star$ (notación como en N.57.b). Al ser $\iota^2(P^2) \subset (LM)_1$, se sigue que $\Im_z = 0$ y de ahí que $z \in P_1^E$, $\forall\, E$ (D.30); pero eso significa (L.41.b) que existe una única primera prolongación P_1 y que $z \in P_1$. Hemos probado, por tanto, que $\iota^2(P^2) \subset \jmath(P_1)$; la igualdad se sigue inmediatamente ya que el siguiente diagrama es conmutativo (ver dem. de T.1 en III.2.2):

$$\begin{array}{ccc} P^2 \times G^2 & \xrightarrow{R^2} & P^2 \\ \downarrow{\scriptstyle (\iota^2,(u_0,\bar{u}_1))} & & \downarrow{\scriptstyle \iota^2} \\ \jmath(P_1) \times (G \otimes \mathfrak{g}_1) & \xrightarrow{R} & \jmath(P_1). \end{array}$$

Nota 65

a. Obsérvese que, dado $z \in P_1$ (y el correspondiente $\bar{z} \in (LM)_1$), el elemento de P^2 cuya imagen por ι^2 es $\bar{z}$ es precisamente (dem. L.10.c) aquél $j^2(\varphi) \in F^2(M)$ que verifica (en cualquier carta x de M en torno a $\pi(z)$)

$$\begin{array}{rcll} D(x \circ \varphi)|_0 & = & x_0(\Pi(z)) & \\ D^2(x \circ \varphi)|_0 & = & -((\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}, & \forall\, \lambda \in \mathcal{C}_z^P, \end{array}$$

siendo Γ los coeficientes de λ en x.

b. Nótese que si una G-estructura $P(M,G)$ posee una única primera prolongación P_1 (necesariamente, por el corolario C.3, identificable con una subvariedad de $(LM)_1$), entonces el conjunto $(\iota^2)^{-1}(\jmath(P_1))$ define P^2 y la G-estructura resulta 1-integrable.

Correspondiente a la interpretación geométrica dada por el lema L.11 del apartado III.2.2 se tiene el siguiente lema.

Lema 47 *Sea $z \in P_1$ y para cada $\lambda \in \mathcal{C}^P_z$ sea x_λ una carta λ-normal de M centrada en $\pi(z)$ correspondiente a la referencia lineal $\Pi(z)$. Entonces se verifica que $\iota^2(j^2(x_\lambda^{-1})) = \jmath(z) \equiv \bar{z}$.*

Demostración: A la vista de la nota N.65.a, sólo hay que probar que (usando como carta auxiliar la propia carta $x = x_\lambda$)

$$\begin{aligned} I(= D(x \circ x_\lambda^{-1})|_0) &= x_0(\Pi(z)) \\ 0(= D^2(x \circ x_\lambda^{-1})|_0) &= -((\Gamma \circ \pi^L)(x_0, x_0))|_{\Pi(z)}. \end{aligned}$$

(con Γ los coeficientes de λ en $x = x_\lambda$); lo que es evidente (ya que $\Gamma = 0$).

Habida cuenta de la equivalencia entre 1-integrabilidad y anulación de la primera función de estructura (véase [Gui, Cor. al Teor.4.1]) el teorema T.6 conduce al siguiente resultado:

Lema 48 *Una G-estructura $P(M,G)$ es 1-integrable si y sólo si admite una conexión lineal simétrica. Además, en tal caso, la aplicación ι^2 induce una estructura de fibrado principal en $P^2(M,G^2)$ isomorfo a $P_1(M, G \otimes \mathfrak{g}_1)$, con el isomorfismo de grupos dado en* L.37.

Demostración: La primera parte es inmediata: P es 1-integrable si y sólo si (D.26) se puede definir P^2, si y sólo si (L.46 y N.65.b) P posee una única primera prolongación P_1, si y sólo si (T.6) P admite una conexión simétrica.

En cuanto a la segunda parte, se sigue directamente del lema L.45 y del teorema T.1 (Cap.III).

Nota 66

a. Se puede probar directamente (sin usar ι^2) que $P^2(M,G^2)$ posee una estructura de fibrado principal. Baste decir que, en tal caso, las trivializaciones locales pueden darse, para cada conexión simétrica λ en P y para cada sección local $\sigma \in Sec(P|_U)$, en la forma (ver N.16, Cap.III)

$$\begin{aligned} \Psi^2_{\lambda,\sigma}: \quad P^2|_U &\longrightarrow U \times G^2 \\ j^2(\varphi) &\longmapsto (\varphi(0), j^2(x_{\lambda,\sigma(\varphi(0))} \circ \varphi)), \end{aligned}$$

siendo $x_{\lambda,\sigma(m)}$ una carta λ-normal de M centrada en $m \in U$ y correspondiente a la referencia $\sigma(m) \in P$. Una vez hecho

esto se puede probar que ι^2 induce un isomorfismo de fibrados principales entre $P^2(M,G^2)$ y $P_1(M,G\otimes\mathfrak{g}_1)$. De hecho, se ve (en la línea de la nota N.17.b) que las trivializaciones locales $\Psi^{P_1}_{\lambda,\sigma}$ de P_1 (ver dem. de L.45) hacen conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccc} P^2|_U & \xrightarrow{\Psi^2_{\lambda,\sigma}} & U\times G^2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\jmath^{-1}\circ\iota^2)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (id,(u_0,\bar{u}_1))} \\ P_1|_U & \xrightarrow{\Psi^{P_1}_{\lambda,\sigma}} & U\times(G\otimes\mathfrak{g}_1). \end{array}$$

b. La situación obtenida para una G-estructura 1-integrable se resume en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F^2(M) & \xrightarrow[\cong]{\iota^2} & (LM)_1 & \hookrightarrow & (LM)_* \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \jmath\ \text{L.46}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \text{N.57.b}} \\ P^2 & \xrightarrow[\cong]{\text{L.48}} & P_1 & \hookrightarrow & P_* \end{array}$$

En lo que sigue usaremos, cuando convenga, la identificación $P^2\cong P_1$.

c. Al identificar $P^2\subset F^2(M)$ con $P_1\subset L(P)$, es inmediato ver que la *1-forma canónica* $\theta^2|_{P^2}$ (ver III.1.3) coincide con la *restricción* de la 1-forma canónica θ^L sobre $L(P)$ al subfibrado P_1. La denotaremos simplemente por θ,

$$\theta\equiv\theta^2|_{P^2}=(\jmath^{-1}\circ\iota^2)^*\theta^L\in\Lambda^1(P^2,\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}).$$

3.4 Conexiones de segundo orden para G-estructuras 1-integrables.

Sea $P(M,G)$ una G-estructura 1-integrable. Prácticamente todo lo dicho en el Cap.IV se puede aplicar al subfibrado $P^2\subset F^2(M)$, sustituyendo LM, $F^2(M)$, $GL(n)$, $\mathfrak{gl}(n)$ y $S^2(n)$ por P, P^2, G, $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_1$, respectivamente. En este apartado recalcamos los conceptos más importantes.

Es inmediato ver que la 1-forma canónica de P^2 (ver N.66.c), $\theta\equiv(\theta_{-1},\theta_0)\in\Lambda^1(P^2,\mathbf{R}^n+\mathfrak{g})$ es pseudotensorial de tipo $\mathcal{A}^2$, con $\mathcal{A}^2$ la representación de G^2 en $\mathbf{R}^n+\mathfrak{g}$ (L.38.c) obtenida de la representación con el mismo nombre de $G^2(n)$ en $\mathbf{R}^n+\mathfrak{gl}(n)$ (ver L.12.a en IV.1.1).

Los campos fundamentales de P^2, $(\alpha, s)^\sharp$, con $(\alpha, s) \in \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1$ son las restricciones de los correspondientes campos fundamentales de $F^2(M)$. Se verifican análogas propiedades a las dadas en el lema L.13 (en IV.1.2).

Una conexión $\omega \equiv (\omega_0, \omega_1) \in \Lambda^1(P^2, \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1)$ en P^2 induce, por imagen directa de la inclusión $P^2 \subset F^2(M)$, una conexión de segundo orden (D.8 en IV.2.1) que denotaremos igualmente por ω. La conexión ω induce una única conexión lineal λ_ω en P (análogamente a D.9 en IV.2.1) por la condición $\Pi^*\lambda_\omega = \omega_0$ siendo $\Pi : P^2 \to P$ la proyección. Esta conexión λ_ω da, por imagen directa de la inclusión $P \hookrightarrow LM$, una conexión λ_ω en LM, relacionada con la citada conexión de segundo orden también por la definición D.9. Se obtienen campos de vectores sobre P^2 ω-horizontales estándar con propiedades análogas a las dadas en L.15 (en IV.2.2). Se definen la 'torsión de segundo orden" Θ_ω y la curvatura Ω_ω de ω y se verifican las mismas ecuaciones de estructura que las dadas en el teorema T.2 y corolario C.2 (en IV.3).

En analogía a D.13 (en IV.4.2), podemos denotar por $\mathcal{S}(P^2)$ al conjunto de homomorfismos $\sigma : P \to P^2$ asociados al monomorfismo $G \to G^2 \equiv G \otimes \mathfrak{g}_1$, $a \mapsto (a, 0)$, tales que $\Pi \circ \sigma = id_P$. Igual que en L.17, existe una correspondencia biyectiva natural entre el conjunto de conexiones simétricas en P y el conjunto $\mathcal{S}(P^2)$; y también, dada una conexión simétrica λ en P con su correspondiente $\sigma_\lambda \in \mathcal{S}(P^2)$ se verifica que $(\sigma_\lambda)^*\theta_0 = \lambda$. Se obtiene que una conexión simétrica λ en P induce una conexión ω_λ en P^2 (ver D.15 en IV.4.2) tal que

$$(\sigma_\lambda)^*(\omega_\lambda)_0 = \lambda, \quad (\sigma_\lambda)^*(\omega_\lambda)_1 = 0;$$

se verifica un análogo al lema L.18 y, en concreto, se tiene que

$$(\omega_\lambda)_0 = \Pi^*\lambda, \quad (\omega_\lambda)_1 = d\Upsilon^P_\lambda + (\Upsilon^P_\lambda)^{\Pi^*\lambda},$$

con $\Upsilon^P_\lambda : P_1 \to \mathfrak{g}_1$ definida en D.32 (apartado 3.3).

3.5 Fibrados asociados a P^2.

Sea $P(M, G)$ una G-estructura cualquiera. Recordemos lo dicho al prncipio de la sección V.2. El fibrado TP/G constituido por todos los campos de vectores, definidos a lo largo de las fibras de P, y que son invariantes bajo la acción de G, es un fibrado vectorial de fibra típica $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}$. Lo podemos construir análogamente a lo hecho en V.2.1, y emplear la notación $TP/G \equiv T^PM$. Se tiene una secuencia exacta de fibrados vectoriales, análoga a la definida en L.20:

$$0 \longrightarrow AdP \xrightarrow{\mathrm{j}} T^PM \xrightarrow{\mathrm{r}} TM \longrightarrow 0.$$

También existe una correspondencia biyectiva natural entre el conjunto de conexiones en P y el conjunto de las *escisiones* de esta secuencia exacta,

análogamente a lo establecido en el lema L.21, lo que permite expresar, para cada conexión λ en P, T^PM como suma directa (suma de Whitney) de TM y AdP: $T^LM = TM \oplus_\lambda AdP$ (ver L.22 en V.2.1).

Sea, ahora, $P(M,G)$ una G-estructura 1-integrable. Denotamos por $\mathcal{A}^2P^2$ al fibrado vectorial asociado a P^2 y a la representación $\mathcal{A}^2$ de $G^2 \equiv G \circledS \mathfrak{g}_1$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g}$. Análogamente a lo hecho en T.4 (en V.2.2) se obtiene (aunque no nos detendremos aquí en su demostración) que el fibrado vectorial $\mathcal{A}^2P^2$ es canónicamente isomorfo a T^PM.

En el apartado V.2.3 se introducía la noción de alzado natural $[\tilde{X}]$ a T^LM de un campo de vectores X sobre M. Nótese que el alzado natural $\tilde{X}$ a LM del campo X no da lugar, en general, a un campo de vectores en P. Esto sólo sucede cuando X es un *automorfismo infinitesimal de* P (esto es, cuando el flujo de X está formado por automorfismos de la G-estructura P; véase [Ko2, p.3]). En el caso, pues, de que X sea un automorfismo infinitesimal de P, se obtiene que el alzado natural a T^LM de X (ver D.16 en V.2.3) da origen a una sección $[\tilde{X}]$ de $T^PM \to M$. Se obtiene el siguiente análogo al L.23: Una sección $Z \in Sec(T^PM)$ determina canónicamente sendas secciones $X \in Sec(TM)$ (esto es, $X \in \mathcal{X}(M)$) y $B \in Sec(AdP)$ tal que $Z = [\tilde{X}] + \mathrm{j} \circ B$ si y solo si la proyección de Z en TM, es decir, X es un automorfismo infinitesimal de P. También hay un análogo al L.24 (en V.2.3), con λ una conexión simétrica en P, para el caso en que X sea un automorfismo infinitesimal de P.

Se ve fácilmente que el fibrado tangente de segundo orden, T^2M, puede considerarse un fibrado asociado a P^2M y a la acción $\mathcal{B}$ por la izquierda de $G \circledS \mathfrak{g}_1$ sobre $\mathbf{R}^{2n}$ definida de la misma manera que en D.17, obteniéndose un resultado análogo al establecido en el L.25 (en V.3.2). Las peculiaridades, para cada subgrupo $G \subset GL(n)$, de la acción $\mathcal{B}$ y de la aplicación $\boldsymbol{\delta} : T^PL \to T^2M$ (L.27 en V.3.3) aconsejan un estudio independiente, para cada tipo de G-estructura 1-integrable, del resto de las propiedades halladas en el Cap.V.

4 Segunda prolongación de G-estructuras.

Sea $P(M,G)$ una G-estructura. Se puede continuar (inductivamente, véanse [Ste], [Ko2]) con el proceso de prolongar una primera prolongación arbitraria P_1^E (recordemos que $P_1^E(P,\mathfrak{g}_1)$ es una $\mathfrak{g}_1$-estructura; ver L.42 en apartado 3) obteniendo una llamada *segunda prolongación* de P. Nosotros nos quedamos con el proceso más restrictivo de prolongar *la* primera prolongación $P_1 \equiv P^2$ de una G-estructura 1-integrable (recordar T.6 y L.48). Esta sección es para nosotros la parte más importante del trabajo.

En el apartado 4.1 comenzamos definiendo (D.33) el conjunto $(P^2)_\star \subset L(P^2)$. Asociado a cada elemento $q \in (P^2)_\star$ se define de manera natural su "$\mathfrak{g}$-torsión" (D.34.b) $\overline{\mathcal{T}}_q \in Z^{1,2}(\mathfrak{g}) \subset A^2(n,\mathfrak{g})$. En el orden 1, cada conexión λ en P definía (N.58.c) una sección global σ_λ de $P_\star \to P$ y, por tanto, una función $\mathcal{T}_\lambda : P \to Z^{0,2}(\mathfrak{g})$ que venía controlada por la torsión Θ_λ de λ. No ocurre así en el orden 2: una conexión ω en P^2 *no define* una sección global de $(P^2)_\star \to P^2$; ahora bien, si la conexión inducida λ_ω en P es simétrica, entonces ω define (N.68.b) una sección global $\overline{\sigma}_\omega$ de $(P^2)_\star \to P$ y, por tanto (N.68.c), una función $\overline{\mathcal{T}}_\omega : P \to Z^{1,2}(\mathfrak{g})$ que viene controlada por la parte $\mathfrak{g}$-valuada de la torsión de segundo orden Θ_ω de ω. Lo anterior, junto a un lema técnico (L.49), permite formular un resultado (T.7), análogo al ya conocido en el orden 1 (N.59.b), que afirma: si $\mathfrak{g}_2 = 0$, las conexiones en P^2 con igual conexión inducida simétrica (en P) vienen caracterizadas por su torsión de segundo orden. Consideremos ahora la aplicación $\mathbb{A}_{1,2} : C^{2,1}(\mathfrak{g}) \equiv L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) \longrightarrow C^{1,2}(\mathfrak{g}) \equiv A^2(n,\mathfrak{g})$; para cada subespacio F complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g}) \subset A^2(n,\mathfrak{g})$, se define (D.35) la segunda prolongación $(P^2)_1^F$ de P relativa a F, como el conjunto de referencias en $(P^2)_\star$ que tienen su $\mathfrak{g}$-torsión en F. $(P^2)_1^F$ resulta ser (via la representación $\mathcal{A}^3$; L.50) una $\mathfrak{g}_2$-estructura sobre P^2.

En el apartado 4.2 examinamos lo que ocurre cuando F es G-invariante. En este caso, y análogamente a lo que ocurría en el orden 1, se puede definir en $(P^2)_\star$ una G-acción natural que preserva $(P^2)_1^F$. Siguiendo una sugerencia de [Gui], formulamos a continuación (T.8) un análogo de T.5, que afirma: si $\mathfrak{g}_2 = 0$, cada elección del subespacio (G-invariante) F, como antes, induce sobre P^2 una forma *canónica* ζ^F de tipo Cartan (cuya parte $\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$-valuada no es una conexión en P^2); cabe considerar que éste es el origen de la llamada "conexión" normal de Cartan en las estructuras conformes (ver VII.3). Resulta posible definir (D.36) una diferencial covariante respecto de la distribución (no invariante bajo la acción de $G \otimes \mathfrak{g}_1$) de n-subespacios inducida por la 1-forma ζ^F y, asociada a ella, definir la curvatura de ζ^F, obteniéndose la ecuación de estructura correspondiente (T.9) y las identidades de tipo Bianchi asociadas (C.4). Por último, si $\mathfrak{g}_2 = 0$, obtenemos explícitamente, para cada conexión simétrica en P, una biyección (T.10) entre el conjunto de conexiones de segundo orden en P^2 y cierta clase de formas de tipo Cartan; en la sección VII.4 aplicaremos este resultado al caso de las estructuras conformes.

Finalmente, en el apartado 4.3, estudiamos la unicidad de la segunda prolongación de una G-estructura 1-integrable P, estableciendo (T.11) la equivalencia entre la existencia de conexiones en P^2 con torsión de segundo orden nula, la anulación de la segunda función de estructura (equivalente a su vez, como se sabe [Gui], a la 2-integrabilidad) y la unicidad de la segunda prolongación de P.

4.1 Segunda prolongación $(P^2)_1^F$ de una G-estructura P 1-integrable.

Construimos la segunda prolongación de una G-estructura 1-integrable, que se determina por la elección de cierto subespacio F complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $A^2(n,\mathfrak{g})$ (recordar apartado 1.2)

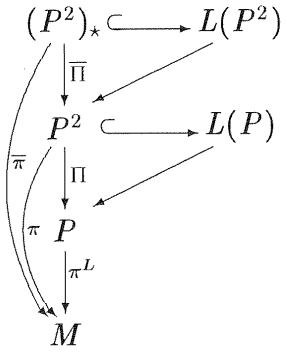
Definición 33 *Sea $P(M,G)$ una G-estructura 1-integrable. Definimos $(P^2)_\star \subset L(P^2)$ como el conjunto de* referencias lineales $q \in L(P^2)$ *(isomorfismos lineales $q : \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 \to T_zP^2$, para algún $z \in P^2$) que verifican las condiciones siguientes:*

a. $\forall\,(\alpha,t) \in \mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1,\ q(0,\alpha,t) = (\alpha,t)^\sharp|_z$, *para algún* $z \in P^2$.

b. $\forall\, v \in \mathbf{R}^n,\ \theta(q(v,0,0)) = (v,0)$.

Denotaremos por $\overline{\Pi}$ la proyección $(P^2)_\star \to P^2$, restricción de la proyección $L(P^2) \to P^2$. Denotaremos por $\overline{\pi}$ la proyección $(P^2)_\star \to M$, $\overline{\pi} := \pi \circ \overline{\Pi}$.

El siguiente diagrama ilustra la situación en que nos hallamos:



Nota 67

a. La condición **a** nos dice que q, aplicado al subespacio $(0,\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1)$, da el subespacio vertical de $T_{\overline{\Pi}(q)}P^2$. Puesto que q es un isomorfismo lineal, el subespacio $\overline{H}^q := q(\mathbf{R}^n,0,0)$ es transversal a la fibra de $P^2 \to M$ y será el subespacio horizontal en $\overline{\Pi}(q)$ para alguna conexión en P^2. Ello permite definir el conjunto $\mathcal{C}_q^{P^2}$ de conexiones en P^2 que tienen a $\overline{H}^q$ por subespacio horizontal.

b. La condición **b** nos dice, por un lado, que para cada $\omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}$ se tiene $q(v,0,0) = B^\omega(v)|_z$, siendo $B^\omega(v)$ el campo estándar ω-horizontal correspondiente a $v \in \mathbf{R}^n$ (ya que $\theta_{-1}(B^\omega(v)|_z) = v$, $\forall v \in \mathbf{R}^n$). Se obtiene que $q(v,\alpha,t) = B^\omega(v)|_z + (\alpha,t)^\sharp|_z$, independientemente de la $\omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}$ que elijamos.

Por otro lado, como (ver L.15.b en IV.2.2)

$$\theta_0(B^\omega(v)|_z) = \lambda(B^{\lambda_\omega}(v)|_{\Pi(z)}), \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}_z^P,$$

b nos dice también que $\lambda_\omega|_{\Pi(z)} = \lambda|_{\Pi(z)}$, $\forall \lambda \in \mathcal{C}_z^P$ y, por tanto (al ser $\theta_0|_z = (\Pi^*\lambda)|_z$ y $\omega_0 = \Pi^*\lambda_\omega$), $\omega_0|_z = \theta_0|_z$. Resulta entonces que

$$q^{-1} = (\theta_{-1}|_z, \omega|_z) = (\theta_{-1}|_z, \theta_0|_z, \omega_1|_z), \quad \forall \omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}.$$

Ya que $\lambda_\omega|_{\Pi(z)} = \lambda|_{\Pi(z)}$, necesariamente $\Pi_*(\overline{H}) = H^z$, por lo cual (ver N.63.a) podemos considerar sin perder generalidad que las conexiones $\omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}$ tienen su conexión inducida, λ_ω, en P simétrica.

Cualquier n-subespacio $\overline{H} \subset T_zP^2$ transversal a la fibra de $P^2 \to M$ y verificando $\Pi_*(\overline{H}) = H^z$ determina unívocamente un isomorfismo lineal $q \in (P^2)_\star$ tal que $\overline{H} = \overline{H}^q$.

c. Se verifica $d\theta_{-1} \circ (\theta_{-1}|_{\overline{H}}^{-1}, \theta_{-1}|_{\overline{H}}^{-1}) = 0$.

En efecto: Por **b**, $\theta_{-1}|_{\overline{H}}^{-1}(v) = B^\omega(v)|_z$ y $\omega_0|_z = \theta_0|_z$. Entonces, por la ecuación del L.12.c, se sigue el resultado.

Haremos, ahora, unas construcciones análogas a las hechas en 3, adaptándonos a la nueva situación (recordar 1.2).

Definición 34 *Sea $P(M,G)$ una G-estructura 1-integrable.*

a. *Dados q, $q' \in (P^2)_\star$, con $\overline{\Pi}(q) = z$, $\overline{\Pi}(q') = z'$ y $\Pi(z) = \Pi(z')$, y dadas $\omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}$ y $\omega' \in \mathcal{C}_{q'}^{P^2}$, definimos*

$$\overline{\Upsilon}_{qq'} := \omega_1(B^{\omega'}(\cdot)|_z) \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$$

(que es independiente de las ω y ω' elegidas).

b. *Dado $q \in (P^2)_\star$, con $\overline{\Pi}(q) = z$, definimos la aplicación*

$$\overline{\mathcal{T}}_q := d\theta_0 \circ (B^\omega(\cdot)|_z, B^\omega(\cdot)|_z) \in Z^{1,2}(\mathfrak{g}) \subset A^2(n,\mathfrak{g}), \quad \forall \omega \in \mathcal{C}_q^{P^2},$$

que llamaremos la g-torsión *de q (o de $\overline{H}^q$).*

En efecto $\overline{\mathcal{T}}_q$ pertenece a $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$ (ver 1.2), pues, por un lado,

$$\mathbb{A}(\overline{\mathcal{T}}_q)(u,v,w) = 3(d\theta_0 \hat{\wedge} \theta_{-1})(B^\omega(u)|_z, B^\omega(v)|_z, B^\omega(w)|_z),$$

con $\omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}$ y $\overline{\Pi}(q) = z$, y, por otro, diferenciando en la ecuación de L.12.c, se obtiene que $d\theta_0 \hat{\wedge} \theta_{-1} = \theta_0 \hat{\wedge} d\theta_{-1}$, que aplicado a vectores ω-horizontales en z es cero (pues $\theta_0|_z = \omega_0|_z$).

Nota 68

a. Dado $q \in (P^2)_\star$ y dado $T \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$, existe un único $q' \in (P^2)_\star$, con $\overline{\Pi}(q) = \overline{\Pi}(q') \equiv z$, tal que

$$\overline{\Upsilon}_{qq'} = T.$$

En efecto: El subespacio $\overline{H} := \{B^\omega(v)|_z + (0, T(v))^\sharp|_z : v \in \mathbf{R}^n\}$, con $\omega \in \mathcal{C}_q^{P^2}$, es transversal a la fibra de $P^2 \to M$ y verifica $\Pi_*(\overline{H}) = H^z$, determinando, por tanto, un único $q' \in (P^2)_\star$ que verifica la propiedad deseada.

Ampliando la representación $\mathcal{A}^3$ (ver 1.5) a una aplicación (definida y denotada de la misma forma)

$$\mathcal{A}^3 : G \circledS(\mathfrak{g}_1 \times L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1), \square) \longrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1),$$

el elemento

$$q' := q \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,T)}$$

es el único que verifica la propiedad deseada.

b. Por N.67.b, dada una conexión ω en P^2 y dado $z \in P^2$, el isomorfismo lineal $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 \to T_z P^2$, $(v, \alpha, t) \mapsto B^\omega(v)|_z + (\alpha, t)^\sharp|_z$, define un elemento de $(P^2)_\star$ si y sólo si $\omega_0|_z = \theta_0|_z$. Esto no puede ser satisfecho, en ningún caso, en todos los puntos $z \in P^2$, debido a las diferentes propiedades de transformación de la forma canónica θ en P^2 y de una conexión ω en P^2 (se deduce, en efecto, de L.12.a y de D.8 que $R^*_{(I,t)}(\theta_0 - \omega_0) = -t(\theta_{-1}) + (\theta_0 - \omega_0)$). Por tanto, a diferencia de lo que ocurre en el orden 1 (N.58.c), dada una conexión arbitraria ω en P^2, ésta *no* define una sección global de $(P^2)_\star \to P^2$.

Ahora bien, sean λ una conexión simétrica en P, σ_λ la sección de $P^2 \to P$ inducida por λ (L.17 y apartado 3.4) y ω *una conexión en* P^2 *tal que* $\lambda_\omega = \lambda$ (D.9 en IV.2.1; en particular esto sucede si tomamos $\omega = \omega_\lambda$, la conexión en P^2 inducida por λ (D.15), ver L.18.a). Entonces *se obtiene una sección global* $\overline{\sigma}_\omega$ *de* $(P^2)_\star \to P$ dada por

$$\overline{\sigma}_\omega(l)(v, \alpha, t) := B^\omega(v)|_{\sigma_\lambda(l)} + (\alpha, t)^\sharp|_{\sigma_\lambda(l)} \in T_{\sigma_\lambda(l)} P^2,$$

que verifica

$$R_{(a,0)*} \circ \overline{\sigma}_\omega(l) = \overline{\sigma}_\omega(la) \circ \mathcal{A}^3_{(a^{-1},0,0)}, \quad \forall\, a \in G.$$

En efecto: Por un lado (L.15.b y N.32.a), $\theta_0(B^\omega(v)|_{\sigma_\lambda(l)}) = 0$, lo que prueba que $\overline{\sigma}_\omega(l) \in (P^2)_\star$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_\omega(la)(a^{-1}v, a^{-1}\alpha a, t_{a^{-1}}) = \\
&\qquad = B^\omega(a^{-1}v)|_{\sigma_\lambda(la)} + (a^{-1}\alpha a, t_{a^{-1}})^\sharp|_{\sigma_\lambda(la)} = \\
&\text{(N.58.c, L.45)} \ = B^\omega(a^{-1}v)|_{\sigma_\lambda(l)a} + (a^{-1}\alpha a, t_{a^{-1}})^\sharp|_{\sigma_\lambda(l)a} = \\
&\text{(L.15.c, L.13.a)} \ = R_{(a,0)*}B^\omega(v)|_{\sigma_\lambda(l)} + R_{(a,0)*}(\alpha, t)^\sharp|_{\sigma_\lambda(l)}.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, cualquier sección global $\overline{\sigma}$ de $(P^2)_\star \to P$ tal que $\overline{\Pi} \circ \overline{\sigma} = \sigma_\lambda$, para alguna conexión simétrica λ en P, y tal que verifique $R_{(a,0)*} \circ \overline{\sigma}(l) = \overline{\sigma}(la) \circ \mathcal{A}^3_{(a^{-1},0,0)}$, $\forall\, a \in G$, determina una conexión ω en P^2, con $\lambda_\omega = \lambda$, tal que $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_\omega$.

En efecto: Para cada $z \in P^2$, con $\Pi(z) \equiv l$, definimos $\tilde{H}_z := R_{(l,\Upsilon_\lambda|_z)*}\overline{H}^{\overline{\sigma}(l)}$. De $R_{(a,0)*} \circ \overline{\sigma}(l) = \overline{\sigma}(la) \circ \mathcal{A}^3_{(a^{-1},0,0)}$ se sigue que $R_{(a,0)*}\overline{H}^{\overline{\sigma}(l)} = \overline{H}^{\overline{\sigma}(la)}$, con lo que (por construcción) la distribución $\{\tilde{H}_z : z \in P^2\}$ es la distribución horizontal para una conexión ω en P^2 tal que $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_\omega$.

c. Sean λ una conexión simétrica en P, σ_λ la sección de $P^2 \to P$ inducida por λ y ω una conexión en P^2 tal que $\lambda_\omega = \lambda$; y sea $\overline{\sigma}_\omega$ la sección global de $(P^2)_\star \to P$ que se ha definido en **b**. Definamos la función

$$\begin{array}{rccc}
\overline{\mathcal{T}}_\omega : & P & \longrightarrow & Z^{1,2}(\mathfrak{g}) \subset A^2(n, \mathfrak{g}) \\
& l & \longmapsto & \overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_\omega(l)},
\end{array}$$

que verifica la propiedad

$$\overline{\mathcal{T}}_\omega(la) = Ad^G_{a_{-1}}\overline{\mathcal{T}}_\omega(l)(a\cdot, a\cdot) = (\overline{\mathcal{T}}_\omega(l))_{a^{-1}}, \quad \forall\, a \in G.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_\omega(la)}(v, w) = d\theta_0(B^\omega(v)|_{\sigma_\lambda(la)}, B^\omega(w)|_{\sigma_\lambda(la)}) = \\
&\quad = d\theta_0(R_{(a,0)*}(B^\omega(av)|_{\sigma_\lambda(l)}), R_{(a,0)*}(B^\omega(aw)|_{\sigma_\lambda(l)})) = \\
&\quad \text{(L.12.a)} \ = Ad^G_{a_{-1}}d\theta_0(B^\omega(av)|_{\sigma_\lambda(l)}, B^\omega(aw)|_{\sigma_\lambda(l)}) = \\
&\qquad\qquad = Ad^G_{a_{-1}}\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_\omega(l)}(av, aw).
\end{aligned}$$

Nótese que $\overline{\mathcal{T}}_\omega$ *determina (y es determinada por) la torsión* Θ_ω de ω; de hecho se tiene

$$(\Theta_\omega)_0|_{\sigma_\lambda(l)} = \overline{\mathcal{T}}_\omega|_l \circ (\theta_{-1}, \theta_{-1})|_{\sigma_\lambda(l)}.$$

En particular, si tomamos $\omega = \omega_\lambda$, la correspondiente función, que denotamos por $\overline{\mathcal{T}}_\lambda \equiv \overline{\mathcal{T}}_{\omega_\lambda}$, determina (y es determinada por) la curvatura Ω_λ de λ; de hecho $\Omega_\lambda|_l = \overline{\mathcal{T}}_\lambda|_l \circ (\theta^L, \theta^L)|_l$.

Ello se sigue de lo anterior, ya que $(\Theta_{\omega_\lambda})_0 = \Pi^*(\Omega_\lambda)$ (T.3.b) y $\theta_{-1} = \Pi^*(\theta^L)$ (L.12.b).

Se sigue que la curvatura de una conexión simétrica en P toma sus valores en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$ (véase [Gui, Prop.8.3]).

Recordemos la aplicación $\mathbb{A}_{1,2} : C^{2,1}(\mathfrak{g}) \equiv L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) \longrightarrow C^{1,2}(\mathfrak{g}) \equiv A^2(n, \mathfrak{g})$, dada en 1.2.

Lema 49

a. $Ker\mathbb{A}_{1,2} = \mathfrak{g}_2$.

b. $\forall\, q, q' \in (P^2)_\star$, *con* $\overline{\Pi}(q) = z$, $\overline{\Pi}(q') = z'$ *y* $\Pi(z) = \Pi(z')$, *se tiene que* $\overline{\mathcal{T}}_{q'} - \overline{\mathcal{T}}_q = -\mathbb{A}_{1,2}(2\overline{\Upsilon}_{qq'} + t^{t(\cdot)})$, *siendo* $t \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$ *dado por* $z' = z(I, t)$.

c. $\forall\, q, q' \in (P^2)_\star$, *con* $\overline{\Pi}(q) = \overline{\Pi}(q')$, *se tiene que*

$$\overline{\mathcal{T}}_{q'} = \overline{\mathcal{T}}_q \iff q' = q \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,T)}, \text{ con } T \in \mathfrak{g}_2.$$

Demostración: La parte **a** es inmediata. Basta en efecto recordar (N.48.a) que $\mathfrak{g}_2 = L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) \cap S^3(n)$.

Para demostrar **b**, nótese que $\overline{\mathcal{T}}_q(v, w) = d\theta_0(B^\omega(v)|_z, B^\omega(w)|_z)$, siendo $\omega \in \mathcal{C}^{P^2}_q$. Sea $\omega' \in \mathcal{C}^{P^2}_{q'}$; entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{T}}_{q'}(v, w) &= d\theta_0(B^{\omega'}(v)|_{z'}, B^{\omega'}(w)|_{z'}) = \\
\text{(L.15.c)} \quad &= d\theta_0(R_{(I,t)*}B^{\omega'}(v)|_z, R_{(I,t)*}B^{\omega'}(w)|_z) = \\
\text{(L.12.a)} \quad &= (\mathcal{A}^2_{(I,-t)}d\theta(B^{\omega'}(v)|_z, B^{\omega'}(w)|_z))_0 = \\
&= -t(d\theta_{-1}(B^{\omega'}(v)|_z, B^{\omega'}(w)|_z)) + \\
&\quad + d\theta_0(B^{\omega'}(v)|_z, B^{\omega'}(w)|_z) = \\
\text{(N.67.c)} \quad &= d\theta_0(B^{\omega'}(v)|_z, B^{\omega'}(w)|_z).
\end{aligned}$$

Usando la ecuación de estructura N.28.a.ii (en IV.3) de la conexión ω'

(llamemos Θ' a la torsión de segundo orden de ω'), se tiene que

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{T}}_{q'} - \overline{\mathcal{T}}_q)(v,w) = \\
&= d\theta_0(B^{\omega'}(v)|_z, B^{\omega'}(w)|_z) - d\theta_0(B^{\omega}(v)|_z, B^{\omega}(w)|_z) = \\
&= \Theta'_0(B^{\omega'}(v)|_z, B^{\omega'}(w)|_z) - (-\omega'_1\tilde{\wedge}\theta_{-1} - [\omega'_0,\theta_0] + \\
&\quad + \frac{1}{2}[\omega'_0,\omega'_0] + \Theta'_0)(B^{\omega}(v)|_z, B^{\omega}(w)|_z) = \\
(*) \quad &= (\omega'_1\tilde{\wedge}\theta_{-1} - \frac{1}{2}[\omega'_0,\omega'_0])(B^{\omega}(v)|_z, B^{\omega}(w)|_z) = \\
(**) \quad &= (\omega'_1\tilde{\wedge}\theta_{-1} - \frac{1}{2}[t(\theta_{-1}),t(\theta_{-1})])(B^{\omega}(v)|_z, B^{\omega}(w)|_z) = \\
&= \omega'_1(B^{\omega}(v)|_z)(w) - \omega'_1(B^{\omega}(w)|_z)(v) - [t(v),t(w)] = \\
\text{(L.2.b.vii)} \quad &= -(\overline{\Upsilon}_{qq'}(v))w + (\overline{\Upsilon}_{qq'}(w))v - \frac{1}{2}(t^{t(v)}(w) - t^{t(w)}(v));
\end{aligned}$$

la igualdad $(*)$ se sigue de que la componente ω'-horizontal de $B^{\omega}(v)|_z$ es precisamente $B^{\omega'}(v)|_z$ y de que (N.67.b) $\theta_0|_z = \omega_0|_z$; en cuanto a la igualdad $(**)$, nótese que (N.67.b) $\theta_0|_{z'} = \omega'_0|_{z'}$, $\Rightarrow$ (N.33.a) $\Upsilon_{\lambda_{\omega'}}|_{z'} = 0$, $\Rightarrow$ (N.12.b) $\Upsilon_{\lambda_{\omega'}}|_z = -t$, $\Rightarrow$ (N.33.a) $\omega'_0|_z = \theta_0|_z - t(\theta_{-1}|_z)$, y, de nuevo por $\theta_0|_z = \omega_0|_z$, la igualdad $(**)$ se sigue. Por tanto, se obtiene el resultado.

Para demostrar **c**, nótese que si $\overline{\Pi}(q) = \overline{\Pi}(q')$ entonces, por **a** y **b**, $\overline{\mathcal{T}}_{q'} = \overline{\mathcal{T}}_q$ implica que $\overline{\Upsilon}_{qq'} \in \mathfrak{g}_2$, y entonces **c** se sigue de N.68.a.

Nota 69 $\forall\, q \in (P^2)_\star$ y $\forall\, T \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$, $\exists\, q' \in (P^2)_\star$, con $\overline{\Pi}(q) = \overline{\Pi}(q')$, tal que $\overline{\mathcal{T}}_{q'} - \overline{\mathcal{T}}_q = \mathbb{A}_{1,2}(T)$.

> En efecto: Tomando $q' = z \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,-\frac{1}{2}T+T')}$, con $T' \in \mathfrak{g}_2$ arbitrario (y $\mathcal{A}^3$ como en N.68.a), se verifica la condición.

Se tiene que el elemento $q' = q \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,-\frac{1}{2}s(\tau))}$, $\forall\, q \in (P^2)_\star$ y $\forall\, \tau \in Im\,\mathbb{A}_{1,2}$, y con s sección arbitraria de $\mathbb{A}_{1,2} : L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) \to Im\,\mathbb{A}_{1,2}$, verifica $\overline{\mathcal{T}}_{q'} - \overline{\mathcal{T}}_q = \tau$.

En particular: si $\overline{\mathcal{T}}_q \in Im\,\mathbb{A}_{1,2}$, $\exists\, q' \in (P^2)_\star$ con, $\overline{\mathcal{T}}_{q'} = 0$.

Teorema 7 *Sea P una G-estructura 1-integrable y sea $\mathfrak{g}_2 = 0$. Las conexiones en P^2 con igual conexión inducida simétrica en P vienen caracterizadas por su torsión de segundo orden.*

> **Demostración:** Sean ω y ω' dos conexiones en P^2 con $\lambda_\omega = \lambda_{\omega'} \equiv \lambda$ simétrica. Se tiene, $\forall\, l \in P$ (por N.68.c),
>
> $$((\Theta_{\omega'})_0 - (\Theta_\omega)_0)|_{\sigma_\lambda(l)} = (\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_{\omega'}(l)} - \overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_\omega(l)}) \circ (\theta_{-1}, \theta_{-1})|_{\sigma_\lambda(l)},$$

siendo $\overline{\sigma}_\omega$ y $\overline{\sigma}_{\omega'}$ las secciones globales de $(P^2)_\star \to P$ inducidas por ω y ω'; se sigue (por ser λ simétrica, por $\mathfrak{g}_2 = 0$ y por L.49.c), $\forall\, l \in P$,

$$\Theta_{\omega'}|_{\sigma_\lambda(l)} = \Theta_\omega|_{\sigma_\lambda(l)} \iff \overline{\sigma}_{\omega'}(l) = \overline{\sigma}_\omega(l);$$

finalmente (por la biyección existente entre conexiones de segundo orden ω con conexión lineal inducida simétrica y secciones $\overline{\sigma}_\omega$, N.68.b)

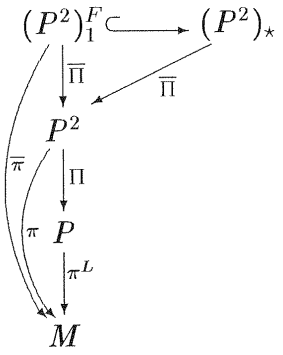
$$\Theta_{\omega'} = \Theta_\omega \iff \omega' = \omega.$$

Definición 35 *Sea P una G-estructura 1-integrable. Sea $F \subset A^2(n,\mathfrak{g})$ un subespacio complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$, es decir, $Z^{1,2}(\mathfrak{g}) = Im\,\mathbb{A}_{1,2} + F$ (suma directa). Se define la* segunda prolongación de P relativa a F,

$$(P^2)_1^F := \{q \in (P^2)_\star : \overline{\jmath}_q \in F\}.$$

Denotaremos por $\overline{\Pi}$ la proyección $(P^2)_1^F \to P^2$, restricción de la proyección $L(P^2) \to P^2$. Denotaremos por $\overline{\pi}$ la proyección $(P^2)_1^F \to M$, $\overline{\pi} := \pi \circ \overline{\Pi}$.

El siguiente diagrama ilustra la situación en que nos hallamos:



Nota 70 En el caso $P^2 = F^2(M)$, puesto que $H^{1,2}(\mathfrak{gl}(n)) = 0$, se obtiene que la segunda prolongación es única, y la podemos denotar por $(F^2(M))_1$. Se podría probar que la aplicación (ver III.1.2)

$$\begin{array}{rccc} \iota^3 : & F^3(M) & \longrightarrow & L(F^2(M)) \\ & j^3(\varphi) & \longmapsto & (J^2\varphi)_*|_{j^2(I)}\,, \end{array}$$

establece una biyección entre $F^3(M)$ y $(F^2(M))_1$. Nosotros no profundizaremos en este punto que nos llevaría a un estudio, en gran parte, similar al realizado para $F^2(M)$.

Sobrentenderemos el grupo aditivo $\mathfrak{g}_2$ identificado con el subgrupo de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$ dado por la imagen del monomorfismo $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$, $T \mapsto \mathcal{A}^3_{(I,0,T)}$. Obtenemos el siguiente lema:

Lema 50 *Sea P una G-estructura 1-integrable. Sea $F \subset A^2(n,\mathfrak{g})$ un subespacio complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$. Entonces $\overline{\Pi} : (P^2)^F_1 \to P^2$ es una $\mathfrak{g}_2$-estructura sobre P^2, esto es, una reducción de $L(P^2) \to P^2$ con grupo de estructura $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$ y acción*

$$\begin{array}{ccc} (P^2)^F_1 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & (P^2)^F_1 \\ (q,T) & \longmapsto & q \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,T)}. \end{array}$$

Además $(P^2)^F_1$ es una subvariedad regular de $L(P^2)$.

Demostración: (Hay una ligera complicación respecto de la demostración de L.42.)

(i) $L(P^2) \to P^2$ es trivializable. En efecto: Basta tomar cualquier conexión en P^2, que da una paralelización global de $L(P^2)$ ([K-N, Pr.2.6, p.122]). Dada cualquier sección diferenciable global $\overline{\sigma}$ de $L(P^2) \to P^2$ se tiene un difeomorfismo $\Psi_{\overline{\sigma}} : L(P^2) \to P^2 \times GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$, que verifica $\Psi_{\overline{\sigma}}(Im\,\overline{\sigma}) = P \times \{e\}$, con e el elemento identidad de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$. Consecuentemente, $L(P^2)$ es reducible a cualquier subgrupo de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$, en particular a $\mathfrak{g}_2$; y $\Psi^{-1}_{\overline{\sigma}}(P^2 \times \mathfrak{g}_2)$ es una reducción.

(ii) Existe una sección diferenciable de $L(P^2) \to P^2$ que es sección de $(P^2)^F_1 \to P^2$. En efecto: Sea λ una conexión simétrica en P, y sea σ_λ la sección global de $P^2 \to P$ determinada por λ (L.17 y apartado 3.4). Sea $z \in P^2$ y sea $\lambda' \in \mathcal{C}^P_z$; denotemos por $\omega_{\lambda,\lambda'}$ la conexión de segundo orden obtenida de λ' por imagen directa a través de $\sigma_\lambda : P \to P^2$ (como en N.34, IV.4.2); obviamente, $\omega_{\lambda,\lambda'}|_z$ es independiente de $\lambda' \in \mathcal{C}^P_z$. Así obtenemos una sección global diferenciable $\tilde{\sigma}_\lambda$ de $(P^2)_\star \to P^2$, definiendo

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\sigma}_\lambda(z): & \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & T_z P^2 \\ & (v,\alpha,t) & \longmapsto & B^{\omega_{\lambda,\lambda'}(v)|_z} + (\alpha,t)^\sharp|_z, \quad \lambda' \in \mathcal{C}_z. \end{array}$$

Entonces $\tilde{\sigma}_\lambda$ define la función diferenciable $\tilde{\mathcal{T}}_\lambda : P^2 \to A^2(n,\mathfrak{g})$, $z \mapsto \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{\sigma}_\lambda(z)}$. Sea $\tilde{\mathcal{T}}_{\lambda,1} : P^2 \to Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ la primera componente de la función $\tilde{\mathcal{T}}_\lambda$ en la descomposición $Z^{1,2}(\mathfrak{g}) = Im\,\mathbb{A}_{1,2} + F$. Sea $\overline{S}$ un subespacio de $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$ tal que $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) = \overline{S} + \mathfrak{g}_2$ (suma directa); entonces (L.49.a) existe un isomorfismo $\overline{f} : Im\,\mathbb{A}_{1,2} \to \overline{S}$ tal que $\mathbb{A}_{1,2} \circ \overline{f} = id_{Im\,\mathbb{A}_{1,2}}$. Se sigue que $\overline{f} \circ \tilde{\mathcal{T}}_{\lambda,1} : P^2 \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$ es una función diferenciable. Definamos $\overline{\sigma} : P^2 \to (P^2)_\star$, $z \mapsto \tilde{\sigma}_\lambda(z) \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,\frac{1}{2}\overline{f}(\tilde{\mathcal{T}}_{\lambda,1}(z)))}$. Por N.69, $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}(z)} - \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{\sigma}_\lambda(z)} = -\tilde{\mathcal{T}}_{\lambda,1}(z)$. Se

sigue que $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}(z)} = \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{\sigma}_\lambda(z)} - \tilde{\mathcal{T}}_{\lambda,1}(z) \in F$ y, por tanto, $\overline{\sigma}$ es una sección diferenciable de $(P^2)_1^F \to P^2$.

$(P^2)_1^F$ se obtiene como la órbita de $\overline{\sigma}(P^2)$ bajo $\mathfrak{g}_2$. En efecto: Sea $z \in P^2$ y sea $q \in (P^2)_1^F$ con $\overline{\Pi}(q) = z$ y tal que $\overline{\sigma}(z) = q$; sea $q' \in (P^2)_\star$ con $\overline{\Pi}(q') = z$. Probemos que $q' \in (P^2)_1^F$ si y solo si $\exists\, T \in \mathfrak{g}_2$ tal que $q' = q \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,T)}$. Pues bien, la condición $q' \in (P^2)_1^F$ es equivalente (por L.49.b) a $\overline{\mathcal{T}}_{q'} = \overline{\mathcal{T}}_q$, lo que a su vez es equivalente (por L.49.c) a $q' = q \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,T)}$, con $T \in \mathfrak{g}_2$.

(iii) De (i), (ii) y de la propiedad de las trivializaciones locales de un fibrado principal se deduce:

$$\begin{aligned}(P^2)_1^F &= (Im\,\overline{\sigma})\cdot\mathfrak{g}_2 = \Psi_{\overline{\sigma}}^{-1}(P^2\times\{e\})\cdot\mathfrak{g}_2 = \\ &= \Psi_{\overline{\sigma}}^{-1}(P^2\times\mathfrak{g}_2),\end{aligned}$$

que, por lo dicho antes, es una reducción de $L(P^2) \to P^2$ a $\mathfrak{g}_2$.

(iv) Como $\mathfrak{g}_2$ es un subgrupo cerrado de $GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$, entonces $(P^2)_1^F$ es una subvariedad regular de $L(P^2)$.

4.2 El caso F invariante y $\mathfrak{g}_2 = 0$.

El espacio total $L(P^2)$ admite (compárese con lo dicho al principio del apartado 3.2) la G-acción por la derecha $L(P^2)\times G \to L(P^2)$, dada por $\overline{R}_a q \equiv qa := R_{(a,0)*}\circ q \circ \mathcal{A}^3_{(a,0,0)}$. Esta acción tiene de particular que preserva ${P^2}_\star$ y, más concretamente, que corresponde a la condición $R_{(a,0)*}(\overline{H}^q) = \overline{H}^{qa}$, $\forall\, q \in (P^2)_\star$ (N.67.a), equivalente a $\mathcal{C}^{P^2}_{qa} = \mathcal{C}^{P^2}_q$, $\forall\, q \in (P^2)_\star$. Pues bien, esta acción también preserva el conjunto $(P^2)_1^F$, si el subespacio F es G-invariante respecto de la representación

$$\begin{aligned}G &\longrightarrow GL(A^2(n,\mathfrak{g}))\\ a &\longmapsto (\tau \mapsto Ad_a^G\circ\tau(a^{-1}\cdot, a^{-1}\cdot)).\end{aligned}$$

Sin embargo, no es posible definir una $G\otimes\mathfrak{g}_1$-acción en $(P^2)_1^F$ de la forma $q(a,t) := R_{(a,t)*}\circ q\circ\mathcal{A}^3_{(a,t,0)}$; la razón es que no es posible introducir, en el caso general, una $G\otimes\mathfrak{g}_1$-acción en $(P^2)_1^F$, puesto que no hay restricción de $\mathcal{A}^3$ a $G^2 \equiv G\otimes\mathfrak{g}_1$, ya que G^2 no es subgrupo de G^3 (ver N.53). Ahora bien, en el caso $\mathfrak{g}_2 = 0$ esto sí puede hacerse, es más, en este caso G^2 y G^3 son canónicamente isomorfos y $\mathcal{A}^3$ induce la representación $\overline{\mathcal{A}}^3 : G\otimes\mathfrak{g}_1 \to Aut(\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$ (L.40.a).

Lema 51 *Sea P una G-estructura 1-integrable y sea $\mathfrak{g}_2 = 0$. Sea $F \subset A^2(n,\mathfrak{g})$ un subespacio complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$, G-invariante (respecto*

de la representación dada arriba). Entonces existe la siguiente $G \otimes \mathfrak{g}_1$-acción sobre $(P^2)_1^F$:

$$\begin{array}{rccl} \overline{R}: & (P^2)_1^F \times G \otimes \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & (P^2)_1^F \\ & (q,(a,t)) & \longmapsto & \overline{R}_{(a,t)}q \equiv q(a,t) := R_{(a,t)^*} \circ q \circ \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)}. \end{array}$$

Demostración: En efecto: Sea $q \in (P^2)_\star$ con $\overline{\Pi}(q) = z$. Entonces $\overline{R}_{(a,t)}q \in (P^2)_\star$ pues (recordar L.40.a)

$$\begin{array}{rcl} (\overline{R}_{(a,t)}q)(0,\alpha,s) & = & (R_{(a,t)^*} \circ q)(0, a\alpha a^{-1}, (-t^\alpha + s)_a) = \\ & = & R_{(a,t)^*}(a\alpha a^{-1}, (-t^\alpha + s)_a)^\sharp|_z = \\ \text{(L.13.a)} & = & (\alpha, s)^\sharp|_{z(a,t)} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \theta((\overline{R}_{(a,t)}q)(v,0,0)) & = & \theta((R_{(a,t)^*} \circ q)(av, a(t(v))a^{-1}, \\ & & \qquad (-\frac{1}{2}t^{t(v)})_a)) = \\ \text{(L.12.a)} & = & \mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}\theta(q(av, a(t(v))a^{-1}, \\ & & \qquad (-\frac{1}{2}t^{t(v)})_a) = \\ \text{(D.33 y L.13.d)} & = & \mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}}(av, a(t(v))a^{-1}) = \\ \text{(N.5 y L.38.c)} & = & (v,0). \end{array}$$

Calculemos ahora (recordar D.34.b)

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{T}}_{\overline{R}_{(a,t)}q}(v,w) & = & d\theta_0((\overline{R}_{(a,t)}q)(v,0,0), (\overline{R}_{(a,t)}q)(w,0,0)) = \\ & = & (R^*_{(a,t)}d\theta_0)|_z((q \circ \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)})(v,0,0), (q \circ \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)})(w,0,0)). \end{array}$$

De L.12.a se sigue que $R^*_{(a,t)}d\theta = \mathcal{A}^2_{(a,t)^{-1}} \circ d\theta$ y, por tanto,

$$R^*_{(a,t)}d\theta_0 = \text{(N.5 y L.38.c)} \; - t(a^{-1}d\theta_{-1}) + Ad^G_{a^{-1}} \circ d\theta_0.$$

Ahora bien:

$$\begin{array}{l} \xi(v) \equiv (q \circ \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)})(v,0,0) = \text{(N.67.b)} \\ \qquad = B^\omega(av)|_z + (a(t(v))a^{-1}, (-\dfrac{1}{2}t^{t(v)})_a)^\sharp|_z, \quad \forall\, \omega \in \mathcal{C}^{P^2}_q; \end{array}$$

con lo cual, se tiene (usando que $\theta_0|_z = \omega_0|_z$)

$$\begin{array}{l} d\theta_{-1}|_z(\xi(v),\xi(w)) = \\ \qquad \text{(L.12.c)} \; = -(\theta_0 \dot{\wedge} \theta_{-1})|_z(\xi(v),\xi(w)) = \\ \qquad = -\omega_0|_z(\xi(v))\theta_{-1}|_z(\xi(w)) + \omega_0|_z(\xi(w))\theta_{-1}|_z(\xi(v)) = \\ \qquad = -(at(v)a^{-1})(aw) + (at(w)a^{-1})(av) = \\ \qquad = -a(t(v,w) - t(w,v))a^{-1} = 0, \end{array}$$

y queda

$$\overline{\mathcal{T}}_{\overline{R}_{(a,t)}q}(v,w) = Ad^G_{a^{-1}}d\theta_0|_z(\xi(v),\xi(w)).$$

Usemos la primera ecuación de estructura de ω (N.28.a.ii)

$$d\theta_0 = -\omega_1 \tilde{\wedge} \theta_{-1} - [\omega_0, \theta_0] + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] + (\Theta_\omega)_0;$$

como se tiene que

$$\begin{aligned} -(\omega_1 \tilde{\wedge} \theta_{-1})|_z(\xi(v), \xi(w)) = \\ = -\omega_1|_z(\xi(v))\theta_{-1}|_z(\xi(w))) + \omega_1|_z(\xi(w))\theta_{-1}|_z(\xi(v))) = \\ = (\frac{1}{2}t^{t(v)})_a(aw) + (-\frac{1}{2}t^{t(w)})_a(av) = \\ = \frac{1}{2}a(t^{t(v)}(w) - t^{t(w)}(v))a^{-1} = \\ \text{(L.2.b.vii)} \quad = a[t(v), t(w)]a^{-1}, \end{aligned}$$

y como (usando que $\theta_0|_z = \omega_0|_z$)

$$\begin{aligned} (-[\omega_0, \theta_0] + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0])|_z(\xi(v), \xi(w)) = \\ = -\frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0]|_z(\xi(v), \xi(w)) = -a[t(v), t(w)]a^{-1}, \end{aligned}$$

queda finalmente

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{T}}_{\overline{R}_{(a,t)}q}(v, w) = Ad^G_{a^{-1}}(\Theta_\omega)_0|_z(\xi(v), \xi(w)) = \\ = Ad^G_{a^{-1}} d\theta_0|_z(B^\omega(av)|_z, B^\omega(aw)|_z) = \\ = Ad^G_{a^{-1}} d\theta_0|_z(q(av, 0, 0), q(aw, 0, 0)) = Ad^G_{a^{-1}} \overline{\mathcal{T}}_q(av, aw); \end{aligned}$$

entonces, como F es invariante, $\overline{\mathcal{T}}_q \in F$ implica $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{R}_{(a,t)}q} \in F$. Luego la acción está bien definida.

Nota 71 Se verifica $\overline{\Pi} \circ \overline{R}_{(a,t)} = R_{(a,t)} \circ \overline{\Pi}$, $\forall\, (a, t) \in G \otimes \mathfrak{g}_1$.

Formulamos a continuación (siguiendo un comentario de Guillemin; véase [Gui]) un teorema sobre existencia de formas canónicas de tipo Cartan en P^2 (análogo al teorema T.5, apartado 3.2).

Teorema 8 *Sea $G \subset GL(n)$ con $\mathfrak{g}_2 = 0$. Y sea $F \subset A^2(n, \mathfrak{g})$ un subespacio complementario de $Im\, \mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g})$. Sea P una G-estructura 1-integrable. Entonces F induce en P^2 una 1-forma $\zeta^F \equiv (\zeta^F_{-1}, \zeta^F_0, \zeta^F_1) \in \Lambda^1(P^2, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$, canónicamente definida, que verifica*

a. $\forall\, (\alpha, t) \in \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1, \quad \zeta^F((\alpha, t)^\sharp|_z) = (0, \alpha, t)$

b. $\forall\, X \in TP^2, \quad \zeta^F(X) = 0 \implies X = 0.$

Se encuentra $\zeta^F_{-1} = \theta_{-1}$, $\zeta^F_0 = \theta_0$, con $\theta \equiv (\theta_{-1}, \theta_0)$ la 1-forma canónica sobre P^2. Si además F es G-invariante se verifica

c. $\forall (a,t) \in G \otimes \mathfrak{g}_1$, $R^*_{(a,t)}\zeta^F = \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)^{-1}} \circ \zeta^F$;

entonces ζ^F *es una forma de tipo Cartan* (D.27).

Demostración: Sea $(P^2)^F_1$ la segunda prolongación de P relativa a F. Por ser $\mathfrak{g}_2 = 0$, $(P^2)^F_1$ es una $\{I\}$-estructura, es decir, una paralelización de P^2 (L.50), con lo que $\overline{\Pi} : (P^2)^F_1 \to P^2$ es un difeomorfismo; llamemos $\jmath_F : P^2 \to (P^2)^F_1$ al difeomorfismo inverso.

$$\begin{array}{ccc} (P^2)^F_1 & \subset\!\!\longrightarrow & L(P^2) \\ {\scriptstyle \jmath_F}\uparrow\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \overline{\Pi}} & \\ P^2 & & \end{array}$$

Sea $\theta^{L(P^2)} \in \Lambda^1(L(P^2), \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$ la 1-forma canónica sobre $L(P^2)$. Definamos la 1-forma

$$\zeta^F \equiv (\zeta^F_{-1}, \zeta^F_0, \zeta^F_1) := \jmath_F^* \theta^{L(P^2)}.$$

Por definición de forma canónica de un fibrado lineal, si $X \in T_z P^2$, $\theta^{L(P^2)}(\jmath_{F*}X) = \jmath_F(z)^{-1}(\overline{\Pi}_*(\jmath_{F*}X)) = \jmath_F(z)^{-1}(X)$. La propiedad (a) se sigue de que $(P^2)^F_1 \subset (P^2)_\star$ (D.33.a). La propiedad (b) es inmediata (recordar que $\jmath_F(z)$ es un cierto isomorfismo $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 \to T_z P^2$). Finalmente, por N.67.b, se sigue de la definición de ζ^F que $\zeta^F_{-1} = \theta_{-1}$ y $\zeta^F_0 = \theta_0$.

Sea F G-invariante. Probemos (c): Se obtiene, fácilmente, $(\forall (a,t) \in G \otimes \mathfrak{g}_1)$ el siguiente diagrama conmutativo

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} (P^2)^F_1 & \xrightarrow{\overline{R}_{(a,t)}} & (P^2)^F_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\Pi}} & & \uparrow{\scriptstyle \jmath_F} \\ P^2 & \xrightarrow{R_{(a,t)}} & P^2. \end{array}$$

Sea, ahora, $X \in T_z P^2$ entonces $R_{(a,t)*}X \in T_{z(a,t)}P^2$; se tiene

$$\begin{array}{rcl} \zeta^F(R_{(a,t)*}X) & = & (\text{T.8})\ (\jmath_F(R_{(a,t)}z))^{-1}(R_{(a,t)*}X) = \\ (\text{por (1)}) & = & (\overline{R}_{(a,t)}\jmath_F(z))^{-1}(R_{(a,t)*}X) = \\ & = & (R_{(a,t)*} \circ \jmath_F(z) \circ \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)})^{-1}(R_{(a,t)*}X) = \\ & = & (\overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)^{-1}} \circ \jmath_F(z)^{-1})(X) = \\ & = & \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)^{-1}}\zeta^F(X). \end{array}$$

Nota 72

a. La forma ζ^F es *functorial* respecto de la categoría de G-estructuras 1-integrables, lo que se prueba fácilmente por el hecho de que la 1-forma canónica $\theta^{L(P^2)}$ sobre $L(P^2)$ y la 1-forma canónica θ sobre P^2 así lo son.

b. Nótese que $(\zeta_0^F = \theta_0, \zeta_1^F)$ no es una conexión de segundo orden (ver N.56.a). Recordar también que, bajo las condiciones de la nota N.56.b aplicadas a este caso, una forma de tipo Cartan podría considerarse una conexión de Cartan (ver Cap.VII.3.1) y en particular ζ^F.

c. Consideremos la distribución de n-subespacios (ver nota N.67.a) $\mathcal{D}_F := \{\overline{H}^{\jmath_F(z)} \equiv \jmath_F(z)(\mathbf{R}^n, 0, 0) : z \in P^2\}$, que, aunque transversales a las fibras de P^2, *no verifican* $R_{(a,t)*}\overline{H}^{\jmath_F(z)} = \overline{H}^{\jmath_F(z(a,t))}$ (si lo verificaran (ζ_0^F, ζ_1^F) sería una conexión de segundo orden).

Definamos el *campo $\mathcal{D}_F$-horizontal correspondiente a* $v \in \mathbf{R}^n$, $B^F(v) \in \mathcal{X}(P^2)$, con $B^F(v)|_z := \theta_{-1}|^{-1}_{\overline{H}^{\jmath_F(z)}}(v) \equiv \jmath_F(z)(v, 0, 0)$, esto es, $\zeta^F(B^F(v)) = (v, 0, 0)$. Estos campos tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_*(B^F(v)|_z) = B^\lambda(v)|_{\Pi(z)}, \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}_z^P$.

En efecto: Se sigue de N.67.b y L.15.a.

(ii) $R_{(a,t)*}B^F(v) = B^F(a^{-1}v) - (t(a^{-1}v), \frac{1}{2}t^{t(a^{-1}v)})^\sharp$.

En efecto: Por N.68.c, se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta^F(R_{(a,t)*}B^F(v)) &= \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)^{-1}}\zeta^F(B^F(v)|_z) = \\ = \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)^{-1}}(v,0,0) &= \\ \text{(ver L.40)} &= (a^{-1}v, -t(a^{-1}v), -\tfrac{1}{2}t^{t(a^{-1}v)}); \end{aligned}$$

y el resultado se sigue.

(iii) $[(\alpha, t)^\sharp, B^F(v)] = B^F(\alpha v) + (t(v), 0)^\sharp$.

En efecto: Que $[(\alpha, 0)^\sharp, B^F(v)] = B^F(\alpha v)$ se demuestra igual que para los campos estándar horizontales de una conexión lineal (véase [K-N, III, Prop.2.3]), puesto que $R_{(a,0)*}B^F(v) = B^F(a^{-1}v)$. Por otro lado, sabemos que $Exp\,\epsilon(0,t) = (I, \epsilon t)$, siendo Exp la aplicación exponencial en el grupo $G \otimes \mathfrak{g}_1$; luego

$$\begin{aligned} [(0,t)^\sharp, B^F(v)] &= \lim_{\epsilon\to 0}\tfrac{1}{\epsilon}(B^F(v) - R_{(I,\epsilon t)*}B^F(v)) = \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\tfrac{1}{\epsilon}(\epsilon t(v), \tfrac{1}{2}\epsilon^2 t^{t(v)})^\sharp = \\ &= (t(v), 0)^\sharp. \end{aligned}$$

(iv) Por construcción (y D.35), $\forall\, z \in P^2$,

$$d\zeta_0^F \circ (B^F(\cdot)|_z, B^F(\cdot)|_z) = d\theta_0 \circ (B^F(\cdot)|_z, B^F(\cdot)|_z) \in F.$$

d. Las curvas integrales de los campos $B^F(v)$ proyectan en ciertas curvas sobre la variedad M, distinguidas localmente por una ecuación de tercer orden que no vamos a estudiar aquí. En el caso conforme dichas curvas son estudiadas por [Ogi] y [Sch]; y entonces se tiene:

Se puede definir una diferencial covariante, respecto de la distribución $\mathcal{D}_F$ de la nota **c** anterior, del siguiente modo. Dado $X \in T_z P^2$, se define X^F como la proyección de X en el subespacio $\overline{H}^{J_F(z)}$, es decir, $X^F := B^F(\theta_{-1}(X))|_z$.

Definición 36 *Dada $\mu \in \Lambda^r(P^2, V)$, con V un espacio vectorial, se define $D^F\mu \in \Lambda^{r+1}(P^2, V)$ por*

$$D^F\mu(X_1, \ldots, X_{r+1}) = d\mu(X_1^F, \ldots, X_{r+1}^F).$$

Definimos la curvatura de la forma ζ^F como la forma

$$\Omega^F \equiv (\Omega_{-1}^F, \Omega_0^F, \Omega_1^F) := D^F\zeta^F \in \Lambda^2(P^2, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1).$$

Nota 73 Se prueba que Ω^F es una 2-forma tensorial de tipo $\overline{\mathcal{A}}^3$.

En efecto: Se sigue de que $R_{(a,t)*}X^F = (R_{(a,t)*}X)^F$, de que $R_{(a,t)}^* \circ d = d \circ R_{(a,t)}^*$ y, por último, de que ζ^F es de tipo $\overline{\mathcal{A}}^3$.

En la literatura es habitual (véase p. ej. [Ko2, IV.3], [Ogi, Sec.5]) *definir* la curvatura de una conexión de Cartan (N.72.b) por la ecuación de estructura que damos a continuación, en analogía a las ecuaciones de estructura para una conexión de segundo orden (ver T.2 y N.28, Cap.IV).

Teorema 9 (Ecuación de estructura de ζ^F). *Se verifica*

$$d\zeta^F = -\frac{1}{2}[\zeta^F, \zeta^F] + \Omega^F,$$

donde el corchete es el de $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$ dada en N.49.b. *En componentes se tiene* (valen las observaciones hechas en N.28, Cap.IV)

i. $\Omega_{-1}^F = d\theta_{-1} + \theta_0 \hat{\wedge} \theta_{-1} =$ (por L.12.c) 0

ii. $d\theta_0 = -\frac{1}{2}[\theta_0, \theta_0] - \zeta_1^F \tilde{\wedge} \theta_{-1} + \Omega_0^F$

iii. $d\zeta_1^F = -\zeta_1^F \tilde{\wedge} \theta_0 + \Omega_1^F$.

Demostración: Es suficiente demostrarlo para $X, Y \in T_z(P^2)$ en los tres casos siguientes:

- Si X, Y son $\mathcal{D}_F$-horizontales. Sean $X = B^F(v)|_z$ e $Y = B^F(w)|_z$. La ecuación se verifica ya que (N.72.c) $\zeta^F(B^F(v)) = (v, 0, 0)$ y, consecuentemente $[\zeta^F, \zeta^F](B^F(v)|_z, B^F(w)|_z) = 0$.
- Si X, Y son verticales. Sean $X = (\alpha, t)^\sharp|_z$ e $Y = (\beta, s)^\sharp|_z$. Se tiene (tener en cuenta el T.8):

$$\begin{cases} d\zeta^F(X,Y) & = & -\zeta^F|_z([(\alpha,t),(\beta,s)]^\sharp) \\ & = & -(0\,,\,[(\alpha,t),(\beta,s)]) \text{ (corchete en } \mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1), \\ [\zeta^F,\zeta^F](X,Y) & = & 2[(0,\alpha,t),(0,\beta,s)] \text{ (cor. en } \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1), \\ \Omega^F(X,Y) & = & 0; \end{cases}$$

  y se verifica la ecuación, pues $\mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1$ es subálgebra de $\mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1$ (bajo la inclusión obvia).
- Si X es vertical e Y es $\mathcal{D}_F$-horizontal. Sean $X = (\alpha, t)^\sharp|_z$ e $Y = B^F(v)|_z$. Se tiene:

$$\begin{cases} d\zeta^F(X,Y) & = & -\zeta^F|_z([(\alpha,t)^\sharp, B^F(v)]) = \\ \text{(N.72.c.iii)} & = & -\zeta^F|_z(B^F(\alpha v) + (t(v),0)^\sharp) = \\ & = & -(\alpha v, t(v), 0), \\ [\zeta^F,\zeta^F](X,Y) & = & 2[(0,\alpha,t),(v,0,0)] = 2(\alpha v, t(v), 0), \\ \Omega^F(X,Y) & = & 0, \end{cases}$$

  y se verifica la ecuación.

El siguiente corolario es un análogo a la identidad (Bianchi) satisfecha por la curvatura de una conexión de segundo orden (ver C.2, Cap.IV).

Corolario 4 *Se verifica:*

a. $\Omega_0^F \dot{\wedge} \theta_{-1} = 0$

b. $D^F \Omega_0^F = \Omega_1^F \tilde{\wedge} \theta_{-1}$

b. $D^F \Omega_1^F = 0.$

Demostración: Para **a**, usando (ii) del teorema anterior, tenemos

$$\Omega_0^F \dot{\wedge} \theta_{-1} = d\theta_0 \dot{\wedge} \theta_{-1} + \frac{1}{2}[\theta_0, \theta_0] \dot{\wedge} \theta_{-1} + (\zeta_1^F \tilde{\wedge} \theta_{-1}) \dot{\wedge} \theta_{-1}.$$

Usando la diferenciación en la ecuación L.12.c, se obtiene

$$d\theta_0 \dot{\wedge} \theta_{-1} = \theta_0 \dot{\wedge} d\theta_{-1} = -\theta_0 \dot{\wedge} (\theta_0 \dot{\wedge} \theta_{-1}) = -\frac{1}{2}[\theta_0, \theta_0] \dot{\wedge} \theta_{-1}$$

(la última igualdad es inmediato verificarla). Por otro lado, se tiene que $(\zeta_1^F \tilde{\wedge} \theta_{-1}) \dot{\wedge} \theta_{-1} = 0$, pues ζ_1^F toma valores en $\mathfrak{g}_1 \subset S^2(n)$. Y la igualdad se sigue.

Para **b**, diferenciando (ii) del teorema anterior, tenemos

$$d\Omega_0^F = \frac{1}{2}[d\theta_0, \theta_0] - \frac{1}{2}[\theta_0, d\theta_0] + d\zeta_1^F \tilde{\wedge} \theta_{-1} - \zeta_1^F \tilde{\wedge} d\theta_{-1};$$

y aplicándolo a vectores $\mathcal{D}_F$-horizontales se sigue el resultado.

Para **c**, diferenciando (iii) del teorema anterior, y aplicándolo a vectores $\mathcal{D}_F$-horizontales se sigue el resultado.

Como hemos visto, la forma ζ^F sobre P^2 (T.8) entra dentro de la categoría de formas de tipo Cartan. El siguiente teorema establece una relación entre formas de tipo Cartan y conexiones de segundo orden.

Teorema 10 *Sea $G \subset GL(n)$ con $\mathfrak{g}_2 = 0$. Sea P una G-estructura 1-integrable. Sea λ una conexión simétrica en P y sea Υ_λ^P la correspondiente función* (D.32).

a. *Sea $\zeta \equiv (\zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1)$ una forma de tipo Cartan sobre P^2. Entonces*

$$\omega := (\zeta_0 + \Upsilon_\lambda^P(\zeta_{-1}),\ \zeta_1 + \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda^P{}^{\Upsilon_\lambda^P(\zeta_{-1})}) \in \Lambda^1(P^2, \mathfrak{g} \ni \mathfrak{g}_1)$$

es una conexión de segundo orden en P^2.

b. *Sea $\omega \equiv (\omega_0, \omega_1)$ una conexión de segundo orden en P^2. Entonces*

$$\zeta := (\theta_{-1},\ \omega_0 - \Upsilon_\lambda^P(\theta_{-1}),\ \omega_1 - \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda^P{}^{\Upsilon_\lambda^P(\theta_{-1})}) \in \Lambda^1(P^2, \mathbf{R}^n + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$$

es una forma de tipo Cartan sobre P^2.

Demostración: Las propiedades de transformación por la acción en P^2 de los objetos ζ, ω y Υ_λ^P son las siguientes (escribimos simplificadamente $\Upsilon_\lambda \equiv \Upsilon_\lambda^P$):

(1) $R^*_{(a,t)}\zeta = \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)^{-1}} \circ \zeta =$ (L.40)

$$= (a^{-1}\zeta_{-1},\ -t(a^{-1}\zeta_{-1}) + a^{-1}\zeta_0 a,\ -\frac{1}{2}t^{t(a^{-1}\zeta_{-1})} + t^{a^{-1}\zeta_0 a} + (\zeta_1)_{a^{-1}}),$$

(2) $R^*_{(a,t)}\omega = Ad_{(a,t)^{-1}} \circ \omega =$ (L.38) $(a^{-1}\omega_0 a, t^{a^{-1}\omega_0 a} + (\omega_1)_{a^{-1}})$.

Por otra parte se obtiene (también en particular cuando $\zeta_{-1} = \theta_{-1}$):

(3) $R^*_{(a,t)}\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1}) = a^{-1}\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})a + t(a^{-1}\zeta_{-1})$.

En efecto: Sea $X \in T_zP^2$,

$$\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})(R_{(a,t)*}X) = (\text{D.14 y L.40})\ \Upsilon_\lambda|_{z(a,t)}(a^{-1}\zeta_{-1}(X)) =$$
$$(\text{N.14.d}) = (\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}(a^{-1}\zeta_{-1}(X)) + t(a^{-1}\zeta_{-1}(X)) =$$
$$(\text{L.2.a.v}) = a^{-1}\,\Upsilon_\lambda|_z(\zeta_{-1}(X))a + t(a^{-1}\zeta_{-1}(X)).$$

Y también se obtiene:

(4) $R^*_{(a,t)}\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})} = (\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})})_{a^{-1}} + 2\,t^{a^{-1}\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})a} + t^{t(a^{-1}\zeta_{-1})}$.

En efecto: Sea $X \in T_zP^2$,

$$\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})}(R_{(a,t)*}X) =$$
$$(\text{D.14 y L.40}) = (\Upsilon_\lambda|_{z(a,t)})^{\Upsilon_\lambda|_{z(a,t)}(a^{-1}\zeta_{-1}(X))} =$$
$$(\text{N.14.d y L.2.b.iii y iv}) = ((\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}})^{(\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}(a^{-1}\zeta_{-1}(X))} +$$
$$+ t^{(\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}(a^{-1}\zeta_{-1}(X))} + ((\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}})^{t(a^{-1}\zeta_{-1}(X))} + t^{t(a^{-1}\zeta_{-1}(X))} =$$
$$(\text{L.2.a.v, L.2.c, N.54.a.i}) = ((\Upsilon_\lambda|_z)^{\Upsilon_\lambda|_z(\zeta_{-1}(X))})_{a^{-1}} +$$
$$+ 2\,t^{(\Upsilon_\lambda|_z)_{a^{-1}}(a^{-1}\zeta_{-1}(X))} + t^{t(a^{-1}\zeta_{-1}(X))},$$

y, de nuevo por L.2.a.v, se sigue.

Probemos **a**: Que $\omega((\alpha,t)^\sharp) = (\alpha,t)$ es inmediato de la primera propiedad de ζ (D.27). Ahora, por

$$R^*_{(a,t)}(\zeta_0 + \Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})) = (1\text{ y }3)\ -t(a^{-1}\zeta_{-1}) + a^{-1}\zeta_0 a +$$
$$+ a^{-1}\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1}) + t(a^{-1}\zeta_{-1}) = a^{-1}(\zeta_0 + \Upsilon_\lambda(\zeta_{-1}))a$$

y por

$$R^*_{(a,t)}(\zeta_1 + \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})}) = (1\text{ y }4)\ -\frac{1}{2}t^{t(a^{-1}\zeta_{-1})} + t^{a^{-1}\zeta_0 a} + (\zeta_1)_{a^{-1}} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})})_{a^{-1}} + t^{a^{-1}\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})a} + \frac{1}{2}t^{t(a^{-1}\zeta_{-1})} =$$
$$(\text{L.2.a.iii y b.iv}) = t^{a^{-1}(\zeta_0+\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1}))a} + (\zeta_1 + \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\zeta_{-1})})_{a^{-1}},$$

se sigue (por 2) que ω verifica la segunda propiedad de una conexión.

Probemos **b**: Que $\zeta((\alpha,t)^\sharp) = (0,\alpha,t)$ es inmediato. Sea $X = B^\omega(v)|_z + (\alpha,t)^\sharp|_z \in T_zP^2$. Supongamos que $\zeta(X) = 0$; entonces $v = \theta_{-1}(X) = 0$ y, por tanto, $\alpha = (\omega_0 - \Upsilon_\lambda(\theta_{-1}))(X) = 0$ y $t = (\omega_1 - \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\theta_{-1})})(X) = 0$; siguiéndose la segunda propiedad de una forma de tipo Cartan ζ. Ahora, por

$$R^*_{(a,t)}(\theta_{-1}) = (\text{L.12.a})\ a^{-1}\theta_{-1},$$

$$R^*_{(a,t)}(\omega_0 - \Upsilon_\lambda(\theta_{-1})) = (2 \text{ y } 3)\ a^{-1}\omega_0 a - a^{-1}\Upsilon_\lambda(\theta_{-1})a - t(a^{-1}\theta_{-1}) =$$
$$= a^{-1}(\omega_0 - \Upsilon_\lambda(\theta_{-1}))a - t(a^{-1}\theta_{-1}),$$

y por

$$R^*_{(a,t)}(\omega_1 - \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\theta_{-1})}) = (2 \text{ y } 4)\ t^{a^{-1}\omega_0 a} + (\omega_1)_{a^{-1}} -$$
$$- \frac{1}{2}(\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\theta_{-1})})_{a^{-1}} - t^{a^{-1}\Upsilon_\lambda(\theta_{-1})a} - \frac{1}{2}t^{t(a^{-1}\theta_{-1})} =$$
$$(\text{L.2.a.iii y b.iv}) \quad = t^{a^{-1}(\omega_0 - \Upsilon_\lambda(\theta_{-1}))a} - \frac{1}{2}t^{t(a^{-1}\theta_{-1})} + (\omega_1 - \frac{1}{2}\Upsilon_\lambda{}^{\Upsilon_\lambda(\theta_{-1})})_{a^{-1}},$$

se sigue (por 1) que ζ verifica la tercera propiedad de una forma de tipo Cartan.

No vamos a explorar aquí en detalle las consecuencias de este teorema. Volveremos a él cuando tratemos en el Cap.VII la geometría conforme.

4.3 Unicidad de la segunda prolongación y 2-integrabilidad.

En [Gui] se define la k-ésima función de estructura para G- estructuras que son $(k-1)$-integrables. Nosotros limitaremos nuestra atención al caso 1-integrable.

Es bien conocido (véase, p.ej.,[Fuj, Cap.III, Prop.3.2]) que si una G-estructura P admite una conexión simétrica y de curvatura nula entonces P es integrable; en este caso, todas las sucesivas funciones de estructura (véase [Gui]) se anulan.

Definición 37 *Sea $P(M,G)$ una G-estructura 1-integrable. Se puede definir una función, llamada* segunda función de estructura de P

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{c}^2: & P & \longrightarrow & H^{1,2}(\mathfrak{g}) \\ & l & \longmapsto & [\overline{\mathcal{T}}_q], \end{array}$$

siendo $q \in (P^2)_\star$, tal que $(\Pi \circ \overline{\Pi})(q) = l$.

En efecto está bien definida: Nótese que $\overline{\mathcal{T}}_q \in Z^{1,2}(\mathfrak{g})$ y que, si $q, q' \in (P^2)_\star$, con $(\Pi \circ \overline{\Pi})(q) = (\Pi \circ \overline{\Pi})(q')$, entonces $[\overline{\mathcal{T}}_q] = [\overline{\mathcal{T}}_{q'}]$, pues, por L.49.b, $\overline{\mathcal{T}}_q - \overline{\mathcal{T}}_{q'} \in B^{1,2}(\mathfrak{g}) := Im\, \mathbb{A}_{1,2}$.

Por otra parte, dadas una conexión simétrica λ en P y una conexión ω en P^2 tal que $\lambda_\omega = \lambda$, con sección global asociada (N.68.b) $\overline{\sigma}_\omega$ de $(P^2)_\star \to P$, se verifica obviamente

$$\mathbf{c}^2(l) = [\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_\omega(l)}] \equiv \text{(N.68.c)}\ [\overline{\mathcal{T}}_\omega(l)].$$

Eligiendo como ω la inducida (apartado 3.4) por λ, $\omega = \omega_\lambda$, se tiene

$$\mathbf{c}^2(l) = [\overline{\mathcal{T}}_{\omega_\lambda}(l)] \equiv \text{(N.68.c)}\ [\overline{\mathcal{T}}_\lambda(l)];$$

habida cuenta de que (ver N.68.c) $\Omega_\lambda|_l = \overline{\mathcal{T}}_\lambda|_l \circ (\theta^L, \theta^L)|_l$, se sigue que la segunda función de estructura viene dada por la clase de cohomología de la curvatura de cualquier conexión simétrica en P ([Gui, Prop.8.3]); en particular, si la curvatura de λ es $\Omega_\lambda = 0$ entonces $\mathbf{c}^2 = 0$.

El siguiente lema es el análogo de orden 2 del L.44, que era una reformulación de un resultado de Bernard para el primer orden. La citada reformulación y la demostración dada en L.44 se pueden trasladar casi literalmente al orden 2.

Lema 52 *Sea P una G-estructura 1-integrable y $\mathbf{c}^2 : P \to H^{1,2}(\mathfrak{g})$ su segunda función de estructura. Para cada conexión simétrica λ en P y para cada función $\overline{\mathcal{T}} : P \to Z^{1,2}(\mathfrak{g})$, tal que $\overline{\mathcal{T}}(la) = (\overline{\mathcal{T}}(l))_{a^{-1}}$ (con $(\ )_a$ definido en D.1 en I.2.3) y $\mathbf{c}^2(l) = [\overline{\mathcal{T}}(l)]$, $\forall\, l \in P$, existe una conexión ω en P^2 tal que $\lambda_\omega = \lambda$ y $\overline{\mathcal{T}}_\omega = \overline{\mathcal{T}}$.*

Demostración: Sea ω_λ la conexión en P^2 inducida por λ con sección asociada $\overline{\sigma}_{\omega_\lambda} : P \to (P^2)_\star$ y función $\overline{\mathcal{T}}_\lambda : P \to Z^{1,2}(\mathfrak{g})$, $l \mapsto \overline{\mathcal{T}}_{\overline{\sigma}_{\omega_\lambda}(l)}$ (N.68.c). Entonces (L.49.b) $\forall\, l \in P$, $\overline{\mathcal{T}}_\lambda(l) - \overline{\mathcal{T}}(l) \in Im\, \mathbb{A}_{1,2}$. Sea S un subespacio de $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$ tal que $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) = S + \mathfrak{g}_2$ (suma directa); entonces (L.49.a) existe un isomorfismo $f : Im\, \mathbb{A}_{1,2} \to S$ tal que $\mathbb{A}_{1,2} \circ f = id_{Im\, \mathbb{A}_{1,2}}$. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento por abiertos de M tal que, $\forall\, i$, $P|_{U_i}$ admita una sección $s_i : U_i \to P|_{U_i}$. Y sea $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$ (véase [GHV, I, Ch.I, 1.8]). Definimos, $\forall\, i$, una función $h_i : P|_{U_i} \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$ tal que

$$\begin{array}{rccl} h_i : & P|_{U_i} & \longrightarrow & L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1) \\ & l \equiv s_i(m)a_i & \longmapsto & \frac{1}{2}a_i^{-1} f(\overline{\mathcal{T}}_\lambda(s_i(m)) - \overline{\mathcal{T}}(s_i(m)))(a_i, a_i), \end{array}$$

con $a_i \in G$. Sea la función diferenciable $h = \sum(\varphi_i \circ \pi^L)h_i : P \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}_1)$; entonces, $\forall\, l \in P$ con $\pi^L(l) = m$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}_{1,2}(h|_l) & = & \sum \varphi_i(m)\mathbb{A}_{1,2}(h_i|_l) = \\ & = & \sum \varphi_i(m)\mathbb{A}_{1,2}(\frac{1}{2}a_i^{-1} f(\overline{\mathcal{T}}_\lambda(s_i(m)) - \overline{\mathcal{T}}(s_i(m)))(a_i, a_i)) = \\ & = & \sum \varphi_i(m)\frac{1}{2}a_i^{-1}(\overline{\mathcal{T}}_\lambda(s_i(m)) - \overline{\mathcal{T}}(s_i(m)))(a_i, a_i) = \\ \text{(N.68.c)} & = & \sum \varphi_i(m)\frac{1}{2}(\overline{\mathcal{T}}_\lambda(l) - \overline{\mathcal{T}}(l)) = \\ & = & \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{T}}_\lambda(l) - \overline{\mathcal{T}}(l)). \end{array}$$

Demostremos que $\overline{\sigma} : P \to (P^2)_\star$, dada por $\overline{\sigma}(l) := \overline{\sigma}_{\omega_\lambda}(l) \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,h|_l)}$ es la sección global determinada por una conexión ω en P^2 tal que $\lambda_\omega = \lambda$ (ver N.68.b). En efecto: Es inmediato que $\overline{\Pi} \circ \overline{\sigma} = \sigma_\lambda$ y es fácil comprobar que $h|_{la} = (h|_l)_{a^{-1}}$ y que, por tanto, $(a^{-1},0,0)\cdot(I,0,h|_l) =$ (ver II.4) $(I,0,h|_{la})\cdot(a^{-1},0,0)$; se sigue que

$$\begin{aligned} R_{(a,0)^*} \circ \overline{\sigma}(l) &= R_{(a,0)^*} \circ \overline{\sigma}_{\omega_\lambda}(l) \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,h|_l)} = \\ \text{(N.68.b)} &= \overline{\sigma}_{\omega_\lambda}(la) \circ \mathcal{A}^3_{(a^{-1},0,0)} \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,h|_l)} = \\ &= \overline{\sigma}_{\omega_\lambda}(la) \circ \mathcal{A}^3_{(I,0,h|_{la})} \circ \mathcal{A}^3_{(a^{-1},0,0)} = \\ &= \overline{\sigma}(la) \circ \mathcal{A}^3_{(a^{-1},0,0)}, \end{aligned}$$

lo que nos dice que $\overline{\sigma}$ está determinada por una conexión ω en P^2 tal que $\lambda_\omega = \lambda$ esto es, $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_\omega$. Además, por N.68.a, $h|_l = \overline{\Upsilon}_{\overline{\sigma}_{\omega_\lambda}(l)\overline{\sigma}_\omega(l)}$, y entonces, por L.49.b, $\overline{\mathcal{T}}_\omega(l) - \overline{\mathcal{T}}_\lambda(l) = -2\mathbb{A}_{1,2}(h|_l) = -\overline{\mathcal{T}}_\lambda(l) + \overline{\mathcal{T}}(l)$, $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{T}}_\omega = \overline{\mathcal{T}}$.

Teorema 11 *Sea P una G-estructura 1-integrable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) P^2 admite una conexión ω de torsión de segundo orden nula.

(ii) La segunda función de estructura es nula, esto es, $\mathbf{c}^2(l) = 0$, $\forall\, l \in P$.

(iii) P admite una única segunda prolongación (D.35)*, que denotaremos por $(P^2)_1$, independiente del subespacio F elegido.*

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$. Inmediato, de la nota N.68.b.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Se sigue del lema anterior, tomando λ cualquier conexión simétrica en P y $\overline{\mathcal{T}} = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que $\mathbf{c}^2 = 0$. Entonces, para toda segunda prolongación $(P^2)^F_1$ y $\forall\, q \in (P^2)^F_1$, $\overline{\mathcal{T}}_q \in Im\,\mathbb{A}_{1,2} \cap F = \{0\}$. Se concluye que cualquier segunda prolongación de P consta de todos aquellos $q \in (P^2)_\star$ que verifican $\overline{\mathcal{T}}_q = 0$; por tanto la segunda prolongación es única.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que la segunda prolongación de P es única. Dados F, F' tales que $Z^{1,2}(\mathfrak{g}) = Im\,\mathbb{A}_{1,2} + F = Im\,\mathbb{A}_{1,2} + F'$, cualquier $q \in (P^2)^F_1 = (P^2)^{F'}_1 = (P^2)_1$ debe verificar $\overline{\mathcal{T}}_q \in F \cap F' = \{0\}$. Se concluye que $\forall\, l \in P$, $\exists\, q \in (P^2)_\star$, con $\overline{\Pi}(\Pi(q)) = l$, tal que $\overline{\mathcal{T}}_q = 0$; por tanto $\mathbf{c}^2 = 0$.

Para una G-estructura 1-integrable $P(M,G)$, no nos ocuparemos aquí de la relación que guardan la segunda prolongación (cuando es única) $(P^2)_1$ y P^3. Guillemin ([Gui]) prueba que, si una G-estructura es 1-integrable, entonces es 2-integrable si y sólo si $\mathbf{c}^2 = 0$; por tanto, el teorema anterior nos daría el resultado (análogo a L.48) de que *P es 2-integrable si y sólo si admite una conexión de segundo orden con torsión de segundo orden cero.*

Capítulo VII

Aplicación a la geometría conforme.

La geometría conforme (en dimensión ≥ 3 y de signatura arbitraria) es el mejor ejemplo al que aplicar los resultados del Cap.VI: Una G-estructura, con G el grupo lineal conforme, es 1-integrable, luego se puede definir su levantamiento al orden 2 y, por tanto, le serán aplicables los apartados VI.3.3, 3.4, 3.5 y 4.1; y es de tipo finito 2, luego se podrán definir formas de tipo Cartan asociadas a ciertos subespacios algebraicos G-invariantes (que existen para el algebra lineal conforme) y, por tanto, le será aplicable el apartado VI.4.2 (para dimensión igual a 3 las estructuras conformes son, además, 2-integrables con lo cual, en este caso, se llega a la situación del apartado VI.4.3).

El objetivo de este capítulo es entrar en *dos* de estas aplicaciones: la primera es la identificación (T.12) de la llamada "conexión normal de Cartan" (introducida por Cartan en [Ca2]; véase también [Ogi], [Och], [Tan], [Ko2] y [Sch]) como una 1-forma de tipo Cartan obtenida por el procedimiento establecido en T.8 (VI.4.2); y la segunda es la obtención (T.13), aplicando T.10 (VI.4.2) a una conexión lineal simétrica λ compatible con la estructura conforme y a la conexión normal de Cartan, de una conexión de segundo orden, distinta de la conexión de segundo orden inducida por λ.

En la sección 1 se introducen conceptos algebraicos que se van a necesitar posteriormente: el grupo lineal conforme y su álgebra de Lie, así como la cohomología de Spencer de ésta; el levantamiento al orden 2 del grupo lineal conforme; y finalmente el grupo conforme completo que aparece como el grupo (maximal) de automorfismos de una cierta estructura conforme (el espacio de Moebius), y cuyos subgrupos de isotropía son isomorfos al citado levantamiento al orden dos. En la sección 2 se obtienen las estructuras conformes de segundo orden. Y por último, en la sección 3, se resuelven las dos aplicaciones mencionadas arriba.

1 Conceptos algebraicos.

En esta sección introducimos una serie de conceptos algebraicos estándar que nos serán de utilidad. En los apartados 1.1 al 1.3 tratamos el grupo lineal conforme $C(n)$ relativo al producto escalar estándar en $\mathbf{R}^n_s$ y la cohomología de Spencer de su álgebra $\mathfrak{c}(n)$; en el lema L.56 se estudian las prolongaciones de $\mathfrak{c}(n)$. En el apartado 1.4 estudiamos el levantamiento al orden 2, $C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$, del grupo lineal conforme cuando $n \geq 3$, obteniendo las expresiones (L.58) de las representaciones adjunta, $\mathcal{A}^2$ y $\overline{\mathcal{A}}^3$ (se usa el isomorfismo $\mathbf{R}^{n*} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathfrak{c}(n)_1$ introducido en L.56). Por último, en el apartado 1.5, se explicita el grupo conforme completo $\overline{C(n)}$ (D.40) y se analiza cómo la restricción de $Ad^{\overline{C(n)}}$ a ciertos subgrupos isomorfos a $C^2(n)$ coincide (L.59.b) con la representación $\overline{\mathcal{A}}^3$; este es el origen de que, para las $C(n)$-estructuras (con $n \geq 3$), conexiones de Cartan (D.41 en Sec.3) y 1-formas de tipo Cartan (D.27 en VI.2) sean lo mismo.

1.1 El grupo lineal conforme.

Sea $\eta : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ el producto escalar (no degenerado) de índice s dado por

$$\begin{array}{rcccl} \eta_{ii} & := & \eta(e_i, e_i) & = & -1 \qquad 1 \leq i \leq s \\ \eta_{jj} & := & \eta(e_j, e_j) & = & +1 \quad s+1 \leq j \leq n \\ \eta_{ij} & := & \eta(e_i, e_j) & = & 0 \qquad i \neq j; \end{array}$$

Denotemos por $\mathbf{R}^n_s$ el espacio (pseudo)euclídeo resultante. Definimos η^{ij} de tal manera que $\eta^{ik}\eta_{kj} = \delta^i_j$.

> Sea $g : E \times E \to \mathbf{R}$ un producto escalar (no degenerado) sobre un espacio vectorial E de dimensión n con signatura $(-, \overset{s}{\cdots}, -, +, \overset{n-s}{\cdots}, +)$. Cualquier base g-ortonormal en E establece una isometría lineal entre (E, g) y $\mathbf{R}^n_s$.

Definición 38 *El* isomorfismo métrico $\mathbf{d}$ *asociado a* η *viene definido por*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{d}: & \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n*} \\ & v & \longmapsto & \mathbf{d}(v) := \eta(v, \cdot); \end{array}$$

Se tiene, por tanto[1],

$$\eta(\mathbf{d}^{-1}(\xi), w) = \xi(w), \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^{n*} \ y \ \forall\, w \in \mathbf{R}^n.$$

[1] Dados $v \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^{n*}$ y $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$, escribiremos $\xi(v) \in \mathbf{R}$ y $\xi\alpha \in \mathbf{R}^{n*}$.

Nota 74

a. En componentes se tiene que

$$\mathbf{d}(v)_i = \eta_{ik}v^k, \quad \text{y} \quad \mathbf{d}^{-1}(\xi)^i = \eta^{ik}\xi_k.$$

b. Llamando $\alpha^\dagger \in \mathfrak{gl}(n)$ a la matriz adjunta de $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ respecto de η, definida por $\eta(v, \alpha^\dagger w) := \eta(\alpha v, w)$, $\forall\, v, w \in \mathbf{R}^n$ (y en componentes: $(\alpha^\dagger)^i_j = \eta^{ik}\alpha^l_k\eta_{lj}$), se verifica:

$$\mathbf{d}^{-1}(\xi\alpha) = \alpha^\dagger \mathbf{d}^{-1}(\xi).$$

En efecto:

$$\eta(\mathbf{d}^{-1}(\xi\alpha), v) = (\xi\alpha)(v) = \eta(\mathbf{d}^{-1}(\xi), \alpha v) = \eta(\alpha^\dagger \mathbf{d}^{-1}(\xi), v).$$

El *grupo lineal conforme relativo a* η es el subgrupo de Lie de $GL(n)$ definido por

$$\begin{aligned} C(n) := \; & \{a \in GL(n) : \exists\, k > 0 \text{ tal que } \eta(av, aw) = k\eta(v, w), \\ & \qquad\qquad \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\} = \\ = \; & \{a \in GL(n) : \exists\, k > 0 \text{ tal que } a^\dagger a = kI\}. \end{aligned}$$

Se puede considerar que $C(n)$ es el *producto directo* de los grupos de Lie: $H(n)$, el *grupo de las homotecias de* $\mathbf{R}^n$

$$H(n) \; := \; \{a \in GL(n) : \exists\, k > 0 \text{ con } a = kI\},$$

y $O(n)$, el *grupo ortogonal relativo a* η

$$\begin{aligned} O(n) \; & := \; \{a \in GL(n) : \eta(av, aw) = \eta(v, w),\ \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\} = \\ & = \; \{a \in GL(n) : a^\dagger a = I\}; \end{aligned}$$

en el sentido de que: $\forall\, a \in C(n)$, $\exists !\, kI \in H(n)$ y $\exists !\, b \in O(n)$ tales que $a = kI \cdot b$.

1.2 El álgebra lineal conforme y sus prolongaciones.

Estudiaremos ahora las álgebras de Lie de los grupos mencionados y calcularemos sus sucesivas prolongaciones.

El álgebra de Lie de $O(n)$ (*álgebra ortogonal relativa a* η) $\mathfrak{o}(n)$ se identifica canónicamente con

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) \; & \equiv \; \{\alpha \in \mathfrak{gl}(n) : \eta(\alpha v, w) + \eta(v, \alpha w) = 0,\ \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\} = \\ & = \; \{\alpha \in \mathfrak{gl}(n) : \alpha^\dagger = -\alpha\}. \end{aligned}$$

La siguiente definición nos será útil más adelante:

Definición 39 *Definimos la aplicación:*

$$\begin{array}{rccl} \{\cdot,\cdot\}: & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathfrak{o}(n) \\ & (v,w) & \longmapsto & \{v,w\} := \eta(v,\cdot)w - \eta(w,\cdot)v. \end{array}$$

La aplicación está bien definida pues $\{v,w\} \in \mathfrak{o}(n)$, $\forall\, v,w \in \mathbf{R}^n$; efectivamente, $\forall\, x,y \in \mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\eta(\{v,w\}x,y) + \eta(x,\{v,w\}y) = \\ &\quad = \eta(\eta(v,x)w - \eta(w,x)v, y) + \eta(x, \eta(v,y)w - \eta(w,y)v) = \\ &= \eta(v,x)\eta(w,y) - \eta(w,x)\eta(v,y) + \eta(v,y)\eta(x,w) - \eta(w,y)\eta(x,v) = 0. \end{aligned}$$

Algunas propiedades de $\{\cdot,\cdot\}$:

Lema 53 *Se verifica* $\forall\, v,w,x \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$*:*

a. $\{\cdot,\cdot\}$ *es bilineal y antisimétrica.*

b. $\{v,w\}^\dagger = \{w,v\}$.

c. $\{\{e_i,e_j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$ *es una base de* $\mathfrak{o}(n)$*, verificándose que* $\{e_i,e_j\} = \eta_{is}E^s_j - \eta_{js}E^s_i$*, ó equivalentemente,* $\{e_i,e_j\}^m_n = \eta_{in}\delta^m_j - \eta_{jn}\delta^m_i$.

d. $\{v,w\}x + \{w,x\}v + \{x,v\}w = 0$.

e. $\{\alpha v,w\} - \{\alpha w,v\} = \alpha\{v,w\} + \{v,w\}\alpha^\dagger$.

f. $[\{x,v\},\{x,w\}] = \eta(x,w)\{x,v\} - \eta(x,v)\{x,w\} + \eta(x,x)\{v,w\}$. *En particular,*

$$[\{e_i,e_j\},\{e_i,e_k\}] = \begin{cases} \{e_j,e_k\} & \text{si } i,j \text{ y } k \text{ son distintos} \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

g. *Sea* $\xi \in \mathbf{R}^{n*}$; $\xi(v)w - \xi(w)v = \{v,w\}\mathbf{d}^{-1}(\xi)$.

Demostración: Los apartados **a** y **b** son inmediatos. Para **c** nótese que $\{\{e_i,e_j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$ es la base de matrices usada habitualmente para $\mathfrak{o}(n)$. **d** se sigue inmediatamente de la definición. Para **e** nótese que $\{\alpha v,w\} - \{\alpha w,v\} = \eta(\alpha v,\cdot)w - \eta(\alpha w,\cdot)v + \eta(v,\cdot)\alpha w - \eta(w,\cdot)\alpha v = \eta(v,\alpha^\dagger\cdot)w - \eta(w,\alpha^\dagger\cdot)v + \alpha(\eta(v,\cdot)w - \eta(w,\cdot)v)$, y el resultado se sigue. Para **f** calculemos

$$\begin{aligned} [\{x,v\},\{x,w\}]y = \; & \eta(x,y)\eta(x,w)v - \eta(w,y)\eta(x,x)v - \\ & -\eta(x,y)\eta(v,w)x + \eta(w,y)\eta(v,x)x - \\ & -\eta(x,y)\eta(x,v)w + \eta(v,y)\eta(x,x)w + \\ & +\eta(x,y)\eta(w,v)x - \eta(v,y)\eta(w,x)x = \\ = \; & \eta(x,w)\{x,v\}y - \eta(x,v)\{x,w\}y + \eta(x,x)\{v,w\}y; \end{aligned}$$

el resto es inmediato. **g** se sigue de D.38.

Lema 54 *Las prolongaciones de* $\mathfrak{o}(n)$ *son todas nulas:*

$$\mathfrak{o}(n)_r = 0, \quad \forall r \geq 1.$$

Demostración: ([Ste, Prop.3.1, p.333],[Ogi],[Ko2, ex.2.5]) Sabemos (ver N.48.a) que $\mathfrak{o}(n)_1 := L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(n)) \cap S^2(n)$. Sea $t \in S^2(n)$ tal que $t(v) \in \mathfrak{o}(n)$, $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$. Se tiene que $\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$:

$$\begin{array}{rrrr} \eta(t(v)x, y) = & -\eta(x, t(v)y) = & -\eta(x, t(y)v) = \\ = & \eta(t(y)x, v) = & \eta(t(x)y, v) = \\ = & -\eta(y, t(x)v) = & -\eta(y, t(v)x), \\ \Longrightarrow & \eta(t(v)x, y) = 0, & \end{array}$$

Luego, como η es no degenerada, implica que $t(v) = 0$. Como esto es $\forall\, v$, se sigue que $t = 0$. Por tanto $\mathfrak{o}(n)_1 = 0$, y también $\mathfrak{o}(n)_r = 0$, para $r > 1$.

El álgebra de Lie de $H(n)$ (*álgebra de homotecias*) $\mathfrak{h}(n)$ se identifica canónicamente con

$$\mathfrak{h}(n) \equiv \{\alpha \in \mathfrak{gl}(n) : \exists \kappa \in \mathbf{R}, \text{ tal que } \alpha = \kappa I\}.$$

Lema 55 *Las prolongaciones de* $\mathfrak{h}(n)$ *son todas nulas:*

$$\mathfrak{h}(n)_r = 0, \quad \forall r \geq 1.$$

Demostración: Sabemos que $\mathfrak{h}(n)_1 := L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{h}(n)) \cap S^2(n)$. Sea $t \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{h}(n))$ entonces existe algún $\xi \in \mathbf{R}^{n*}$ tal que $t(v) = \xi(v)I$. Por otro lado si $t \in S^2(n)$, debe ser $\forall\, v, w \in \mathbf{R}^n$, $\xi(v)w = \xi(w)v$. Esto implica que ξ y, por tanto t, son cero. El resultado se sigue.

Es inmediato ver que el álgebra de Lie de $C(n)$ (*álgebra lineal conforme relativa a* η) $\mathfrak{c}(n)$ se identifica canónicamente con

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{c}(n) \equiv & \{\alpha \in \mathfrak{gl}(n) : \exists\, \kappa \in \mathbf{R} \text{ tal que } \eta(\alpha v, w) + \eta(v, \alpha w) = \kappa\eta(v, w), \\ & \qquad\qquad \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\} = \\ = & \{\alpha \in \mathfrak{gl}(n) : \exists\, \kappa \in \mathbf{R} \text{ tal que } \alpha + \alpha^\dagger = \kappa I\}. \end{array}$$

Y es inmediato verificar que $\mathfrak{c}(n) = \mathfrak{h}(n) \oplus \mathfrak{o}(n)$ (suma directa de álgebras de Lie; por tanto, $\mathfrak{h}(n)$ y $\mathfrak{o}(n)$ son ideales de $\mathfrak{c}(n)$), en el sentido de que: $\forall\, \alpha \in \mathfrak{c}(n)$, $\exists!\, \kappa I \in \mathfrak{h}(n)$ y $\exists!\, \beta \in \mathfrak{o}(n)$ tales que $\alpha = \kappa I + \beta$.

En cuanto a las prolongaciones de $\mathfrak{c}(n)$ se tiene:

Lema 56

a. *El espacio vectorial* $\mathfrak{c}(n)_1$ *es isomorfo a* $\mathbf{R}^{n*}$*, siendo un isomorfismo el dado por*

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{i}: & \mathbf{R}^{n*} & \longrightarrow & \mathfrak{c}(n)_1 \\ & \mu & \longmapsto & (\mathbf{i}(\mu) \equiv \tilde{\mu} : v \mapsto \mu(v)I + \{\mathbf{d}^{-1}(\mu), v\}); \end{array}$$

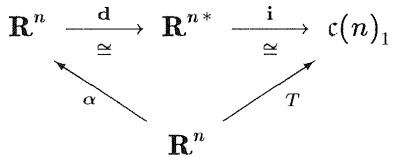
o lo que es lo mismo, $\tilde{\mu}(v,w) := \mu(v)w + \mu(w)v - \eta(v,w)\mathbf{d}^{-1}(\mu)$.

b. *Para* $n \geq 3$, $\mathfrak{c}(n)_r = 0$ *si* $r \geq 2$. *(Para* $n = 2$ *ver la demostración.)*

Demostración: La demostración dada aquí es original; otras demostraciones pueden verse p.ej. en [Ogi] o [Ko2].

Para **a**, sabemos que $\mathfrak{c}(n)_1 = L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)) \cap S^2(n)$. Sea $t \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n))$; equivalentemente, $t(v) = \mu(v)I + s(v)$, $\forall\, v \in \mathbf{R}^n$, para algún $\mu \in \mathbf{R}^{n*}$ y para algún $s \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(n))$. El que $t \in \mathfrak{c}(n)_1$ equivale, pues, a decir que, $\forall\, v, w \in \mathbf{R}^n$, $\mu(v)w + s(v)w = \mu(w)v + s(w)v$, o, lo que es lo mismo (L.53.g y L.53.d), $s(v)w - s(w)v = -\{v,w\}\mathbf{d}^{-1}(\mu) = \{\mathbf{d}^{-1}(\mu), v\}w - \{\mathbf{d}^{-1}(\mu), w\}v$. Por lo tanto, $s(v) := \{\mathbf{d}^{-1}(\mu), v\}$ verifica la condición. Además es único pues si $s' \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(n))$ verifica la misma condición entonces $s - s' \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(n)) \cap S^2(n)$ y, por L.54, $s = s'$. Se prueba inmediatamente que $\mathbf{i}$ es un isomorfismo.

Para **b**, probaremos que $\mathfrak{c}(n)_2 = 0$, si $n \geq 3$. Sabemos que $\mathfrak{c}(n)_2 = L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1) \cap S^3(n)$. Usaremos el isomorfismo lineal (ver **a** y D.38) $\mathbf{i} \circ \mathbf{d} : \mathbf{R}^n \to \mathfrak{c}(n)_1$ para establecer un isomorfismo lineal entre $L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1)$ y $\mathfrak{gl}(n)$, que a $T \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1)$ le hace corresponder $\alpha = (\mathbf{i} \circ \mathbf{d})^{-1} \circ T \in \mathfrak{gl}(n)$.



Si, además, $T \in S^3(n)$, debe ser $T(v)(w) = T(w)(v)$. Para imponer esta restricción, calculemos

$$\begin{array}{rl} T(v)(w) - T(w)(v) & = ((\mathbf{i} \circ \mathbf{d})(\alpha v))(w) - ((\mathbf{i} \circ \mathbf{d})(\alpha w))(v) = \\ & = \eta(\alpha v, w)I + \{\alpha v, w\} - \eta(\alpha w, v)I - \{\alpha w, v\} = \\ \text{(L.53.e)} & = \eta((\alpha - \alpha^\dagger)v, w)I + \alpha\{v,w\} + \{v,w\}\alpha^\dagger, \end{array}$$

donde $\eta((\alpha-\alpha^\dagger)v,w)I \in \mathfrak{h}(n)$ y (es fácil verlo) $\alpha\{v,w\}+\{v,w\}\alpha^\dagger \in \mathfrak{o}(n)$. Entonces (por generar los $\{v,w\}$ todo $\mathfrak{o}(n)$, ver L.53.c) $T = \mathbf{i}\circ\mathbf{d}\circ\alpha \in S^3(n)$ si y solo si

$$\begin{cases}(1)\ \ \alpha-\alpha^\dagger=0,\\ (2)\ \ \alpha\beta+\beta\alpha^\dagger=0,\ \ \forall\beta\in\mathfrak{o}(n),\end{cases}$$

esto es, α es autoadjunta y la aplicación $\mathfrak{o}(n)\to\mathfrak{o}(n)$, $\beta\mapsto\alpha\beta+\beta\alpha^\dagger$, es nula. Es inmediato ver que, si $n\geq 3$, necesariamente $\alpha=0$, mientras que, si $n=2$, se obtiene $tr(\alpha)=0$. En efecto: nótese que, por L.53.c y por N.74.b

$$\begin{aligned}&\alpha\beta+\beta\alpha^\dagger=0,\ \ \forall\beta\in\mathfrak{o}(n)\ \iff\\ &\quad\iff\ \alpha\{e_i,e_j\}+\{e_i,e_j\}\alpha^\dagger=0,\ \forall 1\leq i<j\leq n,\ \iff\\ \iff\ &\alpha^k_j\eta_{il}-\alpha^k_i\eta_{jl}+\delta^k_j\alpha^q_i\eta_{ql}-\delta^k_i\alpha^q_j\eta_{ql}=0,\ \forall 1\leq i,j,k,l\leq n,\ i<j;\end{aligned}$$

y sólo los siguientes casos producen ecuaciones no triviales:

$$\begin{cases}\text{si } l=i<j=k,\ \text{ queda}\\ \quad \alpha^j_j+\alpha^i_i=0,\\ \text{si } l=i<j\neq k,\ i\neq k,\ \text{ queda}\\ \quad \alpha^k_j=0,\\ \text{si } k\neq i<j=l,\ j\neq k,\ \text{ queda}\\ \quad \alpha^k_i=0\\ \text{(ó lo mismo intercambiando } k \text{ por } l);\end{cases}$$

si al menos tres índices pueden ser distintos (esto es, $n\geq 3$), entonces la condición (2) implica $\alpha=0$ y, por tanto, $\mathfrak{c}(n)_2=0$; pero si $n=2$ la condición (2) equivale a $tr(\alpha)=0$, lo que junto con (1) implica que $dim(\mathfrak{c}(n)_2)=2$.

Nota 75 La expresión en coordenadas de $\tilde{\mu}\in\mathfrak{c}(n)_1$ es:

$$\tilde{\mu}^i_{jk}=\mu_j\delta^i_k+\mu_k\delta^i_j-\eta_{jk}\eta^{ip}\mu_p.$$

1.3 Cohomología de Spencer de $\mathfrak{o}(n)$ y $\mathfrak{c}(n)$.

Debido a que $\mathfrak{o}(n)_r=0$, $\forall r\geq 1$, las secuencias de Spencer (ver VI.1.2) del álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ que son significativas se reducen a

$$\begin{array}{lccccccc}
 & & q{=}1 & & q{=}2 & & q{=}3 & & q{=}4\\
p{+}q{=}2 & 0\to & L(\mathbf{R}^n,\mathfrak{o}(n)) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & A^2(n) & \longrightarrow & 0 & & \\
p{+}q{=}3 & & 0 & \longrightarrow & A^2(n,\mathfrak{o}(n)) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & A^3(n) & \longrightarrow & 0\\
p{+}q{=}4 & & & & 0 & \longrightarrow & A^3(n,\mathfrak{o}(n)) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & A^4(n)\\
 & & & & & & & & \to 0.
\end{array}$$

Se puede probar que los grupos de cohomología correspondientes, que nos interesan, son ([Gui])

$$\begin{cases} H^{0,2}(\mathfrak{o}(n)) = 0, \\ H^{1,2}(\mathfrak{o}(n)) \neq 0, \\ H^{p,2}(\mathfrak{o}(n)) = 0, \quad p > 1. \end{cases}$$

La dimensión de $H^{0,2}(\mathfrak{o}(n))$ es 0, pues la aplicación $\mathbb{A} : L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(n)) \to A^2(n)$ es sobreyectiva, puesto que $dim(L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}(n))) = dim(A^2(n)) = \frac{1}{2}n^2(n-1)$ y $dim(Ker(\mathbb{A})) = dim(\mathfrak{o}(n)_1) = 0$.

Calculemos la dimensión de $H^{1,2}(\mathfrak{o}(n))$. Se tiene que $dim(B^{1,2}(\mathfrak{o}(n))) = 0$. Por otro lado, se puede probar que la aplicación $\mathbb{A} : A^2(n, \mathfrak{o}(n)) \to A^3(n)$ es sobreyectiva. Entonces, puesto que $dim(A^2(n, \mathfrak{o}(n))) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ y $dim(A^3(n)) = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$, se concluye que $dim(H^{1,2}(\mathfrak{o}(n))) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

Sea $n \geq 3$. Debido a que (L.56) $\mathfrak{c}(n)_r = 0$, $\forall r \geq 2$, las secuencias de Spencer del álgebra de Lie $\mathfrak{c}(n)$ que nos interesan se reducen a

$$\begin{array}{lccccccc} & q{=}0 & & q{=}1 & & q{=}2 & & q{=}3 \\ p{+}q{=}2 & 0 \to \mathfrak{c}(n)_1 & \hookrightarrow & L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & A^2(n) & \longrightarrow 0 & \\ p{+}q{=}3 & 0 & \hookrightarrow & L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1) & \xrightarrow{\mathbb{A}_{12}} & A^2(n, \mathfrak{c}(n)) & \xrightarrow{\mathbb{A}} A^3(n) & \to 0 \\ p{+}q{=}4 & & & 0 & \longrightarrow & A^2(n, \mathfrak{c}(n)_1) & \xrightarrow{\mathbb{A}_{123}} A^3(n, \mathfrak{c}(n)) & \xrightarrow{\mathbb{A}} \\ & & & & & & \xrightarrow{\mathbb{A}} A^4(n) & \to 0. \end{array}$$

Se puede probar que los grupos de cohomología correspondientes, que nos interesan, son ([Gui])

$$\begin{cases} H^{0,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0, \\ H^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) \neq 0, & \text{si y sólo si } n \geq 4 \\ H^{2,2}(\mathfrak{c}(n)) \neq 0, & \text{si y sólo si } n = 3 \\ H^{p,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0, & p > 2. \end{cases}$$

La dimensión de $H^{0,2}(\mathfrak{c}(n))$ es 0, pues la aplicación $\mathbb{A} : L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)) \to A^2(n)$ es sobreyectiva, ya que $dim(L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n))) = (\frac{1}{2}n^2(n-1)) + n = dim(A^2(n)) + n$ y $dim(Ker(\mathbb{A})) = dim(\mathfrak{c}(n)_1) = n$.

Calculemos la dimensión de $H^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$. Se tiene

$$\begin{cases} dim(L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1)) = n^2 \\ dim(Ker(\mathbb{A}_{12}) \equiv \mathfrak{c}(n)_2) = 0 \text{ (L.54.b)} \end{cases} ; \Rightarrow dim(Im(\mathbb{A}_{12})) = n^2.$$

Por otro lado, se tiene que la aplicación $\mathbb{A} : A^2(n, \mathfrak{c}(n)) \to A^3(n)$ es sobreyectiva, pues lo es la aplicación $\mathbb{A} : A^2(n, \mathfrak{o}(n)) \to A^3(n)$. Entonces, puesto que

$$\begin{cases} dim(A^2(n, \mathfrak{c}(n))) = \frac{n(n-1)}{2}(\frac{n(n-1)}{2} + 1) \\ dim(A^3(n)) = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} \end{cases}, \text{ se concluye que}$$

$$\begin{aligned} dim(Ker(\mathbb{A})) &= \tfrac{n(n-1)}{2}(\tfrac{n(n-1)}{2} + 1) - \tfrac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \\ &= \tfrac{1}{12}(n^4 + 5n^2 - 6n). \end{aligned}$$

Se sigue que $dim(H^{1,2}(\mathfrak{c}(n))) = \frac{1}{12}(n^4 - 7n^2 - 6n)$, que se anula si y sólo si $n = 3$.

1.4 El levantamiento al orden dos del grupo lineal conforme.

Sea $n \geq 3$. Los levantamientos $H^2(n)$ y $O^2(n)$ al orden dos de $H(n)$ y $O(n)$ son, por L.37, L.54 y L.55, isomorfos a los propios $H(n)$ y $O(n)$, respectivamente.

El levantamientos $C^2(n)$ al orden dos de $C(n)$ es, por el L.37, isomorfo canónicamente a $C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$. Llamaremos a $C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$ el *grupo conforme de segundo orden.*

Los homomorfismos Q^2 y q^2 de la sección II.2.2, si se restringen al grupo lineal conforme $C(n)$, definen (ver VI.1.4) unos homomorfismos, que denotaremos igual, $Q^2 \in Hom(C(n), Aut(\mathfrak{c}(n)_1))$ y $q^2 \in Hom(C(n), End(\mathfrak{c}(n)_1))$. Veamos en qué se traducen algunas de las propiedades de Q^2 y q^2, vistas en la sección II.3.1, cuando restringimos al caso conforme.

Lema 57 *Sean* $v, w \in \mathbf{R}^n$, $a, b \in C(n)$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}(n)$ *y* $\mu, \nu \in \mathbf{R}^{n*}$. *Recordemos el isomorfismo* (L.56) $\mathbf{R}^{n*} \to \mathfrak{c}(n)_1$, $\mu \mapsto \tilde{\mu}$; *se verifica:*

a. $\tilde{\mu}_a = \widetilde{\mu a^{-1}}$.

b. $\tilde{\mu}^\alpha = -\widetilde{\mu\alpha}$.

c. $\widetilde{\mu a^{-1}}(av) = a\tilde{\mu}(v)a^{-1}$.

d. $\widetilde{\mu\alpha}(v) = \tilde{\mu}(\alpha v) + [\tilde{\mu}(v), \alpha]$.

e. $[\tilde{\mu}(v), \tilde{\mu}(w)] = \frac{1}{2}(\widetilde{\mu\tilde{\mu}(w)}(v) - \widetilde{\mu\tilde{\mu}(v)}(w))$.

f. $\mu\tilde{\nu}(v) = \nu\tilde{\mu}(v)$.

g. $\mu[\tilde{\mu}(v), \tilde{\mu}(w)] = 0$.

Demostración: Recordemos el apartado II.3.1. Para **a**, sea $a^\dagger a = kI$, $k > 0$ (ver apartado 1.1); se tiene que

$$\begin{aligned} a\tilde{\mu}(a^{-1}v,\, a^{-1}w) = & \\ &= a(\mu(a^{-1}v)a^{-1}w) + a(\mu(a^{-1}w)a^{-1}v) - \\ &\qquad -a(\eta(a^{-1}v, a^{-1}w)\mathbf{d}^{-1}(\mu)) = \\ &= \mu(a^{-1}v)w + \mu(a^{-1}w)v - \tfrac{1}{k}\,\eta(v,w)a(\mu) = \\ \text{(N.74.b)} \quad &= (\mu a^{-1})(v)w + (\mu a^{-1})(w)v - \tfrac{1}{k}\,\eta(v,w)\mathbf{d}^{-1}(\mu a^\dagger) = \\ &= (\widetilde{\mu a^{-1}})(v)w + (\mu a^{-1})(w)v - \eta(v,w)\mathbf{d}^{-1}(\mu a^{-1}) = \\ &= \widetilde{\mu a^{-1}}(v,w). \end{aligned}$$

Para **b**, sea $\alpha + \alpha^\dagger = \kappa I$, $\kappa \in \mathbf{R}$ (ver apartado 1.2); se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{\mu}(v,w) - \tilde{\mu}(\alpha v, w) - \tilde{\mu}(v, \alpha w) = & \\ &= \mu(v)\alpha w + \mu(w)\alpha v - \eta(v,w)\alpha\mathbf{d}^{-1}(\mu) - \\ &\quad -\mu(\alpha v)w - \mu(w)\alpha v + \eta(\alpha v, w)\mathbf{d}^{-1}(\mu) - \\ &\qquad -\mu(v)\alpha w - \mu(\alpha w)v + \eta(v, \alpha w)\mathbf{d}^{-1}(\mu) = \\ \text{(N.74.b)} \quad &= -(\mu\alpha)(v)w - (\mu\alpha)(w)v - \eta(v,w)\mathbf{d}^{-1}(\mu\alpha^\dagger) + \\ &\qquad +\kappa\eta(v,w)\mathbf{d}^{-1}(\mu) = \\ &= -(\mu\alpha)(v)w - (\mu\alpha)(w)v + \eta(v,w)\mathbf{d}^{-1}(\mu\alpha) = \\ &= -\widetilde{\mu\alpha}(v,w). \end{aligned}$$

Las partes **c** y **d** son aplicación inmediata de L.2.a.v y **a**, y L.2.b.vi y **b**, respectivamente. La parte **e** se sigue de L.2.b.vii y **b**. Las partes **f** y **g** son aplicación inmediata de N.54.a.i y **b**, y N.54.a.ii y **b**, respectivamente.

Recordemos los apartados VI.1.4 y VI.1.5. La representación adjunta de $C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$ es la restricción de la de $GL(n) \otimes S^2(n)$ (L.38.a); lo propio ocurre con la representación adjunta de $\mathfrak{c}^2(n) \cong \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1$ (L.38.b). La representación $\mathcal{A}^2$ del grupo $GL(n) \otimes S^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$ restringe bien a una representación, que denotamos por la misma letra, de $C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n)$ (L.38.c); y lo propio ocurre con la representación $\mathfrak{a}^2$ del álgebra $\mathfrak{gl}(n) \oplus S^2(n)$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{gl}(n)$, que restringe bien a una representación de $\mathfrak{c}^2(n) \cong \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1$ en $\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n)$ (L.38.d). Por último, por ser $\mathfrak{c}(n)_2 = 0$, se obtiene (L.40) una representación $\overline{\mathcal{A}}^3$ de $C^2(n)$ (y la correspondiente representación $\overline{\mathfrak{a}}^3$ de $\mathfrak{c}^2(n)$) en el álgebra de Lie $\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1$, con el corchete dado en VI.1.1 (N.49.b), y respecto del cual $\overline{\mathcal{A}}^3$ opera por automorfismos y $\overline{\mathfrak{a}}^3$ por derivaciones. En el siguiente lema resumimos estas representaciones usando la identificación (L.56) $\mathbf{i} : \mathbf{R}^{n*} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{c}(n)_1$, $\mu \mapsto \tilde{\mu}$, y los resultados del lema L.57.a y b.

Lema 58 *Se verifica:*

a. *La representación adjunta de* $C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$ *es*

$$\begin{array}{rccl} Ad: & C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1 & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1) \\ & (a, \tilde{\xi}) & \longmapsto & ((\beta, \tilde{\mu}) \mapsto (a\beta a^{-1}, (\mu a^{-1} + \xi\beta a^{-1})^\sim)). \end{array}$$

b. *La representación adjunta de* $\mathfrak{c}^2(n) \cong \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1$ *es*

$$\begin{array}{rccl} ad: & \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1 & \longrightarrow & Der(\mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1) \\ & (\alpha, \tilde{\xi}) & \longmapsto & ((\beta, \tilde{\mu}) \mapsto ([\alpha, \beta], (\xi\beta - \mu\alpha)^\sim) = \\ & & & = [(\alpha, \tilde{\xi}), (\beta, \tilde{\mu})]). \end{array}$$

c. *La representación* $\mathcal{A}^2$*, en el caso conforme, es la dada por*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}^2: & C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1 & \longrightarrow & GL(\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n)) \\ & (a, \tilde{\xi}) & \longmapsto & ((v, \beta) \mapsto (av, a(\tilde{\xi}(v) + \beta)a^{-1})). \end{array}$$

d. *La representación* $\mathfrak{a}^2$*, en el caso conforme, es la dada por*

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{a}^2: & \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1 & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n)) \\ & (\alpha, \tilde{\xi}) & \longmapsto & ((v, \beta) \mapsto (\alpha v, \tilde{\xi}(v) + [\alpha, \beta])). \end{array}$$

e. *La representación* $\overline{\mathcal{A}}^3$*, en el caso conforme, es la dada por*

$$\begin{array}{rccl} \overline{\mathcal{A}}^3: & C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1 & \longrightarrow & Aut(\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1) \\ & (a, \tilde{\xi}) & \longmapsto & ((v, \beta, \tilde{\mu}) \mapsto (av, a(\tilde{\xi}(v) + \beta)a^{-1}, \\ & & & ((\tfrac{1}{2}\xi\tilde{\xi}(v) + \xi\beta + \mu)a^{-1})^\sim)). \end{array}$$

f. *La representación inducida por* $\mathfrak{a}^3$ *es*

$$\begin{array}{rccl} \overline{\mathfrak{a}}^3: & \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1 & \longrightarrow & Der(\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1) \\ & (\alpha, \tilde{\xi}) & \longmapsto & ((v, \beta, \tilde{\mu}) \mapsto (\alpha v, \tilde{\xi}(v) + [\alpha, \beta], (\xi\beta - \mu\alpha)^\sim). \end{array}$$

Nota 76

a. Se tiene (recordar N.7.a):

$$\mathcal{A}^2_{(a,\tilde{\xi})}\big|_{\mathfrak{c}(n)} = Ad_a^{C(n)} = Ad_{(a,\tilde{\xi})}\big|_{\mathfrak{c}(n)}.$$

b. Se tiene (recordar N.9 y N.61.b):

$$\overline{\mathcal{A}}^3_{(a,\tilde{\xi})}\big|_{\mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1} = \begin{pmatrix} Ad_a^{C(n)} & 0 \\ (\xi(\cdot)a^{-1})^\sim & (\cdot)_a \end{pmatrix} = Ad_{(a,\tilde{\xi})}.$$

1.5 El grupo conforme completo.

Sea $\overline{\eta} : \mathbf{R}^{n+2} \times \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$ el producto escalar de índice $s+1$ dado, en la base estándar $\{e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ de $\mathbf{R}^{n+2}$, por (escribamos $\overline{\eta}_{ij} := \overline{\eta}(e_i, e_j)$)

$$\begin{cases} \overline{\eta}_{0\,n+1} = -1 & \\ \overline{\eta}_{ij} = \eta_{ij} & (1 \leq i,j \leq n) \\ \overline{\eta}_{00} = \overline{\eta}_{0i} = \overline{\eta}_{n+1\,i} = \overline{\eta}_{n+1\,n+1} = 0 & (1 \leq i \leq n), \end{cases}$$

con $\eta : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ el producto escalar de índice s dado en el apartado 1.1.

En la base estándar de $\mathbf{R}^{n+2}$ la matriz $\overline{S}$ de $\overline{\eta}$ es la dada por

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & S & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo S la matriz de η en la base estándar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbf{R}^n$.

Sea $O(n+2)$ el grupo ortogonal relativo a $\overline{\eta}$

$$O(n+2) := \{A \in GL(n+2) : \overline{\eta}(AV, AW) = \overline{\eta}(V,W),\ \forall\, V, W \in \mathbf{R}^{n+2}\}.$$

Sea $\mathbf{P}^{n+1}$ el espacio proyectivo $(n+1)$-dimensional. Denotemos por $[V]$ el elemento de $\mathbf{P}^{n+1}$ con representante $V \in \mathbf{R}^{n+2}$. Cada $A \in GL(n+2)$ define una aplicación $\tilde{A} : \mathbf{P}^{n+1} \to \mathbf{P}^{n+1}$, $\tilde{A}([V]) = [AV]$; definamos $P(n+1) = \{\tilde{A} : A \in GL(n+2)\}$.

Definición 40 *El* grupo conforme completo $\overline{C(n)}$ relativo a η *es el subgrupo de Lie de* $P(n+1)$ *dado por*

$$\overline{C(n)} := \{\tilde{A} \in P(n+1) : A \in O(n+2)\}.$$

Nota 77

a. Se tiene: $\overline{C(n)} \cong O(n+2)/\mathbf{Z}_2$ y $dim\, \overline{C(n)} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

b. Apuntemos en qué sentido se puede llamar a $\overline{C(n)}$ grupo "conforme completo".

Sea la cuádrica proyectiva $M_n := \{[V] \in \mathbf{P}^{n+1} : \overline{\eta}(V,V) = 0\}$. M_n es una variedad n-dimensional difeomorfa a $S^n_s := \{p \in \mathbf{R}^{n+1}_s : \langle p, p\rangle = 1\}$ (con $\langle , \rangle$ el producto escalar en $\mathbf{R}^{n+1}_s$). Ello induce en M_n una estructura semiriemanniana $\mathbf{g}$ de índice s tal que $M_n \simeq S^n_s$ son isométricos. M_n es lo que se llama el *"espacio de Möbius" inducido por* $\overline{\eta}$. El grupo $\overline{C(n)}$ preserva M_n y actúa transitiva y conformemente sobre $(M_n, \mathbf{g})$; por

dimensión, $\overline{C(n)}$ constituye el grupo (maximal) de automorfismos de la estructura conforme $(M_n, [\mathbf{g}])$. Cada punto de $(M_n, \mathbf{g})$ posee un abierto denso conformemente difeomorfo a $\mathbf{R}^n_s$ con el producto escalar η y $\overline{C(n)}$ proporciona una realización global en $(M_n, \mathbf{g})$ de los difeomorfismos conformes entre abiertos de $\mathbf{R}^n_s$ (ver p.ej. [Ko2, Cap.IV.4]).

Se tiene el siguiente resultado:

Lema 59 *Sea* $\overline{C_o(n)}$ *el siguiente subgrupo de* $\overline{C(n)}$*:*

$$\overline{C_o(n)} := \{\tilde{A} \in \overline{C(n)} : \tilde{A}[e_{n+1}] = [e_{n+1}]\}.$$

a. $\overline{C_o(n)}$ *es isomorfo a* $C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$.

b. *Sea* $n \geq 3$. *Bajo el isomorfismo anterior, se tiene*

$$Ad^{\overline{C(n)}}|_{C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1} = \overline{\mathcal{A}}^3$$

(con $\overline{\mathcal{A}}^3$ *dada en L.58.e).*

Demostración: (a) Es inmediato ver que $\overline{C_o(n)}$ es isomorfo al subgrupo de $O(n+2)$ constituido (véase [Ko2, Cap.IV.4]) por las matrices de la forma

$$A_{(k,b,\mu)} \equiv \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ b\mathbf{d}^{-1}(\mu) & b & 0 \\ (2k)^{-1}\eta(\mathbf{d}^{-1}(\mu), \mathbf{d}^{-1}(\mu)) & k^{-1}\mu & k^{-1} \end{pmatrix},$$

con $k > 0$, $b \in O(n)$, $\mu \in \mathbf{R}^{n*}$. Un sencillo cálculo muestra que se tiene el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \overline{C_o(n)} & \xrightarrow{\simeq} & C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1 \cong \text{(L.37)}\ C^2(n) \\ A_{(k,b,\mu)} & \longmapsto & (kI \cdot b, -\tilde{\mu}), \end{array}$$

con $\tilde{\mu} \equiv \mathbf{i}(\mu)$ (siendo $\mathbf{i} : \mathbf{R}^{n*} \to \mathfrak{c}(n)_1$ el isomorfismo definido en L.56.a).

(b) El isomorfismo anterior induce un isomorfismo de las álgebras de Lie; explícitamente

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathfrak{c}_o(n)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{c}(n) \oplus \mathfrak{c}(n)_1 \cong \text{(L.37)}\ \mathfrak{c}^2(n) \\ \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ \mathbf{d}^{-1}(\mu) & \beta & 0 \\ 0 & \mu & -\kappa \end{pmatrix} & \longmapsto & (kI + \beta, -\tilde{\mu}), \end{array}$$

con $\kappa \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathfrak{o}(n)$, $\mu \in \mathbf{R}^{n*}$. Además, un cálculo directo pone de manifiesto el siguiente isomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{array}{lll} \overline{\mathfrak{c}(n)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1 \\ \begin{pmatrix} \kappa & \mathbf{d}(w) & 0 \\ \mathbf{d}^{-1}(\mu) & \beta & w \\ 0 & \mu & -\kappa \end{pmatrix} & \longmapsto & (w, \kappa I + \beta, -\tilde{\mu}), \end{array}$$

con $w \in \mathbf{R}^n$, $\kappa \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathfrak{o}(n)$, $\mu \in \mathbf{R}^{n*}$, y dotando a $\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1$ del corchete dado en N.49.b. que, en este caso, queda (llamando $\alpha \equiv \kappa I + \beta \in \mathfrak{c}(n)$ y teniendo en cuenta L.57.b):

$$\begin{aligned} &[w, w'] = 0, \\ &[\alpha, w'] = \alpha w', \qquad [\alpha, \alpha'] = \alpha\alpha' - \alpha'\alpha, \\ &[\tilde{\mu}, w'] = \tilde{\mu}(w'), \qquad [\tilde{\mu}, \alpha'] = -\tilde{\mu}^{\alpha'} = \widetilde{\mu\alpha'}, \qquad [\tilde{\mu}, \tilde{\mu}'] = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, de nuevo un cálculo directo permite comprobar que se verifica

$$Ad^{\overline{C(n)}}_{A_{(k,b,\mu)}} = \overline{\mathcal{A}}^3_{(kI \cdot b, -\tilde{\mu})}, \quad \forall A_{(k,b,\mu)} \in \overline{C_o(n)}$$

o, en otras palabras (llamando $a \equiv kI \cdot b \in C(n)$, $t \equiv -\tilde{\mu} \in \mathfrak{c}(n)_1$),

$$Ad^{\overline{C(n)}}_{(a,t)} = \overline{\mathcal{A}}^3_{(a,t)}, \quad \forall (a,t) \in C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1$$

(recordar N.54.c en Cap.VI).

Nota 78

a. Por definición, $\overline{C_o(n)}$ es el subgrupo de isotropía de $o \equiv [e_{n+1}] \in M_n$ (N.77.b) bajo la acción de $\overline{C(n)}$; así M_n se puede describir como el espacio homogéneo $\overline{C(n)}/\overline{C_o(n)}$. Por tratarse de transformaciones conformes de $(M_n, \mathbf{g})$ que dejan un punto fijo, se pueden considerar como transformaciones conformes (locales; ver nota anterior) de $\mathbf{R}^n_s$ que preservan el $0 \in \mathbf{R}^n$. Cada transformación conforme en $\mathbf{R}^n_s$ viene localmente caracterizada (por ser $\mathfrak{c}(n)_2 = 0$) por su 2-jet, y se tiene el isomorfismo de grupos de Lie

$$\overline{C_o(n)} \simeq C^2(n) \cong C(n) \otimes \mathfrak{c}(n)_1,$$

que es lo que hemos obtenido explícitamente en la parte **a** del lema.

Nótese que la identificación de $C^2(n)$ como un subgrupo de $\overline{C(n)}$ no es canónica en el sentido de que depende del punto de M_n sobre el que se haga la isotropía.

b. En relación con el isomorfismo $\overline{\mathfrak{c}(n)} \stackrel{\simeq}{\to} \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1$: Por lo dicho en N.77.b, el álgebra de Lie $\overline{\mathfrak{c}(n)}$ constituye el álgebra de automorfismos infinitesimales de la estructura conforme $(M_n, [\mathbf{g}])$, y deberá ser isomorfa al álgebra de automorfismos infinitesimales de la estructura conforme de $\mathbf{R}^n_s$, que a su vez es isomorfa al álgebra $\mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1$.

2 Estructuras conformes de segundo orden.

Esta sección está dedicada a la fijación de conceptos y notaciones respecto de la primera prolongación (siempre única) $(L_{\mathfrak{C}}M)_1$ de cualquier $C(n)$-estructura $L_{\mathfrak{C}}M$ (también llamada "estructura conforme $\mathfrak{C}$ sobre M"). Al ser única, esta primera prolongación resulta (L.48 en Cap.VI) isomorfa (como fibrado principal sobre M) al levantamiento al orden 2, $F^2_{\mathfrak{C}}M$. Resulta interesante que la caracterización (L.11 en Cap.III y L.47 en Cap.VI) de $(L_{\mathfrak{C}}M)_1$ en términos de 2-jets de inversas de cartas normales (en M) correspondientes a conexiones simétricas en $L_{\mathfrak{C}}M$ puede igualmente hacerse tomando *solamente* conexiones de Levi-Civita de métricas compatibles con $\mathfrak{C}$ (L.60).

2.1 $O(n)$-estructuras y $C(n)$-estructuras.

Sea M una variedad[2] de dimensión n. Sea $\mathbf{g}$ una métrica sobre M. Denotaremos por $L_{\mathbf{g}}M$ la $O(n)$-estructura inducida por $\mathbf{g}$ que se define como

$$L_{\mathbf{g}}M := \{l \in LM : \eta(v,w) = \mathbf{g}(l(v), l(w)),\ \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\};$$

es decir, los $l \in L_{\mathbf{g}}M$ que son isometrías lineales entre $(\mathbf{R}^n, \eta)$ y $(T_{\pi^L(l)}M, \mathbf{g}_{\pi^L(l)})$ (equivalentemente, se puede definir $L_{\mathbf{g}}M$ como el conjunto de bases en TM que son $\mathbf{g}$-ortonormales).

Sea $\mathfrak{C}$ una estructura conforme sobre M; esto es, $\mathfrak{C}$ es una clase de equivalencia de métricas sobre M bajo la relación de equivalencia:

$$\mathbf{g} \simeq \mathbf{g}' \text{ sii } \exists\, \mathbf{k} \in \mathcal{F}(M) \text{ con } \mathbf{k} > 0 \text{ tal que } \mathbf{g}' = \mathbf{k}\mathbf{g}.$$

Si $\mathbf{g}$ es un representante de la clase $\mathfrak{C}$ denotaremos $\mathfrak{C} \equiv [\mathbf{g}]$ y escribiremos $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$.

[2]La existencia de $O(n)$- y $C(n)$-estructuras sobre una variedad M (de dimensión n) puede, dependiendo del índice s, restringir la topología de M,

Sea $L_{\mathfrak{C}}M$ la $C(n)$-estructura inducida por $\mathfrak{C} \equiv [\mathbf{g}]$, que se define como

$$L_{\mathfrak{C}}M := \{l \in LM : \exists\, k > 0 \text{ tal que } \eta(v,w) = k\mathbf{g}(l(v), l(w)),\ \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\};$$

es decir, los $l \in L_{\mathbf{g}}M$ son isometrías lineales entre $(\mathbf{R}^n, \eta)$ y $(T_{\pi^L(l)}M, k\mathbf{g}_{\pi^L(l)})$, para algún $k > 0$ (equivalentemente, se puede definir $L_{\mathfrak{C}}M$ como el conjunto de bases en TM que son $\mathbf{g}$-ortonormales, para alguna $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$).

$L_{\mathbf{g}}M$ es un subfibrado principal de $L_{\mathfrak{C}}M$ si y solo si $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$. Es inmediato que, si $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$, entonces $L_{\mathfrak{C}}M \cong L_{\mathbf{g}}M \times_{O(n)} C(n)$.

2.2 Primera prolongación de una $C(n)$-estructura.

Por lo dicho en 1.3, $H^{0,2}(\mathfrak{g}) = 0$, para $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n)$ ó $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}(n)$. Se sigue que, dada la aplicación $\mathbb{A} : L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{g}) \to A^2(n)$, el subespacio E complementario de $Im\,\mathbb{A}$ en $A^2(n)$ es único, $E = 0$, en ambos casos. Consecuentemente (D.30) cualquier $O(n)$-estructura $L_{\mathbf{g}}M$, respectivamente $C(n)$-estructura $L_{\mathfrak{C}}M$, admite una *única* primera prolongación, que designaremos por $(L_{\mathbf{g}}M)_1$, respectivamente $(L_{\mathfrak{C}}M)_1$. En ambos casos (T.6, VI.3.3) la primera función de estructura (D.31) es nula.

Por el teorema T.6, tanto las $O(n)$-estructuras como las $C(n)$-estructuras admiten conexiones simétricas (como es bien sabido) y consecuentemente (L.48) son 1-integrables, esto es, existen los levantamientos $F^2_{\mathbf{g}}M$ de $L_{\mathbf{g}}M$ y $F^2_{\mathfrak{C}}M$ de $L_{\mathfrak{C}}M$, dándose las identificaciones $(L_{\mathbf{g}}M)_1 \cong F^2_{\mathbf{g}}M$ y $(L_{\mathfrak{C}}M)_1 \cong F^2_{\mathfrak{C}}M$.

Al ser $\mathfrak{o}(n)_1 = 0$, el fibrado $F^2_{\mathbf{g}}M \to L_{\mathbf{g}}M$ es trivial (L.42) y, por tanto (L.17; ver también VI.3.4) la conexión simétrica en cualquier $O(n)$-estructura es única (otra forma de ver la unicidad de la conexión de Levi-Civita; ver también T.5 y N.62.f). Por L.47, el conjunto $F^2_{\mathbf{g}}M$ es el formado por todos los 2-jets $j^2(x_\lambda^{-1})$, siendo x_λ cada una de las posibles cartas normales para la conexión de Levi-Civita λ de $\mathbf{g}$, centradas en puntos arbitrarios de M y correspondientes a referencias lineales arbitrarias en $L_{\mathbf{g}}M$.

El fibrado $\Pi : F^2_{\mathfrak{C}}M \to L_{\mathfrak{C}}M$ es una $\mathfrak{c}(n)_1$-estructura (L.42). Pero $\mathfrak{c}(n)_1 \neq 0$, y existen muchas conexiones simétricas en $L_{\mathfrak{C}}M$, que no tienen además por qué ser, ni siquiera localmente, de Levi-Civita para ninguna $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$ (ver p.ej. [Lft]). Sin embargo, el conjunto $F^2_{\mathfrak{C}}M$ resulta igualmente definido por las conexiones de Levi-Civita en el sentido siguiente:

Lema 60 *Sea $L_{\mathfrak{C}}M$ una $C(n)$-estructura. El conjunto $F^2_{\mathfrak{C}}M$ es el formado por todos los 2-jets $j^2(x_\lambda^{-1})$, con λ la conexión de Levi-Civita de cualquier $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$, y siendo x_λ cada una de las posibles cartas normales para λ centradas en puntos arbitrarios de M y correspondientes a referencias lineales arbitrarias en $L_{\mathbf{g}}M$.*

Demostración: Elijamos $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$. Se tiene una inclusión natural $L_{\mathbf{g}}M \hookrightarrow L_{\mathfrak{C}}M$, y la conexión de Levi-Civita λ de $L_{\mathbf{g}}M$ define, por imagen directa, una conexión simétrica en $L_{\mathfrak{C}}M$, que denotamos igualmente por λ, la cual induce (ver VI.3.4) una sección equivariante σ del fibrado principal $F^2_{\mathfrak{C}}M \to L_{\mathfrak{C}}M$. Sea $z \in F^2_{\mathfrak{C}}M$, con $\Pi(z) \equiv l$ y $\pi(z) \equiv m$; existirá (L.42) un $t \equiv \tilde{\mu} \in \mathfrak{c}(n)_1$ ($\mu \in \mathbf{R}^{n*}$) tal que $z = \sigma(l)\, t$. La función (D.32) $\Upsilon_\lambda^{L_{\mathfrak{C}}M} : F^2_{\mathfrak{C}}M \to L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n))$ verifica

$$\Upsilon_\lambda^{L_{\mathfrak{C}}M}\Big|_z = \text{(N.12.b)}\ \Upsilon_\lambda^{L_{\mathfrak{C}}M}\Big|_{\sigma(l)} + t = \text{(N.12.a)}\ t.$$

Sea (x, U) una carta normal para λ, centrada en m y correspondiente a l. Sea $\mathbf{k} := e^{-2(\mu(x))} \in \mathcal{F}(U)$. Elijamos $\mathbf{g}' \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathbf{g}' = \mathbf{k}\mathbf{g}$ en un entorno $V \subset U$ de m. Sean λ' y σ' la conexión en $L_{\mathfrak{C}}M$ y la sección equivariante inducidas por $\mathbf{g}'$. Probaremos que $\Upsilon_\lambda^{L_{\mathfrak{C}}M}\Big|_{\sigma'(l)} = t$, lo que implicará (por ser $\Upsilon_\lambda^{L_{\mathfrak{C}}M}$ inyectiva sobre cada fibra de $F^2_{\mathfrak{C}}M \to L_{\mathfrak{C}}M$, N.12.b) que $\sigma'(l) = z$ y habremos demostrado el resultado. Y en efecto: Sean Γ y Γ' los coeficientes de las conexiones λ y λ', respectivamente, en la carta x; en vista de N.63.c y por ser $x_0(l) = I$ y $\lambda' \in C^{L_{\mathfrak{C}}M}_{\sigma'(l)}$, bastará probar que $\Gamma'|_m = -t$. Pues bien, se obtiene fácilmente (ver p. ej. [K-N, Ch.IV, Cor.2.4]) que, en el abierto V:

$$\Gamma'^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2\mathbf{k}}\left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^k}\delta^i_j + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^j}\delta^i_k - \mathbf{g}_{jk}\mathbf{g}^{il}\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^l}\right),$$

siendo $\mathbf{g}_{ij} := \mathbf{g}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$ y $\mathbf{g}^{il}\mathbf{g}_{lj} = \delta^i_j$. Como x es carta normal para λ centrada en m, obtenemos $\Gamma^i_{jk}\Big|_m = 0$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\Gamma'^i_{jk}\Big|_m &= \frac{1}{2\mathbf{k}(m)}\left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^k}\Big|_m \delta^i_j + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^j}\Big|_m \delta^i_k - \eta_{jk}\eta^{il}\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x^l}\Big|_m\right) = \\ &= -(\mu_k\delta^i_j + \mu_j\delta^i_k - \eta_{jk}\eta^{ip}\mu_p) = \text{(N.75)}\ \tilde{\mu}^i_{jk}.\end{aligned}$$

Nota 79

a. Es habitual *definir* el conjunto $F^2_{\mathfrak{C}}M$ en base a las conexiones de Levi-Civita ([Hen],[Sch]). El lema anterior justifica este procedimiento.

b. Se obtiene fácilmente que $F^2_{\mathfrak{C}}M \cong F^2_{\mathbf{g}}M \times_{O(n)} C^2(n)$, siendo $\mathbf{g} \in \mathfrak{C}$.

3 Conexiones de Cartan en estructuras conformes.

Sea $L_{\mathfrak{C}}M$ una $C(n)$-estructura (con $n \geq 3$) y sea $F^2_{\mathfrak{C}}M$ su primera prolongación. El objetivo de ésta sección es, por una parte, identificar (T.12) la llamada "conexión normal de Cartan asociada a $L_{\mathfrak{C}}M$" (D.42) con la 1-forma de tipo Cartan $\zeta^{F^{tr}}$ inducida, a la manera señalada en T.8 (ver VI.4.2), por un cierto subespacio F^{tr} complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $A^2(n,\mathfrak{c}(n))$ y $C(n)$-invariante (L.61); y por otra parte, hacer explícito (T.13) que la conexión de segundo orden, inducida (según T.10, VI.4.2) por una conexión lineal simétrica λ compatible con $\mathfrak{C}$ y por la conexión normal de Cartan asociada a $\mathfrak{C}$, no coincide, en general, con la conexión ω_λ inducida (D.15 en IV.4.2 y apartado VI.3.4) por λ.

3.1 Conexiones de Cartan.

Recordamos aquí la definición de conexión de Cartan (véase p. ej. [Ko2, IV.3]).

Definición 41 *Sea $P(M,\mathcal{G})$ un fibrado principal y sea $\mathcal{L}$ un grupo de Lie del que $\mathcal{G}$ es un subgrupo tal que $\dim \mathcal{L} = \dim P$. Sean $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{g}$ las respectivas álgebras de Lie de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{G}$. Una 1-forma $\zeta \in \Lambda^1(P,\mathfrak{l})$ se dice que es una* conexión de Cartan respecto de $\mathcal{L}$ *si verifica:*

a. $\forall\, \alpha \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{l}, \quad \zeta(\alpha^\sharp) = \alpha$

b. $\forall\, X \in TP, \quad \zeta(X) = 0 \implies X = 0$

c. $\forall\, a \in \mathcal{G} \subset \mathcal{L}, \quad R_a^*\zeta = Ad^{\mathcal{L}}_{a^{-1}} \circ \zeta.$

Nota 80

a. Las conexiones de Cartan en $P(M,\mathcal{G})$ están en correspondencia biyectiva con las conexiones en el fibrado principal $P^{\mathcal{L}}(M,\mathcal{L})$, con $P^{\mathcal{L}} := P \times_{\mathcal{G}} \mathcal{L}$ (la *extensión* de P, V.1.3.(a)).

Es fácil establecer esta correspondencia usando la inmersión natural de P en $P \times_{\mathcal{G}} \mathcal{L}$ y las propiedades (a,b y c) de ζ.

b. Si el par $(\mathcal{L},\mathcal{G})$ es *reductivo* (en el sentido de que existe un subespacio $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{l}$ complementario de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, y verificando $Ad^{\mathcal{L}}_a(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$, $\forall\, a \in \mathcal{G}$) entonces la "parte vertical" de ζ, es decir, la parte $\mathfrak{g}$-valuada $\zeta_{\mathfrak{g}}$ de ζ en la descomposición $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, es una conexión en $P(M,\mathcal{G})$. Y viceversa, si en una descomposición $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ (suma directa) la parte $\mathfrak{g}$-valuada de

ζ es una conexión en $P(M,\mathcal{G})$ el par $(\mathcal{L},\mathcal{G})$ es reductivo (con respecto al subespacio $\mathfrak{m}$).

En efecto: Si escribimos $\zeta \equiv (\zeta_{\mathfrak{m}}, \zeta_{\mathfrak{g}})$, para que se verifique simultáneamente la propiedad **c** de una conexión de Cartan y la propiedad $R_a^*\zeta_{\mathfrak{g}} = Ad^{\mathcal{G}}_{a^{-1}} \circ \zeta_{\mathfrak{g}}$, $\forall\, a \in \mathcal{G}$, propia de una conexión en P, es necesario y suficiente que $Ad^{\mathcal{L}}_a \circ \zeta_{\mathfrak{m}}$ no tenga parte $\mathfrak{g}$-valuada en la descomposición $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$.

c. Para cualquier G-estructura $P(M,G)$ la forma $\zeta = (\theta^L, \lambda)$, con θ^L la forma canónica en P y λ una conexión en P, es una conexión de Cartan respecto del grupo afín (véase [Ko2, IV.3]). La forma de tipo Cartan ζ^E dada en el teorema T.5, VI.3.2, es un caso particular de esto cuando $\mathfrak{g}_1 = 0$ (ver N.62.c).

3.2 La conexión normal de Cartan de una estructura conforme.

En todo este apartado es $n \geq 3$.

Es bien conocido (véase p.ej. [Ko2, IV, Th.4.2]; también [Ogi], [Och], [Tan]) que, dada una $C(n)$-estructura $L_{\mathbb{C}}M$, existe una conexión de Cartan en $F^2_{\mathbb{C}}M$ (respecto del grupo conforme completo $\overline{C(n)}$) que es canónica, en el sentido de quedar unívocamente determinada por ciertas condiciones (que incluyen una condición algebraica sobre su curvatura). Esta es la llamada *conexión normal de Cartan* ζ^{nor}, $\zeta^{nor} \equiv (\theta_{-1}, \theta_0, \zeta_1^{nor}) \in \Lambda^1(F^2_{\mathbb{C}}M, \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1)$ (D.42); esta conexión fue primeramente introducida por Cartan ([Ca2]).

Por otra parte, si G es un subgrupo de Lie de $GL(n)$ con $\mathfrak{g}_2 = 0$ y tal que existe un subespacio $F \subset A^2(n,\mathfrak{g})$ complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{g}) \subset A^2(n,\mathfrak{g})$ que sea G-invariante, hemos construido (ver T.8, VI.4.2), para cualquier G-estructura 1-integrable $P(M,G)$, una forma $\zeta^F \equiv (\theta_{-1}, \theta_0, \zeta_1^F) \in \Lambda^1(P^2, \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1)$ de tipo Cartan canónica.

Supongamos $G = C(n)$ y consideremos una $C(n)$-estructura $L_{\mathbb{C}}M$. En primer lugar, es inmediato ver (en base a L.59.b) que, en $F^2_{\mathbb{C}}M$, las conexiones de Cartan (D.41) respecto de $\overline{C(n)}$ y las formas de tipo Cartan (D.27) son una *misma cosa*; en segundo lugar, y como apunta Guillemin ([Gui]), *existen* subespacios F complementarios de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) \subset A^2(n,\mathfrak{c}(n))$ que son $C(n)$-invariantes; se sigue pues (T.7; también [Gui]) que, para cada elección de F, $\zeta^F \equiv (\theta_{-1}, \theta_0, \zeta_1^F)$ es una conexión de Cartan. Parece lógico esperar que la propia conexión normal de Cartan ζ^{nor} venga inducida por este procedimiento, para algún subespacio F^{tr}. En efecto *así sucede* (Guillemin parece sugerirlo, aunque su comentario no es concluyente al respecto) y en este apartado se

identifica F^{tr}.

Definición 42 *Sean* $L_{\mathfrak{C}}M$ *una* $C(n)$*-estructura y* $F^2_{\mathfrak{C}}M$ *su 2-levantamiento. La* conexión normal de Cartan asociada a $\mathfrak{C}$ *es la 1-forma* $\zeta^{nor} \equiv (\theta_{-1}, \theta_0, \zeta_1^{nor}) \in \Lambda^1(F^2_{\mathfrak{C}}M, \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1)$ *definida unívocamente por la condición*

$$tr_2^1(\Omega_0^{nor}(\theta_{-1}|_H^{-1}(\cdot), \theta_{-1}|_H^{-1}(\cdot))) = 0,$$

siendo Ω_0^{nor} *la componente* $\mathfrak{c}(n)$*-valuada de* $\Omega^{nor} := d\zeta^{nor} + \frac{1}{2}[\zeta^{nor}, \zeta^{nor}] \in \Lambda^2(F^2_{\mathfrak{C}}M, \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1)$, H *cualquier* n*-subespacio de* $T(F^2_{\mathfrak{C}}M)$ *transversal a las fibras de* $F^2_{\mathfrak{C}}M \to M$, *y* tr_2^1 *la contracción (traza)* $\binom{1}{2}$ *de un elemento de* $A^2(n, \mathfrak{c}(n)) \subset L^3(n)$.

Se demuestra en efecto que esta 1-forma ζ^{nor} existe siempre y es única (véase [Ko2, IV.Th.4.2], [Ogi, Prop.10]; con diferente formulación, véase [Tan, Prop.5], [Och, Th.(11.1)]).

Vamos a encontrar ahora un subespacio F^{tr}, complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $A^2(n, \mathfrak{c}(n))$ y $C(n)$-invariante.

En realidad, el subespacio que nos interesa para construir una primera prolongación de $F^2_{\mathfrak{C}}M$ (recordar D.35) no sería F^{tr} sino más bien la *intersección* $F^{tr} \cap Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$, que sería complementario de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$ y también $C(n)$-invariante. No obstante, se deduce de D.34.b que: $\overline{\mathcal{T}}_q \in F^{tr} \implies \overline{\mathcal{T}}_q \in F^{tr} \cap Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$. Centraremos pues nuestra atención en los complementarios de $Im\,\mathbb{A}_{1,2}$ en $A^2(n, \mathfrak{c}(n))$, más cómodos de tratar.

Recordemos la aplicación

$$\mathbb{A}_{1,2} : L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1) \longrightarrow A^2(n, \mathfrak{c}(n)),$$

dada por (VI.1.2) $\mathbb{A}_{1,2}(T)(v,w) := \frac{1}{2}(T(v)(w) - T(w)(v))$.

Nota 81 Entresacamos de la demostración de L.56 los resultados de interés para lo que sigue.

a. $\mathbf{i} \circ \mathbf{d} \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1)$ es el isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{i}\circ\mathbf{d}: & \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathfrak{c}(n)_1 \\ & v & \longmapsto & \eta(v,\cdot)I + \{v,\cdot\}. \end{array}$$

Se tiene que $\mathbb{A}_{1,2} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{d} \in A^2(n, \mathfrak{c}(n))$ viene dado por

$$(\mathbb{A}_{1,2} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{d})(v,w) = \{v,w\},\ \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n,$$

por tanto $\mathbb{A}_{1,2} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{d} = \{\cdot,\cdot\} \in A^2(n, \mathfrak{o}(n))$.

b. Se tiene el isomorfismo lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1) \\ \alpha & \longmapsto & \mathbf{i} \circ \mathbf{d} \circ \alpha. \end{array}$$

Sean $T \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1)$ y $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ tales que $T = \mathbf{i} \circ \mathbf{d} \circ \alpha$; entonces

$$\mathbb{A}_{1,2} \circ T = \frac{1}{2}(\eta((\alpha - \alpha^\dagger)\cdot, \cdot)I + \{\cdot, \cdot\}\alpha^\dagger + \alpha\{\cdot, \cdot\})$$

(tener en cuenta que

$$\begin{cases} \eta((\alpha - \alpha^\dagger)\cdot, \cdot)I \in A^2(n, \mathfrak{h}(n)) \\ \alpha\{\cdot, \cdot\} + \{\cdot, \cdot\}\alpha^\dagger \in A^2(n, \mathfrak{o}(n))). \end{cases}$$

Como $dim(Im\, \mathbb{A}_{1,2}) = n^2$ (ver el apartado 1.3), entonces el subespacio F^{tr} que buscamos debe tener dimensión $dim(F^{tr}) = dim(A^2(n, \mathfrak{c}(n))) - n^2$. Identificamos (recordar I.2.3) $A^2(n, \mathfrak{c}(n))$ con un subespacio de $L^3(n)$, poniendo $\tau(u, v)w \equiv \tau(u, v, w)$.

Lema 61 *El subespacio de* $A^2(n, \mathfrak{c}(n))$

$$F^{tr} := \{\tau \in A^2(n, \mathfrak{c}(n)) : tr(\tau(v, \cdot, w)) = 0,\ \forall\, v, w \in \mathbf{R}^n\}$$

(tr es la traza) *es complementario de* $Im\, \mathbb{A}_{1,2}$, $A^2(n, \mathfrak{c}(n)) = Im\, \mathbb{A}_{1,2} + F^{tr}$ *(suma directa), y es* $C(n)$*-invariante.*

Demostración: Puesto que F^{tr} está determinado por las n^2 ecuaciones independientes

$$tr(\tau(e_i, \cdot, e_j)) \equiv \tau^k_{ikj} = 0,\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n,$$

sólo queda probar que $Im\, \mathbb{A}_{1,2} \cap F^{tr} = 0$. Y en efecto: Sea $T \equiv \mathbf{i} \circ \mathbf{d} \circ \alpha \in L(\mathbf{R}^n, \mathfrak{c}(n)_1)$ para $\alpha \in \mathfrak{gl}(n)$ (ver N.76.b); probaremos que

$$(\mathbb{A}_{1,2} \circ T)^k_{ikj} = 0,\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n \iff \alpha = 0.$$

Por L.53.c, N.74.b y N.81.b, es fácil concluir que

$$(\mathbb{A}_{1,2} \circ T)^k_{ikj} = \alpha^k_i \eta_{kj} - tr(\alpha)\eta_{ij} + (1 - n)\alpha^k_j \eta_{ki}.$$

Supongamos que $(\mathbb{A}_{1,2} \circ T)^k_{ikj} = 0$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Fijando $i = j$, queda

$$(2 - n)\alpha^k_i \eta_{ki} - tr(\alpha)\eta_{ii} = 0;\ \Rightarrow\ tr(\alpha) = (2 - n)\alpha^i_i \text{ (no sumado en } i);$$

se deduce que $n\,tr(\alpha) = (2-n)tr(\alpha)$ y de aquí $tr(\alpha) = 0$, lo que, con lo anterior, implica que $\alpha_i^i = 0$ (no sumado en i), $\forall\, 1 \leq i \leq n$. Por otra parte, para cada par (i,j), $i \neq j$, quedan las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_i^j \eta_{jj} + (1-n)\alpha_j^i \eta_{ii} &= 0 \\ (1-n)\alpha_i^j \eta_{jj} + \alpha_j^i \eta_{ii} &= 0, \end{aligned}$$

que implican (si $n \neq 2$) que $\alpha_j^i = \alpha_i^j = 0$. El primer resultado se sigue.

En cuanto a la $C(n)$-invariancia de F^{tr}, se sigue inmediatamente de la invariancia de la traza bajo la representación adjunta de $GL(n)$.

Se obtiene el siguiente

Teorema 12 *Sean $L_{\mathfrak{C}}M$ una $C(n)$-estructura y $F^2_{\mathfrak{C}}M$ su 2-levantamiento. Sea $\zeta^{F^{tr}} \in \Lambda^1(F^2_{\mathfrak{C}}M, \mathbf{R}^n + \mathfrak{c}(n) + \mathfrak{c}(n)_1)$ la 1-forma de tipo Cartan inducida por el subespacio F^{tr}* (L.61) *por el procedimiento dado en* T.8. *Entonces se tiene*

$$\zeta^{F^{tr}} = \zeta^{nor},$$

siendo ζ^{nor} la conexión normal de Cartan asociada a $\mathfrak{C}$ (D.42).

Demostración: Es inmediata, habida cuenta de la unicidad de la conexión normal de Cartan (D.42) y del hecho (ver N.72.c.iv) de que

$$\Omega_0^{F^{tr}} \circ (B^{F^{tr}}(\cdot)|_z, B^{F^{tr}}(\cdot)|_z) \in F^{tr}, \quad \forall\, z \in F^2_{\mathfrak{C}}M.$$

Nótese que la *definición* habitual de Ω^{nor}, que es la dada por (D.42), se corresponde con la *ecuación de estructura* (T.9) de la curvatura (D.36) $\Omega^{F^{tr}}$ de la 1-forma de tipo Cartan.

Nota 82 Identifiquemos $\zeta^{F^{tr}} \equiv \zeta^{nor}$.

a. Sea $\Omega^{F^{tr}}$ la curvatura de la conexión normal de Cartan $\zeta^{F^{tr}}$ (D.36). Se verifica:

(i) $\Omega_{-1}^{F^{tr}} = 0$ (ver T.9.i).

(ii) Si $n = 3$, $\Omega_0^{F^{tr}} = 0$.

En efecto: recordando la aplicación (ver 1.3)

$$\mathbb{A} : A^2(n, \mathfrak{c}(n)) \equiv C^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) \to A^3(n) \equiv C^{0,3}(\mathfrak{c}(n)),$$

se tiene ($\forall\, z \in F^2_{\mathfrak{C}}M$):

$$\begin{aligned} F^{tr} \ni \text{(N.72.iv)}\ & \Omega_0^{F^{tr}} \circ (B^{F^{tr}}(\cdot)|_z, B^{F^{tr}}(\cdot)|_z) \in \\ & \in \text{(Corol. C.4.a)}\ Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) = \\ & = \text{(al ser } n = 3\text{, es } H^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0)\ B^{1,2}(\mathfrak{c}(n)); \end{aligned}$$

y el resultado se sigue de que $F^{tr} \cap B^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0$.

(iii) Si $n \geq 4$ y $D^{F^{tr}}\Omega_0^{F^{tr}} = 0$, entonces $\Omega_1^{F^{tr}} = 0$.

En efecto: recordando la aplicación (ver 1.3)

$$\mathbb{A}_{123} : A^2(n, \mathfrak{c}(n)_1) \equiv C^{2,2}(\mathfrak{c}(n)) \to \\ \to A^3(n, \mathfrak{c}(n)) \equiv C^{1,3}(\mathfrak{c}(n)),$$

se tiene ($\forall\, z \in F^2_{\mathfrak{C}}M$):

$$\Omega_1^{F^{tr}} \circ (B^{F^{tr}}(\cdot)|_z, B^{F^{tr}}(\cdot)|_z) \in \\ (\text{C.4.b y si } D^{F^{tr}}\Omega_0^{F^{tr}} = 0) \in Z^{2,2}(\mathfrak{c}(n)) = \\ = (\text{al ser } n \geq 4, \text{ es } H^{2,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0) = B^{2,2}(\mathfrak{c}(n)) = \\ = (\text{ver 1.3})\ 0.$$

b. Comentemos brevemente la relación que existe entre la conexión normal de Cartan $\zeta^{F^{tr}}$ y el "tensor de Weyl" asociados a la estructura conforme $\mathfrak{C}$ (ver [Och], en un contexto algo diferente):

(i) Definimos la 2-forma $\mathcal{W} \in \Lambda^2(L_{\mathfrak{C}}M, \mathfrak{c}(n))$ por la condición $\Pi^*\mathcal{W} := \Omega_0^{F^{tr}}$ (siendo Π la proyección $F^2_{\mathfrak{C}}M \to L_{\mathfrak{C}}M$)

La 2-forma $\mathcal{W}$ está bien definida; basta para ello comprobar que la 2-forma $\Omega_0^{F^{tr}} \in \Lambda^2(F^2_{\mathfrak{C}}M, \mathfrak{c}(n))$ es invariante por la acción principal en la $\mathfrak{c}(n)_1$-estructura $\Pi : F^2_{\mathfrak{C}}M \to L_{\mathfrak{C}}M$ (lo que es inmediato por N.73, L.58.e y T.9.i).

La 2-forma $\mathcal{W}$ es tensorial de tipo $Ad^{C(n)}$.

Se prueba, en efecto, que $\forall\, l \in L_{\mathfrak{C}}M$, $\forall\, X, Y \in T_lL_{\mathfrak{C}}M$ y $\forall\, a \in C(n)$ (por N.61.b, N.73 y L.58.e)

$$\mathcal{W}(R^L_{a*}X, R^L_{a*}Y) = (Ad^{C(n)}_{a^{-1}} \circ \mathcal{W})(X, Y).$$

Consecuentemente ([GHV, II, Prop.IX, p.406]) $\mathcal{W}$ define un campo de tensores (sobre M) $W \in \Lambda^2(M, AdL_{\mathfrak{C}}M) \subset$ (ver V.1.5(c)) $\Lambda^2(M, End(TM))$; éste es el *tensor de Weyl de la estructura conforme* $(M, \mathfrak{C})$.

(ii) Sea λ una conexión simétrica en $L_{\mathfrak{C}}M$. Sean $\sigma_\lambda : L_{\mathfrak{C}}M \to F^2_{\mathfrak{C}}M$ su sección equivariante asociada (L.17 y apartado VI.3.4) y $\Omega_\lambda \in \Lambda^2(L_{\mathfrak{C}}M, \mathfrak{c}(n))$ su forma de curvatura. La parte $\mathfrak{c}(n)$-valuada de la ecuación de estructura de $\zeta^{F^{tr}}$ es (T.9): $\Omega_0^{F^{tr}} = d\theta_0 + \frac{1}{2}[\theta_0, \theta_0] + \zeta_1^{F^{tr}}\tilde{\wedge}\theta_{-1}$. Puesto que $\Pi \circ \sigma_\lambda = id$, $\sigma_\lambda^*\theta_0 = \lambda$ (L.17), y $\Omega_\lambda = d\lambda + \frac{1}{2}[\lambda, \lambda]$ (I.4.1), se obtiene

$$\Omega_\lambda = \mathcal{W} - \sigma_\lambda^*(\zeta_1^{F^{tr}})\tilde{\wedge}\theta^L.$$

Evaluada sobre $(B^\lambda(\cdot)|_l, B^\lambda(\cdot)|_l)$ $(\forall\, l \in L_{\mathfrak{C}}M)$, esta expresión corresponde a la descomposición en suma directa

$$Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) = F^{tr} + B^{1,2}(\mathfrak{c}(n)),$$

donde la parte F^{tr}-valuada (dada por $\mathcal{W}$) es independiente de la conexión λ.

En efecto:

- $\Omega_\lambda \circ (B^\lambda(\cdot)|_l, B^\lambda(\cdot)|_l) \in$
  (por $\Omega_\lambda \hat{\wedge} \theta^L = 0$, I.4.1) $\in Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$.
- $F^{tr} \ni$ (N.72.iv) $\Omega_0^{F^{tr}} \circ (B^{F^{tr}}(\cdot)|_z, B^{F^{tr}}(\cdot)|_z) \in$
  $\in$ (Corol. C.4.a) $Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$, $\forall\, z$ con $\Pi(z) = l$; $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ $\mathcal{W} \circ (B^\lambda(\cdot)|_l, B^\lambda(\cdot)|_l) \in Z^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) \cap F^{tr}$.
- $(\zeta_1^{F^{tr}} \tilde{\wedge} \theta_{-1}) \circ (B^{F^{tr}}(\cdot)|_z, B^{F^{tr}}(\cdot)|_z) \in B^{1,2}(\mathfrak{c}(n))$.

c. Veamos brevemente la condición de integrabilidad de una $C(n)$-estructura $L_{\mathfrak{C}}M$.

(i) *Obstrucciones a la integrabilidad.* Como ya comentamos en la sección VI.2, una G-estructura $(r-1)$-integrable $(r > 0)$ es r-integrable si y sólo si (véase [Gui, Th.4.1]) su r-ésima función de estructura (a valores en $H^{r-1,2}(\mathfrak{g})$) se anula. Si $n \geq 3$ $(\Rightarrow H^{0,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0)$, toda $C(n)$-estructura es 1-integrable (ver apartado 2.2). Si $n = 3$ $(\Rightarrow H^{1,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0)$, toda $C(n)$-estructura es además 2-integrable; y si $n \geq 4$ $(\Rightarrow H^{2,2}(\mathfrak{c}(n)) = 0)$, toda $C(n)$-estructura que sea 2-integrable es 3-integrable.

Por otra parte, y como también comentamos en la sección VI.2, si $\mathfrak{g}$ es de tipo finito r, toda G-estructura que sea $(r+1)$-integrable es integrable (véase [Gui, Th.5.1]). Consecuentemente, si $n \geq 3$ $(\Rightarrow \mathbf{c}^2 = 0)$, toda $C(n)$-estructura que sea 3-integrable es integrable.

Resulta de lo anterior que, si $n \geq 3$, la obstrucción a la integrabilidad de una $C(n)$-estructura está en la tercera función de estructura (para $n = 3$) o en la segunda (para $n \geq 4$).

(ii) *Integrabilidad.* Es un resultado conocido (véase p.ej. [Och, Prop.(11.1)]) que una $C(n)$-estructura $L_{\mathfrak{C}}M$ es integrable si y sólo si $d\zeta^{F^{tr}} + \frac{1}{2}[\zeta^{F^{tr}}, \zeta^{F^{tr}}] = 0$. Resulta entonces (de **a**) que, si $n \geq 3$, $L_{\mathfrak{C}}M$ es integrable si y sólo si $\Omega_1^{F^{tr}} = 0$ (para $n = 3$) ó $\Omega_0^{F^{tr}} = 0$ (para $n \geq 4$).

Lo anterior anterior está en correspondencia con el conocido teorema clásico (véase p.ej. [Laf, Teor.9]) que rela-

ciona la integrabilidad de una estructura conforme con el tensor de Schouten (para $n = 3$) o con el tensor de Weyl (para $n \geq 4$), pero no entraremos aquí en ello.

Por último, como aplicación a nuestro caso del teorema T.10.a, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 13 *Sea λ una conexión simétrica en $P \equiv L_{\mathbb{C}}M$. La conexión de segundo orden ω en $F^2_{\mathbb{C}}M$, dada por* (T.10.a)

$$\begin{cases} \omega_0 = \theta_0 + \Upsilon^P_\lambda(\theta_{-1}) = \text{(N.33.a y L.18.b) } \Pi^*\lambda \\ \omega_1 = \zeta_1^{F^{tr}} + \frac{1}{2}\Upsilon^P_\lambda{}^{\Upsilon^P_\lambda(\theta_{-1})} \end{cases}$$

verifica:

a. $(\Omega_\omega)_0 = \Pi^*\Omega_\lambda$

b. $(\Theta_\omega)_0 = \Omega_0^{F^{tr}} =: \text{(N.82.b.i) } \Pi^*\mathcal{W}$.

Demostración: La parte **a** es inmediata. Veamos la parte **b**. Por la ecuación de estructura de ω, N.28.a.ii, se tiene

$$d\theta_0 = -(\zeta_1^{F^{tr}} + \frac{1}{2}\Upsilon^P_\lambda{}^{\Upsilon^P_\lambda(\theta_{-1})})\tilde{\wedge}\theta_{-1} - [\omega_0, \theta_0] + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] + (\Theta_\omega)_0;$$

pero, por L.2.b.vii, se tiene que $\Upsilon^P_\lambda{}^{\Upsilon^P_\lambda(\theta_{-1})}\tilde{\wedge}\theta_{-1} = [\Upsilon^P_\lambda(\theta_{-1}), \Upsilon^P_\lambda(\theta_{-1})] =$ $= \text{(ver arriba) } [\omega_0 - \theta_0, \omega_0 - \theta_0]$, y la anterior ecuación se simplifica:

$$\begin{aligned} d\theta_0 &= -\zeta_1^{F^{tr}}\tilde{\wedge}\theta_{-1} - \tfrac{1}{2}[\omega_0 - \theta_0, \omega_0 - \theta_0] - [\omega_0, \theta_0] + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] + (\Theta_\omega)_0 = \\ &= -\zeta_1^{F^{tr}}\tilde{\wedge}\theta_{-1} - \tfrac{1}{2}[\theta_0, \theta_0] + (\Theta_\omega)_0, \end{aligned}$$

y, por T.9.ii, el resultado se sigue.

Nota 83 Se puede obtener explícitamente la expresión de $(\Omega_\omega)_1$ en función de λ y $\Omega_1^{F^{tr}}$; sin embargo, y sin necesidad de usar dicha expresión, se puede afirmar que, en general, la conexión ω del teorema anterior *no coincide con la conexión ω_λ inducida por λ* (D.15 en IV.4.2 y apartado VI.3.4); el que coincidieran implicaría (T.3.b en IV.4.2) que $\Omega_\lambda = \mathcal{W}$, lo que no es genérico (ver N.82.b.ii).

Bibliografía

[A-S] E. Aguirre-Dabán, I. Sánchez-Rodríguez, *On structure equations for second order connections*, en *"Proc. Int. Conf. on Differential Geometry and its Applications (Opava, Czechoslovakia, 92)"*, O. Kowalski y D. Krupka (eds.), Silesian Univ. Opava, 257-264, 1993.

[Ati] M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., **85**, 181-207 (1957).

[Ber] D. Bernard, *Sur la géometrie différentielle des G-structures*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **10**, 151-270 (1960).

[Bow] R. H. Bowman, *Second order connections*, J. Diff. Geom., **7**, 549-561 (1972).

[Ca1] E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Ec. Norm., **21**, 153-206 (1904), Ann. Ec. Norm., **22**, 219-308 (1905); *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Ec. Norm., **25**, 57-194 (1908).

[Ca2] E. Cartan, *Les espaces à connexion conforme*, Ann. Soc. Pol. Math., **2**, 171-221 (1923).

[Ca3] E. Cartan, *Les problèmes d'équivalence*, Semin. de Math. exposé D, (1937), en *"Oeuvres complètes"*, Editions du C.N.R.S., Partie II, 1311-1334, 1984.

[Che] S. S. Chern, *The geometry of G-structures*, Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 167-219 (1966).

[CDL] L.A.Cordero, C.T.J.Dodson, M. de León, *"Differential Geometry of Frame Bundles"*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[Die] J. Dieudonné, *"Éléments d'Analyse"*, Tome III, Gauthier-Villars éd., Paris, 1970.

[Ehr] C. Ehresmann, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie*, en *"Coll. Int. du C.N.R.S., Geom. Diff."*, Strasbourg, 1953.

[FFR] M. Ferraris, M. Francaviglia, C. Reina, *A constructive approach to bundles of geometric objets on a differentiable manifold*, J. Math. Phys. **24** (1), 120-124 (1983); *Sur les fibrés d'objets géométriques et leurs applications physiques*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **38**, (4), 371-383 (1983).

[Fuj] A. Fujimoto, *"Theory of G-structures"*, Publications of the Study Group of Geometry, **1**, Tokyo Univ., Tokyo, 1972.

[Gar] P.L. García, *Connections and 1-jet fiber bundles*, Rend. Sem. Mat. Padova, **47**, 227-242 (1972).

[GHV] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *"Connections, Curvature, and Cohomology"*, Vol. I y II, Academic Press, New York, 1973.

[Gui] V. Guillemin, *The integrability problem for G-structures*, Trans. Amer. Math. Soc., **116**, 544-560 (1965).

[G-S] V. Guillemin, S. Sternberg, *"Deformation theory of pseudogroup structures"*, Mem. Amer. Math. Soc., **64**, Providence, Rhode Island, 1966.

[Hen] J. D. Hennig, *Jet bundles and Weyl geometry*, en *"Proc. Int. Conf. on Diff. Geom. Methods in Math. Phys. (Clausthal 78)"*, Lect. Notes in Physics, vol. **139**, Springer, 1981; *Second order conformal structures*, en *"Proc. Int. Conf. on Diff. Geom. Methods in Math. Phys. (Clausthal 85)"*, Lect. Notes in Physics, vol. **261**, Springer, 1986.

[Ko1] S. Kobayashi, *Frame bundles of higher order contact*, en *"Proc. Symp. Pure Math."*, Vol.**3**, Amer. Math. Soc., 186-193, 1961.

[Ko2] S. Kobayashi, *"Transformation Groups in Differential Geometry"*, Springer Verlag, Heidelberg 1972.

[K-N] S.Kobayashi, K.Nomizu, *"Foundations of Differential Geometry"*, Vol.I, John Wiley, New York, 1963.

[Klr] I.Kolář, *Canonical forms on the prolongations of principal fibre bundles*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., **16**, 1091-1106 (1971); *A generalization of the torsion form*, Časopis pro pěstování matematiky, Praha, roč. **100**, 284-290 (1975).

[Kos] J. L. Koszul, *"Lectures on Fibre Bundles and Differential Geometry"*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960 (reimp. 1965).

[Kul] R. S. Kulkarni, *Conformal structures and Moebius structures*, en *"Conformal Geometry"*, R. S. Kulkarni y U. Pinkall (eds.), Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1988.

[Laf] J. Lafontaine, *Conformal geometry from riemannian viewpoint*, en *"Conformal Geometry"*, R. S. Kulkarni y U. Pinkall (eds.), Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 65-92, 1988.

[Lft] J. Lafuente López, *Una nota sobre los espacios de Weyl*, Seminario Dep. Geometría y Topología, Univ. Complutense Madrid, Abril 1992.

[Leh] D. Lehmann, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **16**, 1968.

[L-E] M. de León, M. Epstein, *On the integrability of second order G-structures with applications to continuous theories ef dislocations*, Reports on Math. Phys., **33**, 419-436 (1993); *The geometry of uniformity in second grade elasticity*, preprint (1994).

[Lib] P. Libermann, *Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés vectoriels*, Ann. Inst. Fourier, **14**, 145-172 (1964).

[Och] T. Ochiai, *Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **152**, 159-193 (1970).

[Ogi] K. Ogiue, *Theory of conformal connections*, Kodai Math. Sem. Rep., **19**, 193-224 (1967).

[P-T] R. S. Palais, C. L. Terng, *Natural bundles have finite order*, Topology, **16**, 271-277 (1977).

[Per] R. Percacci, *"Geometry of Nonlinear Field Theories"*, World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd., Singapore, 1986.

[Sal] M. Salgado, *"Sobre la geometría diferencial del fibrado de referencias de orden 2"* (Tesis), Publ. Dep. Geometría y Topología, **63**, Univ. Santiago, 1984.

[Sch] B. G. Schmidt, *A new definition of Conformal and Proyective Infinity of Space-Times*, Commun. Math. Phys., **36**, 73-90 (1974).

[S-S] I. M. Singer, S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan. Part I (The transitive groups)*, J. Analyse Math., **15**, 1-114 (1965).

[Ste] S. Sternberg, *"Lectures on Differential Geometry"*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1964.

[Tan] N. Tanaka, *Conformal connections and conformal transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **92**, 168-190 (1959).

[Ter] C. L. Terng, *Natural vector bundles and natural differential operators*, Am. J. Math., **100**(4), 775-828 (1978).

[Val] A. Valdés Morales, *"Invariantes diferenciales del fibrado de las referencias proyectivas y el problema de equivalencia de Cartan asociado"* (Tesis), Dep. Geometría y Topología, Univ. Complutense Madrid, 1994.

[YI1] K. Yano, S. Ishihara, *Differential geometry of tangent bundles of order 2*, Kōdai Math. Sem. Rep., **20**, 318-354 (1968).

[YI2] K. Yano, S. Ishihara, *"Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry"*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[Yue] P. C. Yuen, *Higher order frames and linear connections*, Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle, Vol XII, 337-371 (1971).