



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS  
Sección de Mecánica

DESPLAZAMIENTO AL ROJO COSMOLOGICO  
EN ESPACIO-TIEMPOS CONFORMES  
EL MODELO DE I.E. SEGAL

Ignacio Sánchez Rodríguez

Memoria presentada para optar al  
Grado de Licenciado en Ciencias  
Matemáticas, dirigida por los  
Dres. Eduardo Aguirre Dabán y  
Carmen Fernández Cambronero.

Madrid, 1984.

Deseo expresar mi agradecimiento a los profesores Eduardo Aguirre y Carmen Fernández por su efectiva dirección y participación en este trabajo; al compañero Manuel **Gutiérrez** por la colaboración que me prestó en la primera parte del trabajo, y a Bárbara Wang, que mecanógrafió los originales.

## INDICE

CAPITULO 1	INTRODUCCION GENERAL.....	1
CAPITULO 2	CONFORMALIDAD Y CAUSALIDAD.....	7
	2.1. Comentario general sobre el espacio-tiempo...	7
	2.2. Conformalidad.....	10
	2.3. Causalidad.....	13
	2.4. Ejemplos.....	18
CAPITULO 3	OBSERVADORES Y SISTEMAS DE REFERENCIA.....	21
	3.1. Introducción.....	21
	3.2. Observadores y sistemas de referencia.....	24
	3.3. Homogeneidad e isotropía.....	32
	3.4. Ejemplos.....	35
CAPITULO 4	DESPLAZAMIENTO AL ROJO (O AL AZUL) EN UN ETC.....	38
	4.1. Introducción.....	38
	4.2. Razón de tiempos propios.....	41
	4.3. Ejemplos.....	44
CAPITULO 5	MODELO COSMOLOGICO DE SEGAL.....	47
	5.1. Introducción.....	47
	5.2. Postulados de Segal para el espacio-tiempo...	50
	5.3. El espacio-tiempo del modelo de Segal.....	53
	5.4. El grupo causal del espacio-tiempo de Segal..	58
	5.5. Sistemas de referencia en el modelo de Segal.	61
CAPITULO 6	¿HAY DESPLAZAMIENTO AL ROJO EN EL MODELO DE SEGAL?	70
APENDICE	.....	83
	A.1. Demostración del lema 2.1.b.....	83
	A.2. El grupo $U(\widetilde{2})$ .....	84
	A.3. La acción local del grupo causal $SU(\widetilde{2},2)$ sobre $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$ .....	89
REFERENCIAS	.....	95

## CAPITULO 1

### INTRODUCCION GENERAL

En la segunda década de este siglo W.M. Slipher y otros astrónomos descubren un desplazamiento al rojo en los espectros de la radiación procedente de la mayoría de las galaxias lejanas. Una interpretación de este fenómeno (posteriormente denominado "desplazamiento al rojo cosmológico") como efecto Doppler en el marco de la relatividad especial permite asignar a estas galaxias una velocidad de recesión con respecto a la Tierra. En 1929 E. Hubble descubre una relación más o menos lineal entre esta velocidad y la distancia a que se encuentran dichas galaxias; esta observación sienta la base experimental para los modelos cosmológicos expansivos (véase [6], cap. 5; [10], caps. 14 y 15; [13], caps. 27 al 30) y lleva posteriormente a A. Einstein a suprimir de sus ecuaciones de campo la llamada "constante cosmológica", que había introducido años atrás con el exclusivo propósito de posibilitar la existencia de soluciones que correspondieran a cosmologías no expansivas. En favor de los modelos expansivos está hoy en día no sólo la abrumadora evidencia originada por el descubrimiento de la radiación de fondo en 1968 y por la moderna física de partículas elementales, sino también el hecho de que dichos modelos siguen proporcionando la explicación más satisfactoria del desplazamiento al rojo cosmológico, hasta el punto de que el binomio desplazamiento  $\longleftrightarrow$  expansión del universo ha arraigado firmemente como idea intuitiva en la cosmología física actual.

En 1976, y tras varios artículos previos sobre el tema, I.E. Segal publica un libro ([2]) en el que plantea un modelo cosmológico alternativo caracterizado, en esencia, por ser un modelo conforme,

no expansivo en un cierto sentido y en el que, sin embargo, parece predecirse un desplazamiento al rojo cosmológico que depende cuadráticamente de la distancia al observador. Concretando más, en el modelo de Segal:

- i) El espacio-tiempo viene modelado por una variedad diferenciable ( $C^\infty$ , Hausdorff, paracompacta) conexa, de dimensión 4 y dotada de una noción de causalidad inducida por una estructura conforme de signatura  $(-+++)$ . No se da a priori relevancia física a ninguna de las métricas lorentzianas compatibles con la estructura conforme.
- ii) Cada sistema de referencia (campo de vectores  $C^\infty$  futuro) metriza de forma peculiar dicho espacio-tiempo conforme. Se postula que, a gran escala, las trayectorias de la materia en promedio corresponden a curvas integrales de un cierto sistema de referencia cuya métrica asociada goza de buenas propiedades de simetría, en particular, homogeneidad e isotropía espaciales y homogeneidad temporal (grupo de isometrías a 7 parámetros como mínimo). Estos postulados conducen esencialmente a un único modelo para el cosmos a gran escala, difeomorfo conforme a  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$ , donde  $[-dt^2 \oplus h]$  indica la estructura conforme asociada a la métrica lorentziana  $-dt^2 \oplus h$  (con  $dt^2$  y  $h$  las estructuras riemannianas estándar sobre  $\mathbb{R}$  y  $S^3$  respectivamente).
- iii) Si las cartas en las que se realiza el análisis de las observaciones experimentales (análisis que necesariamente tiene lugar en el espacio de Minkowski de la relatividad especial) fueran cartas normales de la métrica  $-dt^2 \oplus h$ , la apariencia observacional de las trayectorias de la materia en promedio sería "estática" y no existiría posibilidad de explicar en este modelo el desplazamiento al rojo cosmológico. Pero Segal propone una coor

dinatización alternativa, basada en una cierta aplicación conforme entre  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  y el espacio (métrico) de Minkowski, como la única "antropomórficamente posible", y en términos de la cual dicha apariencia observacional deja de ser estática. Segal sostiene que, debido a esta "expansión aparente", su modelo predice un desplazamiento al rojo cosmológico y, al calcular éste, encuentra que su relación con la distancia es (para distancias cosmológicas pequeñas) cuadrática (y no lineal como en la observación de E. Hubble). Segal dedica la mitad del libro a intentar mostrar que un análisis estadístico cuidadoso de los datos observacionales favorecen el ajuste cuadrático frente al lineal.

La amplia evidencia experimental a que antes hacíamos referencia en favor de los modelos cosmológicos (métricos) expansivos, junto a la complejidad matemática del modelo de Segal, han sido probablemente las causas de que hasta la fecha este modelo no haya recibido mucha atención por parte de los científicos dedicados a cuestiones de cosmología (mención aparte merecen varios artículos de Segal y colaboradores aparecidos con posterioridad al citado libro; véase [12]). Recientemente R.M. Soneira ([11]) ha puesto en tela de juicio la validez del análisis estadístico llevado a cabo por Segal para apoyar su resultado de que el desplazamiento al rojo cosmológico depende cuadráticamente de la distancia.

Pero al margen de la posible relevancia física del modelo cosmológico de Segal, su interés estribaría en el mismo hecho de que prediga un desplazamiento al rojo cosmológico por efecto de una expansión que es sólo observacional. El presente trabajo se dedica a demostrar que ello no es cierto, esto es, que en el modelo de Segal no existe desplazamiento al rojo cosmológico.

En el capítulo 2 se dan las definiciones básicas de espacio-tiempo conforme (ETC) y de orientación causal infinitesimal (OCI), junto a una serie de resultados más o menos estándar, como el de que un ETC orientado-tiempo queda automáticamente dotado de una OCI "compatible" con la estructura conforme. En la introducción al capítulo se trata la cuestión de la posible relevancia física de una métrica lorentziana, en base al formalismo desarrollado por J. Ehlers ([1]), que considera una conexión lineal, simétrica, que preservara la estructura conforme y que diera la dinámica de las partículas "en caída libre", y argumenta que dicha conexión (a la que en sucesivo nos referiremos como "conexión de Weyl") no tendría en principio por qué ser métrica.

En el capítulo 3 se dan las definiciones de observador y sistema de referencia (SR) en un ETC, así como las nociones de sincronizabilidad y sincronizabilidad a tiempo propio para un SR. Se establecen los resultados de que un SR metriza unívocamente la región del ETC en la que está definido y de que un SR sincronizable a tiempo propio es geodésico para la conexión métrica que induce. Se demuestra que una condición suficiente para el carácter métrico de la conexión de Weyl es la existencia de un SR global sobre el ETC, sincronizable a tiempo propio y geodésico para dicha conexión. Se definen los sistemas de referencia factorizadores (SRF) y las nociones de homogeneidad e isotropía espaciales y de homogeneidad temporal, estableciéndose el resultado de que un SRF homogéneo temporal es paralelo para la conexión métrica que induce.

En el capítulo 4 se formalizan las cuestiones relativas al desplazamiento al rojo en un ETC. Dadas dos métricas lorentzianas compatibles con la estructura conforme, cualquier geodésica-luz de la primera puede reparametrizarse convenientemente para ser geodésica-luz de la segunda; en base a esto, se define la "razón de tiempos propios"  $r$  entre dos observadores conectados **por** trayectorias

luminosas. A continuación se da un método para evaluar dicha razón como cociente de productos escalares y se establece el resultado de que la homogeneidad temporal de un SRF implica que entre dos observadores cualesquiera del mismo la razón de tiempos propios vale la unidad, no existiendo por tanto desplazamiento al rojo en la radiación emitida por uno y recibida por el otro.

Anticipándonos al capítulo 6, hay que hacer aquí las siguientes observaciones:

- a) El cálculo que Segal hace del supuesto desplazamiento al rojo cosmológico en su modelo se reduce al cálculo de la razón de tiempos propios entre cierta pareja de observadores. Segal obtiene un valor distinto de 1; el cálculo que proponemos como correcto da un valor  $r = 1$ , y es este resultado el que nos lleva a afirmar que no existe tal desplazamiento al rojo.
- b) Segal lleva a cabo su cálculo en el marco de la mecánica cuántica. Y como no parece (desde un punto de vista físico) que un análisis del desplazamiento al rojo cosmológico precise de un tratamiento cuántico (tratamiento que además escaparía del marco de nuestro trabajo), nuestro objetivo ha sido dar una versión geométrica (clásica) del cálculo de Segal.
- c) Podría pues pensarse que las definiciones y resultados que hemos establecido como "análogo clásico" del formalismo desarrollado por Segal han sido dados ad hoc con vistas a obtener un valor  $r = 1$  allí donde Segal obtiene un valor distinto de 1. No es así; de hecho veremos en el capítulo 6 que el formalismo puesto a punto en el capítulo 4 (apoyado fundamentalmente en los resultados del capítulo 3) permite reproducir exactamente el cálculo de Segal; el error en el cálculo que comete Segal (y que, una vez corregido, conduce al valor  $r = 1$ ) nada tiene que ver con que el tratamiento

seguido sea de tipo cuántico o clásico (geométrico).

En el capítulo 5 se estudia el modelo cosmológico de Segal, encontrándose que la aplicación conforme entre  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  y el espacio (métrico) de Minkowski con la que Segal define la coordinatización del cosmos por los observadores locales (coordinatización que Segal postula ser la única "antropomórficamente posible")

- 1) coincide con la dada en [6], págs. 118-121
- 2) define cartas que son cartas normales, no de la métrica lorentziana global  $-dt^2 \oplus h$ , sino de métricas lorentzianas locales, inducidas a su vez (en la terminología del capítulo 3) por ciertos SRF homogéneos temporales y localmente definidos, para los que se obtiene su expresión explícita.

En el capítulo 6 se aborda la cuestión de la existencia de desplazamiento al rojo cosmológico en el modelo de Segal. La respuesta es negativa, y ello es consecuencia inmediata de los resultados del capítulo 4 y del carácter homogéneo temporal que Segal postula para el sistema de referencia cuyas curvas integrales corresponden a las trayectorias de la materia en promedio. El resto del capítulo se dedica a analizar en detalle el cálculo que Segal hace de dicho desplazamiento al rojo y a poner de manifiesto los errores del mismo, que, esquemáticamente, podrían resumirse diciendo que el desplazamiento al rojo no tiene nada que ver con una "evolución temporal" sino con una propagación de la luz ("evolución espacio-temporal").

En el apéndice se da la demostración de un resultado del capítulo 2. Se resumen algunos aspectos de los grupos  $U(2)$  y  $\widetilde{U}(2)$ , utilizados en el capítulo 5 para una representación alternativa del ETC del modelo de Segal en términos de grupos de Lie. Finalmente se estudian diversas acciones del grupo  $S\widetilde{U}(2,2)$ , que resulta ser el grupo de transformaciones del ETC de Segal que preservan la OCI definida en él.

## CAPITULO 2

### CONFORMALIDAD Y CAUSALIDAD

#### 2.1. COMENTARIO GENERAL SOBRE EL ESPACIO-TIEMPO

A la hora de formular una teoría macroscópica y relativista de la gravitación es habitual suponer para el espacio-tiempo una estructura de variedad diferenciable  $C^\infty$ , de dimensión cuatro, Hausdorff, paracompacta y sin borde. En lo que sigue aceptaremos estas hipótesis sin entrar a discutir su justificación, que está a mitad de camino entre la experimentación física y la idealización.

La necesidad de dar cuenta de ciertos fenómenos localmente observables asociados a la propagación de la luz (constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia físicos localmente inerciales, según se desprende del experimento de Michelson-Morley) hace razonable suponer ([1], pág. 24 y sig.) una estructura conforme  $\mathcal{L}$  de signatura  $(-+++)$ , esto es, una clase de equivalencia de (pseudo)métricas lorentzianas localmente definidas sobre la variedad espacio-tiempo  $M$ . Dicha estructura (que introduce restricciones a la topología de  $M$ ) permite clasificar los vectores tangentes a  $M$  en tres tipos, denominados tiempo, luz y espacio, así como definir ángulos y ortogonalidad entre vectores. En este contexto, pueden darse argumentos ([1], pág. 28-29 y 99-101) en favor de que las curvas que van a representar las trayectorias seguidas por la luz en su propagación sean precisamente aquéllas que admiten reparametrizaciones que las hagan geodésicas-luz de cualquier métrica lorentziana compatible con  $\mathcal{L}$ .

Es interesante hacer notar que el estudio de la propagación de la luz sólo identificaría sobre  $M$  la estructura conforme  $\mathcal{L}$ ; y aunque matemáticamente siempre es posible definir una (pseudo)métrica

lorentziana global  $g$ , sobre  $M$ , compatible con dicha estructura (véase lema 2.1), esta métrica ni sería unívoca ni la correspondiente conexión de Levi-Civita  $\nabla^g$  (caracterizada por ser simétrica y preservar el producto escalar bajo el transporte paralelo que define la conexión) tendría por qué ser a este nivel físicamente relevante. Podría pensarse que la cuestión de la posible relevancia de la conexión de Levi-Civita correspondiente a una cierta (pseudo)métrica lorentziana global sobre  $M$  compatible con  $\mathcal{L}$  quedaría resuelta por el análisis de la dinámica de las llamadas "partículas en caída libre". Sin embargo, si se abordara el estudio de dichas partículas (suponiendo la existencia de una única partícula de esta clase por cada punto de  $M$  y por cada vector tiempo tangente a  $M$  en dicho punto) y de sus trayectorias sobre  $M$  (suponiendo válida una versión local de la ley de inercia, que implicaría la existencia de cartas en torno a cada punto de  $M$  en las que aquellas trayectorias que pasan por él se verían rectilíneas), se llegaría a identificar ([1]) sobre  $M$  una "estructura proyectiva" (esto es, una clase de conexiones lineales globalmente definidas, simétricas y proyectivamente equivalentes). Una hipótesis posterior de compatibilidad entre las estructuras conforme y proyectiva, sugerida por experimentos a altas energías, singularizaría ([1]) en esta última <sup>una única</sup> conexión lineal global y simétrica cuyo transporte paralelo conservaría el carácter luz de los vectores de este tipo (esta conexión es la llamada por algunos autores conexión de Weyl, que denotaremos por  $\nabla^W$ ). Pues bien, tampoco a este nivel aparece claro por qué dicha conexión, que daría la "dinámica" de las partículas en caída libre y de los rayos de luz sobre  $M$ , tendría que ser métrica, esto es, por qué dicha conexión tendría que ser la de Levi-Civita asociada a alguna (pseudo)métrica lorentziana global compatible con  $\mathcal{L}$ .

En la Teoría general de la relatividad de Einstein se parte de la existencia en  $M$  de una (pseudo)métrica lorentziana global cuya conexión de Levi-Civita asociada da la "dinámica" de las partículas en caída libre. En realidad, esta hipótesis (avalada por cuestiones

de simplicidad y porque suministra, vía las ecuaciones de Einstein, predicciones importantes confirmadas por los experimentos) supone, desde un punto de vista constructivista, la introducción de elementos "extraños" a la teoría ([1]). En este trabajo renunciamos a dar a priori un significado físico a las posibles métricas sobre  $M$  compatibles con la estructura conforme  $\mathcal{L}$ , y adoptamos  $\mathcal{L}$  como la estructura básica con significado físico intrínseco sobre el espacio-tiempo. En el siguiente capítulo retomaremos la discusión (véase 3.1) sobre la relevancia física de la conexión de Levi-Civita correspondiente a una métrica compatible con  $\mathcal{L}$ .

El presente capítulo estudia la estructura conforme  $\mathcal{L}$  y su relación con las cuestiones de causalidad. En § 2.2 se define la estructura conforme sobre una variedad y lo que entendemos por espacio-tiempo conforme (ETC) (definición 2.1); también se establece la existencia de métricas lorentzianas globales compatibles con la estructura conforme (lema 2.1) y la posibilidad de "trasplantar" dicha estructura a cualquier variedad recubridora (lema 2.2). En § 2.3 se define una orientación causal infinitesimal (OCI) sobre una variedad (definición 2.2); se define la orientabilidad-tiempo para un ETC (definición 2.3) y se establece el resultado de que un ETC orientado-tiempo queda automáticamente dotado de una OCI (lema 2.5); se comenta la llamada "condición de causalidad"; se introducen los conceptos de difeomorfismo causal (definición 2.4) y de campo causal (definición 2.5) y se establece el importante resultado de que el grupo de todos los difeomorfismos causales de un ETC orientado-tiempo posee estructura de grupo de Lie de dimensión menor o igual que quince (lema 2.6). En § 2.4 se consideran tres ejemplos de interés para este trabajo.

En lo sucesivo, utilizaremos la terminología de "variedad" para designar una variedad diferenciable ( $C^\infty$ ), Hausdorff, paracompacta y sin borde.

## 2.2. CONFORMALIDAD

### Definición 2.1

(a) Sea  $L$  un espacio vectorial real de dimensión finita. Una estructura lineal conforme sobre  $L$  es una clase de equivalencia  $C$  de formas bilineales simétricas no degeneradas sobre  $L$ , mediante la relación de equivalencia:  $b \sim b'$  si  $b' = ab$  para algún  $a$  (real)  $> 0$  (si bien en la definición dada por Segal ([2], pág. 37) se exige solamente que  $a \neq 0$ , para los casos que nos interesan no se pierde generalidad tomando  $a > 0$ ). Escribiremos  $[b] = [b']$ . Llamaremos al par  $(L, C)$  un espacio vectorial conforme. Si  $b \in C$  diremos que  $b$  induce la estructura conforme  $C$  y que  $b$  y  $C$  son compatibles.

(b) Sea  $M$  una variedad. Una estructura conforme  $\mathcal{L}$  sobre  $M$  es una asignación, para cada punto  $p \in M$ , de una estructura lineal conforme  $\mathcal{L}_p$  sobre  $T_p M$  con la condición de diferenciabilidad siguiente:

$$\forall p \in M, \exists \text{ entorno } U \text{ de } p \text{ y una estructura (semi) riemanniana ("(pseudo)métrica") } g, \text{ definida en } U, \text{ tales que } [g_q] = \mathcal{L}_q, \forall q \in U$$

Diremos que  $(M, \mathcal{L})$  es una variedad conforme y que  $g$  y  $\mathcal{L}$  son compatibles; escribiremos  $g \in \mathcal{L}|_U$ .

(c) En el caso en que  $M$  sea conexa y de dimensión 4, y de que las métricas  $g$  que intervienen en la definición del apartado (b) sean lorentzianas (esto es, de signatura  $(- + + +)$ ), se dirá que  $(M, \mathcal{L})$  es un espacio-tiempo conforme (ETC).

(d) Sean  $(M, \mathcal{L})$  un ETC,  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  y  $g$  una métrica lorentziana compatible con  $\mathcal{L}$  y cuyo dominio contenga a  $p$ . Diremos que  $v$  es

- de tipo tiempo (o temporal) si  $g(v, v) < 0$
- de tipo luz si  $v \neq 0$  y  $g(v, v) = 0$

• de tipo espacio (o espacial) si  $v=0$  ó  $g(v,v) > 0$

Estas definiciones (obviamente independientes de la  $g$  compatible con  $\mathcal{L}$  elegida) nos permiten clasificar los vectores de  $TM$  en tres conjuntos disjuntos: el de vectores temporales  $\mathcal{T}$ , el de vectores luz  $\mathcal{L}$  y el de vectores espaciales  $\mathcal{E}$ . Se verifica  $TM = \mathcal{T} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{E}$ .

Una curva  $C^\infty \gamma: \mathbb{R} \supset \Delta \longrightarrow M$ , se dice temporal (respectivamente luz, espacial) si se verifica  $\gamma_*(s) \in \mathcal{T}$  (respectivamente,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$ ),  $\forall s \in \Delta$ .

Un campo de vectores  $C^\infty, X: M \supset U \longrightarrow TM$ , se dice temporal (respectivamente, luz, espacial) si se verifica  $X(p) \in \mathcal{T}$  (respectivamente,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$ ),  $\forall p \in U$ .

Una subvariedad  $N$  de  $M$  se dice espacial si  $i_*(TN) \subset \mathcal{E}$ , con  $i$  la inclusión canónica.

Al conjunto  $\mathcal{L}_p := \mathcal{L} \cap T_p M$  le llamaremos cono de luz en  $p$ . Tanto  $\mathcal{L}_p$  como  $\mathcal{T}_p := \mathcal{T} \cap T_p M$  poseen dos componentes conexas ([3], ejercicio 1.1.9).

Destacamos los siguientes resultados sobre variedades conformes:

Lema 2.1.(a) Toda variedad dotada de una estructura semi-riemanniana  $(M, g)$  admite una estructura conforme.

(b) Toda variedad conforme  $(M, \mathcal{L})$  admite una estructura semi-riemanniana global  $g$  compatible con  $\mathcal{L}$ . Esta métrica es única salvo un factor  $f$ , con  $f$  una función  $C^\infty$  definida positiva.

Demostración: (a) se sigue inmediatamente considerando la estructura conforme compatible con  $g$ .

Para la demostración de (b), véase apéndice A.1.

Lo anterior muestra que los espacio-tiempos con métricas lorentzianas globales son los "mismos" como variedades **que** los ETC.

Del lema 2.1(b) se obtiene, análogamente al conocido resultado para variedades lorentzianas ([3], 8.2.2) el siguiente

Corolario. Un ETC admite siempre un campo de vectores  $C^\infty$  (no necesariamente temporal), global y sin ceros.

Otro resultado ([2], pág. 39), que permite obtener variedades conformes con idéntica estructura local pero con distinta topología global, y que se utilizará posteriormente, es el siguiente

Lema 2.2. Sea  $(M, \mathcal{L})$  una variedad conforme. Si  $\Phi: \tilde{M} \longrightarrow M$  es un recubridor de  $M$ , entonces  $(\tilde{M}, \Phi^*\mathcal{L})$  es una variedad conforme, siendo  $\Phi^*\mathcal{L} := [\Phi^*g]$  (con  $g$  una métrica global sobre  $M$  compatible con  $\mathcal{L}$ ).

### 2.3. CAUSALIDAD

La constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia físicos localmente inerciales pone un límite superior a la velocidad de propagación de las interacciones (cualesquiera que éstas sean) entre sucesos del espacio-tiempo. La consecuencia de ello es que la estructura conforme  $\mathfrak{L}$  sobre el espacio-tiempo gobierna también las relaciones de "causalidad" (esto es, las relaciones de orden parcial que expresan la posibilidad de que un suceso influya sobre otro) entre los puntos del mismo.

A continuación damos la definición general de orientación causal ([2], pág. 22-23); posteriormente nos centraremos en las orientaciones causales que provienen de ciertas estructuras conformes.

#### Definición 2.2

- (a) Sea  $L$  un espacio vectorial real de dimensión finita. Un cono convexo en  $L$  es un subconjunto (no vacío)  $F \subset L$ , tal que

$$v, w \in F \Rightarrow av + bw \in F, \quad \forall a, b \text{ (reales)} \geq 0$$

Consideremos  $L$  como variedad afín. El cono  $F$  se dirá  $C^\infty$  si existe un conjunto finito  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$  de funciones  $C^\infty$  sobre  $L$ , tal que  $v \in F$  sii  $\Phi_i(v) \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

El cono se dirá trivial si  $F=L$  ó  $F=\{0\}$ .

- (b) Sea  $M$  una variedad diferenciable  $C^\infty$ . Una orientación causal infinitesimal (OCI)  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  es una asignación, para cada punto  $p \in M$ , de un cono convexo  $\mathcal{F}_p$  no trivial en  $T_p M$  de forma que

$$\begin{aligned} \forall p \in M, \exists \text{ entorno } U \text{ de } p \text{ y } n \text{ funciones} \\ \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \text{ } C^\infty \text{ sobre } TU, \text{ tal que } v \in \mathcal{F}_q \\ \text{(con } q \in U) \text{ sii } \Phi_i(q, v) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Diremos que  $(M, \mathcal{F})$  es una variedad causal.

Nótese que un cono  $C^\infty$  convexo  $F$  en  $L$  define una OCI sobre el propio  $L$ , considerado como variedad, definiendo  $\forall v \in L, \mathcal{F}_v = \{w \in L: w - v \in F\}$ .

Lema 2.3. Una variedad admite una OCI sii admite un campo de vectores  $C^\infty$ , global y sin ceros.

Demostración: Véase [2], escolio 2.1, pág. 26.

Este resultado, junto con el corolario al lema 2.1, nos dice que un ETC admite siempre una OCI; pero ésta no guarda en general relación con la estructura conforme. Sabemos que, en un ETC  $(M, \mathcal{L})$  (conexo), el conjunto  $\mathcal{L} \subset TM$  (véase definición 2.1) constituye una subvariedad abierta con una o dos componentes conexas ([3], proposición 1.2.1); veamos ahora que, en el caso de que  $\mathcal{L}$  posea dos componentes conexas se puede definir una OCI sobre  $M$  "compatible" con  $\mathcal{L}$ .

Definición 2.3

- (a) Un ETC  $(M, \mathcal{L})$  se dice orientable-tiempo si  $\mathcal{L}$  tiene dos componentes conexas. Si designamos una de ellas como el futuro  $\mathcal{L}^+$  (y la otra como el pasado  $\mathcal{L}^-$ ), obtenemos una orientación temporal para el ETC y éste se dirá orientado-tiempo.
- (b) Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Un vector temporal  $v \in \mathcal{L}_p$  (con  $p \in M$ ) se dirá temporal-futuro (resp., temporal-pasado) si  $v \in \mathcal{L}_p^+ := \mathcal{L}^+ \cap T_p M$  (resp.,  $v \in \mathcal{L}_p^- := \mathcal{L}^- \cap T_p M$ ). Dado  $v \in \mathcal{L}_p^+$ , cualquier vector  $w$  temporal-futuro (resp., temporal-pasado) en  $p$  verifica  $g(v, w) < 0$  (resp.,  $g(v, w) > 0$ ), con  $g$  compatible con  $\mathcal{L}$ ; por otra parte, cualquier vector  $u$  de tipo luz en  $p$  verifica  $g(v, u) < 0$  ó bien  $g(v, u) > 0$ . Un vector luz  $u \in \mathcal{L}_p$  se dirá luz-futuro (resp., luz-pasado) si se verifica  $g(v, u) < 0$  (resp.,  $g(v, u) > 0$ ),  $\forall v \in \mathcal{L}_p^+$  ([3], 1.1.9). El conjunto  $\mathcal{L}_p^+$  de vectores luz-futuro en  $p$  verifica  $\overline{\mathcal{L}_p^+} = \mathcal{L}_p^+ \cup \{0\} \cup \mathcal{L}_p^+$ , y análogamente para el conjunto  $\mathcal{L}_p^-$  de vectores luz-pasado. Los anteriores conceptos se aplican en la forma obvia a campos de vectores y a curvas.

Lema 2.4

- (a) Un ETC es orientable-tiempo sii admite un campo de vectores

$C^\infty$ , global y temporal. Elegida una orientación temporal dicho campo es necesariamente futuro en todo punto o pasado en todo punto.

(b) Todo ETC simplemente conexo es orientable-tiempo.

Demostración: Véase [4], pág. 17-19.

Lema 2.5. Sea  $(M, \xi)$  un ETC orientado-tiempo. Entonces la asignación  $p \mapsto \overline{\mathcal{F}}_p^+$  es una OCI sobre  $M$ .

Demostración: Sea  $g$  una métrica lorentziana global compatible con  $\xi$  (véase lema 2.1) y sea  $X$  un campo global y temporal-futuro (véase lema 2.4), esto es,  $X(p) \in \mathcal{F}_p^+$ ,  $\forall p \in M$ .

Si definimos funciones  $\Phi_i: TM \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i=1,2$ ) tales que

$$\forall p \in M, v \in T_p M, \Phi_1(v) := -g(v, X(p)), \Phi_2(v) := -g(v, v)$$

se obtiene una OCI  $\mathcal{F}$ , en la que el cono convexo no trivial  $\mathcal{F}_p$  viene dado por aquellos vectores de  $T_p M$  que verifican  $g(v, X(p)) \leq 0$ ,  $g(v, v) \leq 0$ ; pero éstos son precisamente los vectores del conjunto  $\overline{\mathcal{F}}_p^+$ , ya que  $\mathcal{F}_p^+$  viene definido por las desigualdades  $g(v, X(p)) < 0$ ,  $g(v, v) < 0$ .

Lo anterior nos muestra que, en un ETC orientado-tiempo, la estructura conforme induce directamente una OCI. Pero la orientabilidad-tiempo no sólo es matemáticamente conveniente; responde también a nuestra intuición física, basada por ejemplo en el conocimiento que tenemos de los procesos termodinámicos (crecimiento de la entropía) aquí en la Tierra y ahora, que hace razonable suponer la existencia de un campo de flechas temporales definidas en todos los puntos del espacio-tiempo.

La existencia sobre un ETC de una OCI compatible con la estructura conforme (garantizada, como hemos visto, por la orientabilidad-tiempo y que determina el conjunto de vectores no espaciales que apuntan hacia el futuro, únicos admisibles como tangentes a las trayectorias de las partículas físicas que se mueven en dicho ETC) no es la única condición que razonablemente puede imponerse a la estructura conforme. En este sentido resulta habitual suponer que se verifica la lla-

mada condición de causalidad, consistente en la no existencia de curvas no espaciales futuras cerradas (respondiendo a la idea de que ningún suceso puede ser "causa de sí mismo"). Otras exigencias más restrictivas (por ejemplo la "causalidad fuerte" y la "causalidad estable") no serán discutidas aquí (véase a este respecto [3], §8.3; [6], capítulo 6; y [7], pág. 217-255); mencionaremos simplemente la llamada condición de hiperbolicidad global, equivalente a la existencia de superficies de Cauchy, y que implica, además de la condición de causalidad, el que la variedad espacio-tiempo sea homeomorfa a  $\mathbb{R} \times S$  (siendo  $S$  una superficie de Cauchy); los modelos cosmológicos, tanto los clásicos como el de Segal, verifican la condición de hiperbolicidad global.

Los difeomorfismos relevantes entre variedades causales son los análogos de las isometrías en el caso métrico, esto es, aquellos que respetan la estructura causal.

#### Definición 2.4

- (a) Sean  $(M, \mathcal{F})$  y  $(M', \mathcal{F}')$  variedades causales. Un difeomorfismo  $\Phi: M \rightarrow M'$  se dice causal si se verifica

$$\forall p \in M', \mathcal{F}'_p = \Phi_* \mathcal{F}_{\Phi^{-1}(p)}$$

En el caso de que las OCI  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  vengan inducidas por sendas estructuras conformes  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}'$ , es claro que el difeomorfismo  $\Phi$  será causal si verifica

$$\forall g \in \mathcal{V}', \Phi^* g \in \mathcal{V} \text{ y conserva la orientación tiempo.}$$

- (b) Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad causal. Se define el grupo causal de  $(M, \mathcal{F})$  como el grupo de todos los difeomorfismos causales de  $(M, \mathcal{F})$  en sí misma.

Lema 2.6. Sea  $(M, \mathcal{V})$  un ETC orientado-tiempo. Entonces su grupo causal es un grupo de Lie de dimensión menor o igual que 15.

Demostración: Véase [5], ejemplo I.2.6 y teorema I.5.1.

Es claro que si dos ETC orientados-tiempo son difeomorfos causales, sus grupos causales son isomorfos como grupos de Lie.

En analogía con los campos de Killing en el caso métrico, se tiene la siguiente

Definición 2.5. Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad causal. Un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  se dice causal si el grupo local a un parámetro de difeomorfismos locales generado por  $X$  es causal. En el caso de que la OCI venga inducida por una estructura conforme  $\mathcal{L}$ , es claro que el campo  $X$  será causal si verifica

$$\forall g \in \mathcal{L} \text{ con } \text{Dom } X \cap \text{Dom } g \text{ no vacío, } L_X g = \sigma g$$

(siendo  $\sigma$  cierta función  $C^\infty$  definida en la intersección de los dominios de  $X$  y  $g$ );

el número máximo de campos causales  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes sobre cualquier abierto de  $M$  será menor o igual que 15 (véase lema 2.6).

Mencionaremos, por último, el siguiente resultado ([2], pág. 26 y 39) sobre la posibilidad de obtener variedades causales (en particular ETC's orientados-tiempo) con idéntica estructura local, pero con distinta topología global.

Lema 2.7. Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad causal; si  $\Phi: \tilde{M} \longrightarrow M$  es un recubridor de  $M$ , entonces  $\tilde{M}$  admite una OCI  $\tilde{\mathcal{F}}$ , definida de manera que los difeomorfismos locales inducidos por  $\Phi$  sean localmente causales. En particular: sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo; si  $\Phi: \tilde{M} \longrightarrow M$  es un recubridor de  $M$ , el ETC  $(\tilde{M}, \Phi^* \mathcal{L})$  (véase lema 2.2) es orientado-tiempo.

## 2.4. EJEMPLOS

Ejemplo 2.1. Dada cualquier variedad conexa de dimensión cuatro y con métrica lorentziana, se obtiene (lema 2.1.a) un ETC sin más que considerar la estructura conforme asociada a dicha métrica.

El espacio de Minkowski modela el espacio-tiempo en la Relatividad especial. Su variedad de base es  $\mathbb{R}^4$  y la métrica es  $\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$  (siendo  $x^0, x^1, x^2, x^3$  las funciones coordenadas usuales en  $\mathbb{R}^4$ ).

Denotamos por  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  el ETC asociado. El campo global  $\partial/\partial x^0$  es un campo de vectores temporal, con lo que  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  es orientable-tiempo; si declaramos a  $\partial/\partial x^0$  "futuro",  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  queda orientado-tiempo, siendo entonces  $\mathcal{C}_p^+ = \{v \in T_p \mathbb{R}^4 : \eta(v, \partial/\partial x^0) < 0 \text{ y } \eta(v, v) < 0\}, \forall p$ .  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  verifica además la condición de causalidad y es globalmente hiperbólico.

El número de campos causales linealmente independientes es 15, el máximo número permisible, pero cuatro de ellos no son completos; en efecto, es inmediato ver que los cuatro campos  $X_0 := \chi^2 \partial/\partial x^0 - 2x^0 S$  y  $X_i := \chi^2 \partial/\partial x^i + 2x^i S$  ( $i=1,2,3$ ), con  $\chi^2 \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$  y  $S \equiv \sum_{\nu=0}^3 x^\nu \partial/\partial x^\nu$ , son campos causales (verifican  $L_{X_\nu} \eta = 4x^\nu \eta, \nu=0,1,2,3$ ), y sin embargo sus curvas integrales no están definidas sobre todo  $\mathbb{R}$ , por lo que no generan difeomorfismos globales de  $\mathbb{R}^4$  en  $\mathbb{R}^4$ , esto es, no generan elementos del grupo causal de  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$ . De hecho, el grupo causal de  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  es de 11 dimensiones ([8]), de las que diez corresponden a las isometrías de  $\eta$  (grupo de Poincaré o de Lorentz-inhomogéneo) y la restante a la transformación de escalas generada por el campo (completo)  $S$ ; resulta notable el que dicho grupo causal actúe afínmente sobre  $\mathbb{R}^4$  ([8]).

Ejemplo 2.2.  $S^1 \times S^3$ , con  $S^1 := \{(u_{-1}, u_0) \in \mathbb{R}^2 : u_{-1}^2 + u_0^2 = 1\}$  y  $S^3 := \{(u_1, u_2,$

$u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$  (en coordenadas usuales para  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^4$  respectivamente), es una variedad conexa de dimensión cuatro. Si denotamos por  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{h}$  las respectivas estructuras riemanianas estándar definidas sobre las esferas  $S^1$  y  $S^3$  (sendas restricciones de las métricas euclídeas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^4$ ), entonces  $g := -\mathbf{l} \oplus \mathbf{h}$  es una métrica lorentziana sobre  $S^1 \times S^3$ . Con la estructura conforme  $[g]$ , asociada a  $g$ , obtenemos el ETC  $(S^1 \times S^3, [g])$ .

Sea  $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$  con  $\alpha(s) = (\cos s, \sin s)$ .  $\alpha_* s (:= \alpha_*(d/dt|_s))$  define un campo de vectores sobre  $S^1$ . Denotemos por  $X$  al campo de vectores sobre  $S^1 \times S^3$  definido como  $X(\alpha(s), p) = (\alpha_* s, 0_p) \in T_{(\alpha(s), p)}(S^1 \times S^3)$ , con  $0_p$  el vector cero en  $T_p S^3$ .  $X$  es un campo temporal global (se comprueba fácilmente que  $g(X, X) = -1$ ), al que declaramos "futuro", quedando  $S^1 \times S^3$  orientado-tiempo.

Este ETC no verifica la condición de causalidad pues, por ejemplo, la curva  $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^3$ ,  $\gamma(s) = (\alpha(s), p)$ , con  $p \in S^3$  fijo, es una curva temporal cerrada. En cambio, su recubridor universal  $\mathbb{R} \times S^3$ ,  $\Psi: \mathbb{R} \times S^3 \longrightarrow S^1 \times S^3$ ,  $\Psi(s, p) = (\alpha(s), p)$ , con la estructura conforme heredada,  $[\Psi^*g]$  ( $\Psi^*g = -dt \otimes dt \oplus \mathbf{h}$ , siendo  $t$  la carta identidad sobre  $\mathbb{R}$ ), resulta orientado-tiempo, verifica la condición de causalidad y es globalmente hiperbólico.

En lo sucesivo denotaremos indistintamente  $dt \otimes dt$  por  $dt^2$ .

Ejemplo 2.3. Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\underline{G}$  su álgebra de Lie de campos invariantes por la izquierda. Sea  $F \subset \underline{G}$  un cono  $C^\infty$  convexo; no trivial, en  $\underline{G}$ . Obtenemos una OCI,  $\mathcal{F}$ , sobre  $G$ , definiendo  $\mathcal{F}_p := \{v \in T_p M : v = X(p), \text{ con } X \in F\}$ .  $(G, \mathcal{F})$  es una variedad causal que, en general, no es definible vía una estructura conforme. Si  $F \subset \underline{G}$  está compuesto de campos invariantes también por la derecha, la OCI  $\mathcal{F}$  se dice invariante (véase [2], [11]).

Sea  $GL(2, \mathbb{C})$  el grupo general lineal complejo de matrices  $2 \times 2$ ,  $\underline{GL(2, \mathbb{C})}$  su álgebra de Lie asociada.  $U(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : A^{-1} = A^+\}$  es el grupo de matrices unitarias  $2 \times 2$ , su álgebra de Lie es  $\underline{U(2)} = \{A \in \underline{GL(2, \mathbb{C})} : A + A^+ = 0\}$  que es isomorfa a  $H(2)$ , el álgebra de Lie de las matrices hermíticas  $2 \times 2$ , vía la aplicación  $A \mapsto iA$ .

Definimos  $F := \{A \in H(2) : \det A \geq 0 \text{ y } \operatorname{tr} A \geq 0\}$ . Se comprueba fácilmente que  $F$  es un cono  $C^\infty$  convexo, con lo que  $(U(2), \mathcal{F})$  es una variedad causal. Dado que  $F$  es invariante bajo la representación adjunta de  $U(2)$ , la OCI  $\mathcal{F}$  es invariante.

### CAPITULO 3

#### OBSERVADORES Y SISTEMAS DE REFERENCIA

##### 3.1. INTRODUCCION

A la hora de contrastar una teoría cosmológica con los datos observacionales es de fundamental importancia precisar las nociones de observador y sistema de referencia. Dichas nociones cobran aún mayor relevancia en el presente trabajo, en el que son los sistemas de referencia los que imponen sus concepciones métricas al espacio-tiempo, respetando la estructura conforme.

Retomando la discusión abordada en §2.1, en el presente capítulo veremos cómo un sistema de referencia  $Q$  (campo de vectores temporal futuro, véase definición 3.2), con dominio un abierto  $U \subset M$ , identifica una única  $g \in \mathcal{G}|_U$  vía la condición de que los parámetros ("tiempos propios") asociados a las curvas integrales de  $Q$  (las cuales satisfacen ecuaciones diferenciales de primer orden) vengan dados por las longitudes de arco dadas sobre dichas curvas por  $g$  (véase lema 3.4). Esta métrica, que denotaremos por  $g^Q$ , representa la "metrización" que el sistema de referencia  $Q$  realiza sobre la región del espacio-tiempo en que está definido, y la correspondiente conexión de Levi-Civita da la ley de transporte de vectores que elige  $Q$ . Dicha conexión no tendrá por qué coincidir con la conexión de Weyl,  $\nabla^W|_U$  (caso de que postulemos que la dinámica del espacio-tiempo venga gobernada por una conexión de tal tipo):

- i) Para que ésto sucediera, se debería satisfacer la condición de compatibilidad  $\nabla^W|_U g^Q = 0$ , lo que implicaría, entre otras cosas, que los "tiempos propios" asociados a las trayectorias de las partículas en caída libre (las cuales satisfacen ecuaciones diferenciales de segundo orden) en  $U$

serían proporcionales a las longitudes de arco dadas sobre dichas trayectorias por  $g^Q$ .

- ii) Aun en el caso en que  $Q$  fuese un campo geodésico para  $\nabla^W$ , y  $g^Q$  verificase por tanto trivialmente dicha condición para las geodésicas de  $\nabla^W|_U$  que son curvas integrales de  $Q$ , no tendría en general por qué cumplirla para las restantes geodésicas de  $\nabla^W|_U$ .
- iii) En el caso en que  $Q$  sea geodésico para  $\nabla^W$ , si además  $Q$  es "sincronizable a tiempo propio" (definición 3.4), hemos demostrado (lema 3.7) que se tienen condiciones suficientes para garantizar que  $\nabla^W$  coincide con la conexión de Levi-Civita asociada a  $g^Q$  en el dominio de  $Q$ .

Añadamos, por otra parte, que en el tratamiento que nos ocupa no postularemos una dinámica basada en la conexión de Weyl, ya que tan sólo estamos interesados en estudiar los fenómenos relativos al desplazamiento al rojo cosmológico. Bastará postular la existencia de un sistema de referencia factorizador (véase definición 3.5) global (el "sistema acompañante"\* en los modelos cosmológicos estándar) cuyas curvas integrales representen las líneas de universo de la materia en promedio con la parametrización dada por la marcha de un reloj físico que siga tales trayectorias (esto es, con la parametrización obtenida al elegir un determinado proceso físico fácilmente reproducible a lo largo de dichas trayectorias). En caso de existir una conexión de Weyl que rigiera la dinámica del espacio-tiempo, el sistema de referencia factorizador postulado  $Q$  debería ser (por coherencia del modelo) un campo geodésico de dicha conexión  $\nabla^W$  y, por lo dicho antes y dado que un sistema de referencia factorizador es sincronizable a tiempo propio,  $\nabla^W$  sería la conexión de Levi-Civita correspondiente a  $g^Q$ .

En el presente capítulo precisaremos los conceptos relativos a observadores y sistemas de referencia (SR) y analizaremos algunos ejemplos que son cosmológicamente relevantes. En §3.2 se definen

---

\* del inglés 'comoving frame'

observadores (definición 3.1) y sistemas de referencia (SR) (definición 3.2); se establece la existencia de SR globales en un ETC orientado-tiempo; se definen para los SR los conceptos de sincronizabilidad (definición 3.3) y sincronizabilidad a tiempo propio (definición 3.4), con los consiguientes lemas que establecen las propiedades que cada uno posee (lemas 3.2 y 3.3); el lema 3.4 establece la existencia de una única métrica "asociada" a un sistema de referencia; en el lema 3.5 se da una caracterización métrica de los SR sincronizables a tiempo propio y en el lema 3.6 se demuestra que un SR sincronizable a tiempo propio es geodésico para la conexión métrica que induce. En el lema 3.7 se demuestra (como se anunciaba arriba) que la existencia de un SR sincronizable a tiempo propio y geodésico para una conexión de Weyl hace que ésta coincida con la conexión métrica inducida por dicho SR. A continuación se definen los SR factorizadores de su dominio (definición 3.5) y se dan sus propiedades (lema 3.8). En §3.3 se introducen los conceptos de homogeneidad temporal y espacial e isotropía espacial para factorizadores (definición 3.6) y se demuestra que un SR factorizador y homogéneo temporal es "paralelo" para la conexión métrica que induce (lema 3.9). En §3.4 se ofrecen tres ejemplos del tratamiento desarrollado en este capítulo.

### 3.2. OBSERVADORES Y SISTEMAS DE REFERENCIA

Un observador es básicamente un individuo que identifica los sucesos de su historia con la hora que marca su reloj; inevitablemente un observador "se mueve" en el espacio-tiempo hacia el futuro. La representación matemática más simple de un observador es la dada por una curva temporal futura, cuya trayectoria representa toda su historia y cuyo parámetro representa la noción de tiempo que posee.

Definición 3.1. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Un observador en  $M$  es una curva temporal futura  $\gamma: R \supset \Delta \longrightarrow M$ , cuya parametrización define el tiempo propio del observador.

Cualquier reparametrización de la curva  $\gamma$  representa un cambio en la forma de medir el tiempo por parte del individuo que observa y, en definitiva, un cambio de observador; si un individuo elige un determinado proceso físico fácilmente reproducible a lo largo de su trayectoria en el espacio-tiempo (por ejemplo una determinada transición atómica en un fragmento de materia que lleva consigo) como reloj, está parametrizando unívocamente su trayectoria y definiendo con ello un observador  $\gamma$ .

Un observador sólo puede, en rigor, registrar sucesos que tienen lugar sobre su trayectoria espacio-temporal. Para obtener información de otros sucesos precisa de la cooperación de otros observadores que, junto con él, proporcionen un sistema de referencia.

Definición 3.2. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Un sistema de referencia (SR) en  $M$  es un campo de vectores  $Q$  temporal futuro definido en un abierto  $U \subset M$ . Cada curva integral de  $Q$  se dirá un observador de  $Q$ . El SR se dirá global si  $U=M$ ; en otro caso se dirá local.

Un corolario del lema 2.4 es el siguiente

Lema 3.1. Un ETC orientado-tiempo admite un SR global.

Para que un sistema de referencia  $Q$  sea operativo debe poder ofre-

cer una noción de "simultaneidad". Ello exige que la región  $U$  del espacio-tiempo en la que  $Q$  está definido admita una foliación por subvariedades 3-dimensionales, espaciales y ortogonales a todos los observadores de  $Q$ , de tal manera que resulte posible parametrizar las hojas de foliación como "superficies de nivel" de una cierta función tiempo  $t$  definida en  $U$ ; en tal caso,  $Q$  se dirá sincronizable. Puede ocurrir que la función tiempo coincida, sobre cada observador de  $Q$ , con el tiempo propio de dicho observador; en tal caso  $Q$  se dirá sincronizable a tiempo propio. En general, no se dará tal coincidencia; no obstante los observadores de  $Q$  dispondrán de una fórmula explícita que les permitirá calcular, a partir de las lecturas de sus respectivos relojes (y suponiendo que hubieran ajustado la hora de éstos a un valor estándar sobre una cierta superficie de simultaneidad), cuál es la superficie de simultaneidad que en cada momento van "atravesando". Precisamos las definiciones a continuación.

Definición 3.3. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Un SR  $Q$  con dominio  $U \subset M$  se dice sincronizable si, dada  $g \in \mathcal{L}|_U$ , podemos encontrar funciones  $h, t$  sobre  $U$ , con  $h > 0$  y tales que se verifique  $g(Q, \cdot) = -h dt$ . Llamaremos a  $t$  función-tiempo para  $Q$ .

Nótese que si se cumple la condición de sincronizabilidad para una  $g \in \mathcal{L}|_U$ , se cumplirá también para cualquier otra  $g' \in \mathcal{L}|_U$ . En efecto, puesto que  $g' = fg$ , con  $f$  una función positiva, se tendrá  $g'(Q, \cdot) = -h' dt$ , con  $h' = fh > 0$ .

El siguiente lema justifica la terminología empleada en esta definición.

Lema 3.2. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR con dominio  $U \subset M$  y sincronizable. Sea  $t$  una función-tiempo para  $Q$ . Entonces por cada punto  $m \in U$  pasa una única subvariedad 3-dimensional, ortogonal a  $Q$  (por tanto, espacial) y maximal en  $U$ . La subvariedad en cuestión corresponde a la hipersuperficie de nivel  $t = t(m)$ .

Demostración: Sea  $g \in \mathcal{L}|_U$  tal que  $g(Q, \cdot) = -hdt$ ; claramente se verifica (designando por  $\underline{Q}$  la 1-forma  $g(Q, \cdot)$ )  $\underline{Q} \wedge d\underline{Q} = 0$ . Pero entonces (teorema de Frobenius) la distribución 3-dimensional anulada por  $\underline{Q}$  (que no es otra que  $Q^\perp := \{v \in TU : g(Q, v) = 0\}$ ) es integrable y las subvariedades integrales maximales serán las buscadas.

Por otra parte, dado cualquier campo de vectores  $X$  tangente a una de estas subvariedades, se verifica

$$0 = \underline{Q}(X) = -hdt(X) = -hX(t) \Rightarrow X(t) = 0;$$

por tanto, las subvariedades en cuestión corresponden a las hipersuperficies de nivel de la función  $t$ .

Definición 3.4. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Un SR en  $M$  sincronizable,  $Q$ , se dice sincronizable a tiempo propio si existe alguna  $t$  función-tiempo para  $Q$  tal que  $Q(t) = 1$ . Llamaremos a  $t$  (que ahora será única salvo una constante aditiva) función-tiempo propio para  $Q$ .

Lema 3.3. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR en  $M$  sincronizable a tiempo propio, con  $t$  una función tiempo-propio para  $Q$ . Entonces  $t$  coincide sobre cada observador de  $Q$  con el tiempo propio de dicho observador (salvo una constante aditiva).

Demostración: Sean  $\gamma$  un observador de  $Q$  y  $\tau$  su tiempo propio asociado. Entonces se verifica

$$1 = Q(t) \circ \gamma \equiv (Q \circ \gamma)(t) = \gamma_* (t) = \frac{d(t \circ \gamma)}{d\tau} \Rightarrow t \circ \gamma = \tau + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Vamos a ver ahora cómo un SR arbitrario "metriza" unívocamente la región del ETC en la que está definido, de forma tal que el tiempo propio de cada uno de sus observadores coincida con la longitud de arco medida a lo largo de las correspondientes trayectorias.

Lema 3.4. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR con dominio  $U \subset M$ . Existe entonces una única métrica lorentziana  $g^Q \in \mathcal{L}|_U$  sobre  $U$  tal que  $g^Q(Q, Q) = -1$ .

Demostración: Sea  $g \in \mathcal{L}|_U$ ; se tendrá  $-g(Q,Q)=f$ , con  $f$  una cierta función positiva definida en  $U$ . Entonces la métrica  $g^Q$  buscada será  $\frac{1}{f} g$ .  
La unicidad de  $g^Q$  es clara.

Nótese que si  $\gamma : \Delta \longrightarrow M$  es un observador de  $Q$ , dados  $t_0, t_1 \in \Delta$ , la longitud de arco entre  $t_0$  y  $t_1$   $(:= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-g(\dot{\gamma}_*, \dot{\gamma}_*)} dt)$  coincide con el tiempo propio transcurrido  $(t_1 - t_0)$ .

Lema 3.5. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR con dominio  $U \subset M$ . Entonces  $Q$  es sincronizable a tiempo propio si existe una función  $t$  sobre  $U$  tal que  $g^Q(Q, \cdot) = -dt$ .

Demostración:

La condición es necesaria. En efecto: sea  $g \in \mathcal{L}|_U$  y sea  $t$  la función tal que  $g(Q, \cdot) = -h dt$  y  $Q(t) = 1$  (véase definición 3.4); entonces se tendrá  $g^Q(Q, \cdot) = -fh dt$  (siendo  $f > 0$  tal que  $g^Q = fg$ ); pero en tal caso se verificará

$$-1 = g^Q(Q, Q) = -fhQ(t) = -fh \Rightarrow g^Q(Q, \cdot) = -dt.$$

La condición es suficiente. En efecto, si  $g^Q(Q, \cdot) = -dt$ , es claro que  $Q$  es sincronizable, y se tendrá

$$Q(t) = -g^Q(Q, Q) = 1.$$

A continuación deducimos algunas propiedades de los SR en relación con las conexiones métricas asociadas a éstos. Sea  $Q$  un SR, denotaremos por  $\nabla^Q$  a la conexión de Levi-Civita correspondiente a  $g^Q$ . En primer lugar nótese que la condición  $g^Q(Q, Q) = \text{constante}$  es necesaria pero no suficiente para que  $Q$  sea un campo geodésico de  $\nabla^Q$ . Una de las propiedades de un SR sincronizable a tiempo propio es ser geodésico de la conexión métrica que induce:

Lema 3.6. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR en  $M$  sincronizable a tiempo propio. Entonces  $\nabla^Q Q = 0$ .

Demostración: Sea  $U \subset M$  el dominio de  $Q$ .  $\nabla^Q$  es, por definición,

la única conexión lineal definida en  $U$ , simétrica y compatible con  $g^Q$ . Se deduce, pues, que

$$\begin{aligned} g^Q(\nabla_Q^Q Q, X) &= Q(g^Q(Q, X)) - g^Q(Q, \nabla_Q^Q X) = \\ &= Q(g^Q(Q, X)) - g^Q(Q, \nabla_X^Q Q) - g^Q(Q, [Q, X]) = \\ &= Q(g^Q(Q, X) - \frac{1}{2}X(g^Q(Q, Q))) - g^Q(Q, [Q, X]) \end{aligned}$$

para todo campo  $X$  definido sobre  $U$ .

Por hipótesis  $g^Q(Q, Q) = -1$  y  $g^Q(Q, \cdot) = -dt$  (lema 3.5), luego  $g^Q(\nabla_Q^Q Q, X) = -Q(Xt) + [Q, X]t = -X(Qt) = 0$ , para todo campo  $X$  sobre  $U$ . Concluimos que  $\nabla_Q^Q Q = 0$ .

Retomamos ahora la discusión de §3.1 relativa a las propiedades de la llamada conexión de Weyl  $\nabla^W$  sobre  $(M, \mathcal{L})$ , en la hipótesis de que una tal conexión diera la dinámica sobre el espacio-tiempo (véase §2.1). Aunque el análisis del desplazamiento al rojo cosmológico no precisa en absoluto (véase capítulo 4) un análisis basado en la conexión de Weyl, el siguiente lema (marginal por tanto, en nuestro trabajo) cierra la discusión en torno a dicha conexión, al mostrar que, si existe un SR sincronizable a tiempo propio y geodésico para  $\nabla^W$ , entonces  $\nabla^W$  coincide con la conexión métrica inducida por dicho SR.

Lema 3.7. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y  $\nabla^W$  una conexión de Weyl en  $(M, \mathcal{L})$ . Sea  $Q$  un SR con dominio  $U \subset M$ , sincronizable a tiempo propio y geodésico de  $\nabla^W$ . Entonces la conexión  $\nabla^W$  coincide (sobre  $U$ ) con la conexión de Levi-Civita  $\nabla^Q$  asociada a  $g^Q$ .

En lo que sigue usaremos letras griegas para los índices que toman los valores 0, 1, 2 ó 3, letras latinas para los índices que toman los valores 1, 2 ó 3, y aceptaremos el convenio de Einstein sobre sumatorios implícitos cuando hay índices repetidos.

Demostración: Si  $Q$  es un SR sincronizable a tiempo propio, se sigue (teorema de Frobenius) que para todo  $p \in U$  existe una carta  $(V, x^\alpha)$  en torno a  $p$  tal que  $\partial/\partial x^0 = Q|_V$  y  $Q|_V(\partial/\partial x^i) = 0 \ \forall i$  (siendo  $Q := g^Q(Q, \cdot)$ ).

Tenemos que  $g^Q|_V = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta = -dx^0 \otimes dx^0 + g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , esto es  $g_{00} = -1$ ,  $g_{0i} = 0$ , y necesariamente  $g^{00} = -1$ ,  $g^{0i} = 0$ ,  $\forall i$  (definiendo  $g^{\alpha\beta}$  por la condición  $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ ,  $\forall \alpha, \gamma$ ).

La relación que existe entre una conexión de Weyl y una conexión métrica compatible con  $\mathcal{L}$  (en particular,  $\nabla^Q$ ) expresada en cualquier carta es ([1], pág. 32):

$$\overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \delta_\beta^\alpha f_\gamma + \delta_\gamma^\alpha f_\beta - g^{\alpha\lambda} g_{\beta\gamma} f_\lambda, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma,$$

con  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ ,  $\overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  los símbolos de Christoffel respectivos de las conexiones métrica y de Weyl, y  $f_\alpha$  ciertas funciones que dependen de la carta elegida.

En la carta  $(V, x^\alpha)$  las condiciones  $\nabla^Q Q = 0$  (véase lema 3.6) y  $\nabla^W Q = 0$  (por hipótesis) se expresan por  $\Gamma_{00}^\alpha = 0$  y  $\overline{\Gamma}_{00}^\alpha = 0$ ,  $\forall \alpha$ . Bajo dichas condiciones, la relación de arriba para  $\beta = \gamma = 0$  queda:

$$0 = \delta_0^\alpha f_0 + \delta_0^\alpha f_0 - g^{\alpha\lambda} g_{00} f_\lambda, \quad \forall \alpha.$$

Para  $\alpha = 0$ , obtenemos:

$$0 = 2f_0 + g^{0\lambda} f_\lambda = f_0.$$

Para  $\alpha = i$ , obtenemos:

$$0 = g^{i\lambda} f_\lambda = g^{ij} f_j, \quad \forall i$$

y, puesto que  $\det(g^{ij}) = -\det(g^{\alpha\beta}) \neq 0$ , necesariamente  $f_i = 0$ ,  $\forall i$ .

Se sigue que  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ , luego  $\nabla^Q|_V = \nabla^W|_V$ .

Trivialmente  $\nabla^Q = \nabla^W$ .

Ciertos sistemas de referencia sincronizables a tiempo propio "factorizan" su dominio de definición en parte temporal y parte espacial, respetando la estructura conforme, como precisamos en la siguiente

Definición 3.5. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Un SR sincronizable a tiempo propio  $Q$  con dominio  $U \subset M$  se dice un factorizador (SRF) de  $U$  si existe un difeomorfismo  $\Phi: \mathbb{T} \times S \rightarrow U$ , con  $\mathbb{T}$  un cierto intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $S$  una cierta variedad diferenciable 3-dimensional y tal que

- i) se verifica  $\Phi_* \partial_t = Q$ , siendo  $\partial_t(s, p) := (d/dt|_s, 0_p)$  con  $t$ , la carta identidad sobre  $\mathbb{T}$  y  $0_p$  el vector cero en  $T_p S$ ,  $\forall (s, p) \in \mathbb{T} \times S$ .

- ii) existen estructuras riemanianas  $l$  y  $h$  sobre  $T$  y  $S$  respectivamente, que hacen de  $\Phi$  un difeomorfismo causal entre  $(T \times S, [-l \oplus h])$  y  $(U, \mathcal{L}|_U)$ .

La definición de SRF se ajusta a la noción de "observador métrico" dada por Segal ([2]) y contiene a su vez la de "sistema acompañante" (comoving frame) de los modelos cosmológicos clásicos.

Las propiedades de los factorizadores se resumen en el siguiente

Lema 3.8. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SRF de  $U \subset M$ .

Con las notaciones de la definición 3.5, se tiene:

- (a)  $\Phi^* g^Q = -dt^2 \oplus fh$ , con  $f$  una cierta función definida positiva que depende exclusivamente del primer factor de  $T \times S$ . Por tanto,  $t \circ \Phi^{-1}$  es una función-tiempo propio para  $Q$ . (Notamos indistintamente a la carta identidad  $t$  y a la aplicación  $t \circ \pi_1$ , con  $\pi_1: T \times S \rightarrow T$ .)

- (b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) las traslaciones en  $T$ ,  $\alpha: T \times S \rightarrow T \times S$   
 $(t, s) \mapsto (t+a, s)$

son causales en  $(T \times S, [-l \oplus h])$ .

- ii) las traslaciones en  $T$  son isometrías de la métrica  $\Phi^* g^Q$

- iii) la función  $f$  del apartado (a) es constante.

Nota: Un SRF que verifique las afirmaciones de (b) se dirá que es un SRF homogéneo temporal (véase definición 3.6).

Demostración:

- (a) Es claro que verifica  $\Phi^* g^Q = \Omega(-l \oplus h) = \Omega \Psi(-dt^2 \oplus \frac{1}{\psi} h)$ , con  $\Omega$  (respectivamente  $\Psi$ ) una función positiva sobre  $T \times S$  (resp. sobre  $T$ ).

Ahora bien:  $-1 = g^Q(Q, Q) = g^Q(\Phi_* \partial_t, \Phi_* \partial_t) = (\Phi^* g^Q)(\partial_t, \partial_t) = -\Omega \psi$ ; por tanto,  $\Phi^* g^Q = -dt^2 \oplus fh$ , con  $f = 1/\psi$ .

- (b) Dado que  $L_{\partial_t}(\Phi^* g^Q) = L_{\partial_t}(-dt^2 \oplus fh) = 0 \oplus (\partial_t f) h$ , se tendrá:

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) En efecto: si para todo  $g \in [-1, \infty)$  existe una función  $\sigma_g$  tal que  $L_{\partial_t} g = \sigma_g g$ , se verificará en particular para  $g \equiv \Phi^* g^Q$ . Por lo dicho arriba,  $\sigma_g$  sólo puede valer cero; entonces  $L_{\partial_t} (\Phi^* g^Q) = 0$ .

Recíprocamente, si  $L_{\partial_t} (\Phi^* g^Q) = 0$ , se tendrá:

$$L_{\partial_t} g \equiv L_{\partial_t} (f' \Phi^* g^Q) = (\partial_t f') (\Phi^* g^Q) = \sigma_g g,$$

con  $\sigma_g = \frac{1}{f'} (\partial_t f')$ ,  $f' > 0$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) En efecto:

$$L_{\partial_t} (\Phi^* g^Q) = 0 \text{ si y sólo si } f \text{ es constante sobre } T.$$

El carácter factorizador de los "sistemas acompañantes" en los modelos cosmológicos clásicos surge de la sincronizabilidad a tiempo propio de dichos sistemas y de las hipótesis, apoyados en el llamado "Principio cosmológico" y en los datos observacionales (véase [3] y [10]) de homogeneidad e isotropía espaciales (véase 3.3).

### 3.3. HOMOGENEIDAD E ISOTROPIA

Los sistemas de referencia de mayor relevancia a nivel cosmológico son aquéllos cuya métrica asociada goza de mayor número de isometrías. Las definiciones que siguen clasifican los SRF atendiendo al número y tipo de isometrías.

Definición 3.6. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Sea  $Q$  un SRF de  $U$  (como en la definición 3.5).

- (a)  $Q$  es homogéneo temporal si se verifica cualquiera de las afirmaciones contenidas en el lema 3.8.(b).
- (b)  $Q$  es homogéneo espacial si  $(S, h)$  posee un grupo de isometrías transitivo de tres dimensiones.
- (c)  $Q$  es isótropo espacial alrededor de un punto  $s \in S$  si  $(S, h)$  posee un grupo de isometrías de tres dimensiones que dejan fijo a  $s$ .

Resaltemos que la isotropía espacial alrededor de cualquier punto implica la homogeneidad espacial y, viceversa, la homogeneidad espacial e isotropía alrededor de un punto implica la isotropía alrededor de cualquier otro punto ([10], §13.1). El resultado que sigue establece la correspondencia natural entre isometrías en  $(\mathcal{T}, l)$  o en  $(S, h)$  (relativos a cierto SRF) y difeomorfismos causales.

Lema 3.9. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SRF de  $U \subset M$ .

Con las notaciones de la definición 3.5, definamos

$$\begin{aligned} \chi: \text{Dif}(S) &\longrightarrow \text{Dif}(U) \\ a &\longmapsto \chi(a), \text{ con } \chi(a)\Phi(t, s) := \Phi(t, as) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } \xi: \text{Dif}(\mathcal{T}) &\longrightarrow \text{Dif}(U) \\ b &\longmapsto \xi(b), \text{ con } \xi(b)\Phi(t, s) := \Phi(bt, s) \end{aligned}$$

siendo  $\text{Dif}(\ )$  el conjunto de difeomorfismos de la variedad de la que se trate, en sí misma.

Entonces se tiene:

- (i)  $a$  es una isometría de  $(S, h)$  sii  $\chi(a)$  es causal en  $(U, \mathcal{L}|_U)$  sii  $\chi(a)$  es una isometría de  $(U, g^Q)$
- (ii)  $b$  es una isometría de  $(\mathcal{T}, l)$  sii  $\xi(b)$  es causal en

$(U, \mathcal{L}|_U)$  sii  $\xi(b)$  es una isometría de  $(U, g^Q)$ .

Demostración: Haremos sólo la demostración de (i); la de (ii) es análoga. Utilizamos que  $\Phi^*\mathcal{L} = [-1 \oplus h]$  y que  $(\chi(a) \circ \Phi) = \Phi \circ (\text{id} \times a)$

$$\begin{aligned} \chi(a)^*\mathcal{L} = \mathcal{L} &\Leftrightarrow (\chi(a) \circ \Phi)^*\mathcal{L} = [-1 \oplus h] \\ &\Leftrightarrow (\text{Id} \times a)^* [-1 \oplus h] = [-1 \oplus h] \\ &\Leftrightarrow a^*h = h \end{aligned}$$

lo que demuestra la primera equivalencia del apartado (i).

Por otro lado, de

$$\begin{aligned} -1 = g^Q(Q, Q) &= (\Phi^*g^Q)(\partial_t, \partial_t) \quad (\text{definición 3.5.(i)}) \\ &= [(\Phi \circ (\text{Id} \times a))^*g^Q](\partial_t, \partial_t) \quad ((\text{Id} \times a)_* \partial_t = \partial_t) \\ &= [\chi(a)^*g^Q](Q, Q) \end{aligned}$$

se sigue que  $\chi(a)^*g^Q \in \mathcal{L}|_U$  sii  $\chi(a)^*g^Q = g^Q$ , lo que demuestra la segunda equivalencia del apartado (i).

Se sigue del lema anterior que si un SRF está en las condiciones de la definición 3.6.(b) y (c), entonces la variedad métrica  $(U, g^Q)$  poseerá un grupo de isometrías de al menos seis dimensiones. Si además es homogéneo temporal, se sigue que dicha dimensionalidad será como mínimo siete. Por último, digamos que el número máximo de dimensiones del grupo de isometrías es diez ([10]).

En el lema 3.6 vimos que un SR  $Q$  sincronizable a tiempo propio es geodésico para  $\nabla^Q$ . El siguiente lema muestra que si  $Q$  es, además, factorizador y homogéneo temporal, entonces es paralelo para  $\nabla^Q$  (esto es,  $Q$  es transportado-paralelo a lo largo de cualquier curva en su dominio).

Lema 3.10. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SRF con dominio  $U \subset M$ , homogéneo temporal. Entonces  $\nabla_X^Q Q = 0$ , para todo campo  $X$  definido sobre  $U$ .

Demostración: Por ser  $Q$  un SRF se deduce directamente del lema 3.8.(a) que alrededor de cada punto de  $U$  existen coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  de tal forma que

$$\begin{aligned} g^Q &= -dx^0 \otimes dx^0 + f(x^0) h_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i \otimes dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \text{y } Q &\equiv \partial / \partial x^0. \end{aligned}$$

En dichas coordenadas, los coeficientes de la conexión métrica  $\nabla^Q$  son:

$$\Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0 \text{ con } \alpha = 0, 1, 2, 3$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \delta_j^i \dot{f}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \dot{f} h_{ij}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} (h_{jl,k} + h_{kl,j} - h_{jk,l}) \text{ con } i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Sea  $X$  un campo sobre  $U$ , en coordenadas  $X = X^\alpha \partial / \partial x^\alpha$ ,

$$\nabla_X^Q Q = X^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\beta \partial / \partial x^\beta = X^i \Gamma_{i0}^j \partial / \partial x^j = X^i \frac{\dot{f}}{2f} \delta_i^j \partial / \partial x^j = \frac{\dot{f}}{2f} X^i \partial / \partial x^i$$

Por ser  $Q$  homogéneo temporal,  $\dot{f} = 0$  (lema 3.8.(b)iii)), luego  $\nabla_X^Q Q = 0$ .

Por último, tengamos en cuenta antes de abordar los ejemplos que un difeomorfismo causal transforma un SR en otro SR con idénticas propiedades de sincronizabilidad y simetría:

Lema 3.11. Sean  $(M, \mathcal{L})$  y  $(M', \mathcal{L}')$  dos ETC orientados-tiempo, sea  $\Phi$  un difeomorfismo causal de  $M$  en  $M'$ , y sea  $Q$  un SR en  $M$ . Entonces  $\Phi_* Q$  es un SR en  $M'$  y cada una de las siguientes propiedades es cierta para  $\Phi_* Q$  si es cierta para  $Q$ :

- i) ser sincronizable
- ii) ser sincronizable a tiempo propio
- iii) ser factorizador
- iv) ser homogéneo temporal
- v) ser homogéneo espacial
- vi) ser isótropo espacial alrededor de un punto.

La demostración es una mera cuestión de cálculo. Diremos que dos sistemas de referencia  $Q, Q'$  en  $M$  son conjugados si existe un difeomorfismo causal  $\Phi$  tal que  $\Phi_* Q = Q'$ .

### 3.4. EJEMPLOS

Ejemplo 3.1. En el espacio-tiempo de Minkowski en su versión conforme  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  (véase ejemplo 2.1), el campo de vectores  $\partial/\partial x^0$  es un SR global, con  $g^{\partial/\partial x^0} = \eta$ , y sincronizable a tiempo propio, con función tiempo-propio la coordenada  $x^0$ . Este sistema de referencia es además factorizador y completo, vía  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\Phi(x^0, (x^1, x^2, x^3)) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , con  $l$  y  $h$  las estructuras riemánicas estándar sobre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^3$ . Posee las propiedades de homogeneidad temporal, y homogeneidad e isotropía espaciales. No se conocen otros factorizadores globales completos en  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  con las mismas propiedades de simetría que no sean conjugados (véase lema 3.11) a  $\partial/\partial x^0$  ([2], pág. 46). Llamaremos SR inerciales a los SR conjugados a  $\partial/\partial x^0$  mediante transformaciones del grupo de isometrías de  $\eta$  (grupo de Poincaré de dimensión 10).

Ejemplo 3.2. Sea  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  como en el ejemplo 2.2. Sea  $Q: \mathbb{R} \times S^3 \longrightarrow T(\mathbb{R} \times S^3)$  el campo de vectores tal que  $Q(s, p) = (d/dt|_s, 0_p) =: \partial_t(s, p)$ , con  $t$  la carta identidad sobre  $\mathbb{R}$ , y  $0_p$  el vector cero en  $T_p S^3$ . Es fácil verificar que  $Q$  es un SR global en  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  con  $g^Q = -dt^2 \oplus h$ ;  $Q$  es, pues, sincronizable a tiempo propio, con  $t$  como función tiempo-propio; aún más,  $Q$  es un factorizador completo, vía  $\Phi: \mathbb{R} \times S^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times S^3$  la aplicación identidad. Dado que  $\Phi^* g^Q = g^Q = -dt^2 \oplus h$ ,  $Q$  es homogéneo temporal. La homogeneidad e isotropía espacial de  $Q$  se sigue de que  $h$  es la métrica riemánica habitual sobre  $S^3$ ; la expresión de  $h$  en coordenadas angulares  $(\rho, \theta, \varphi)$  (dadas por  $u^1 = \sin \rho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $u^2 = \sin \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $u^3 = \sin \rho \cos \theta$ ,  $u^4 = \cos \rho$ , con  $(u^1, u^2, u^3, u^4)$  coordenadas usuales en  $\mathbb{R}^4$ , verificando  $u^1{}^2 + u^2{}^2 + u^3{}^2 + u^4{}^2 = 1$ ) es  $h = d\rho \otimes d\rho + \sin^2 \rho (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi)$ . No se conocen otros factorizadores globales completos en  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  con las

mismas propiedades de simetría que no sean conjugados (véase lema 3.11) a  $Q$  ([2], pág. 48).

Ejemplo 3.3. Consideremos el espacio-tiempo métrico, llamado "estático de Einstein",  $(M_1, g_1) = (\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$ . Sea el ETC orientado-tiempo  $(\mathcal{U}, [g_1] |_{\mathcal{U}})$ , con  $\mathcal{U} := \{(s, p) \in \mathbb{R} \times S^3 \mid -\pi/2 < s < \pi/2\}$ . Sea  $Q_1$  el campo de vectores sobre  $\mathcal{U}$  dado por  $(s, p) \mapsto \mapsto ((\cos s) \frac{d}{dt} \Big|_s, 0_p)$  ( $t$  designa, como siempre, la carta identidad sobre  $\mathbb{R}$ ); obviamente se tiene  $Q_1 = \cos t Q|_{\mathcal{U}}$  ( $Q$ , como en el ejemplo anterior) y  $g^{Q_1} = (\cos^2 t)^{-1} g^Q|_{\mathcal{U}}$ .  $Q_1$  es sincronizable a tiempo propio, con función tiempo-propio  $r \cdot p_1: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  (siendo  $p_1$  la proyección sobre el primer factor  $\mathcal{U} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  y  $r$  la aplicación  $(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \ln \operatorname{tg}(\frac{s}{2} + \frac{\pi}{4})$ ). Ahora bien, la aplicación  $\Phi_1: \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $(s, p) \mapsto (r^{-1}(s), p)$ , es un difeomorfismo causal, si consideramos la estructura conforme  $[-l \oplus h]$  sobre  $\mathbb{R} \times S^3$ , con  $l := (\cosh^2 t)^{-1} dt^2$  una estructura riemanniana sobre  $\mathbb{R}$  y  $h$  la métrica riemanniana habitual en  $S^3$ ; por otra parte se verifica  $\Phi_{1*} \partial_t = Q_1$ ; consecuentemente  $Q_1$  es un factorizador global completo de  $(\mathcal{U}, [-dt^2 \oplus h] |_{\mathcal{U}})$ . Dado que  $\Phi_1^* g^{Q_1} = -dt^2 \oplus (\cosh^2 t)h$ ,  $Q_1$  no es homogéneo temporal, aunque sí es homogéneo e isótropo espacial.  $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus (\cosh^2 t)h)$  es un espacio-tiempo métrico, llamado de de Sitter, cuyo grupo de isometrías es maximal, esto es, de 10 dimensiones ([6], pág. 124). En este sentido la aplicación  $\Phi_1$  nos da el difeomorfismo causal del espacio-tiempo de de Sitter sobre la región  $\mathcal{U}$  del espacio-tiempo estático de Einstein a que se hace referencia en ([6], pág. 127). Consideremos ahora el espacio-tiempo métrico de de Sitter  $(M_2, g_2) = (\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus (\cosh^2 t)h)$ . Definamos la siguiente región de  $M_2$  (con coordenadas  $(t, \rho, \theta, \varphi)$  sobre  $S^3$  como en el ejemplo anterior):

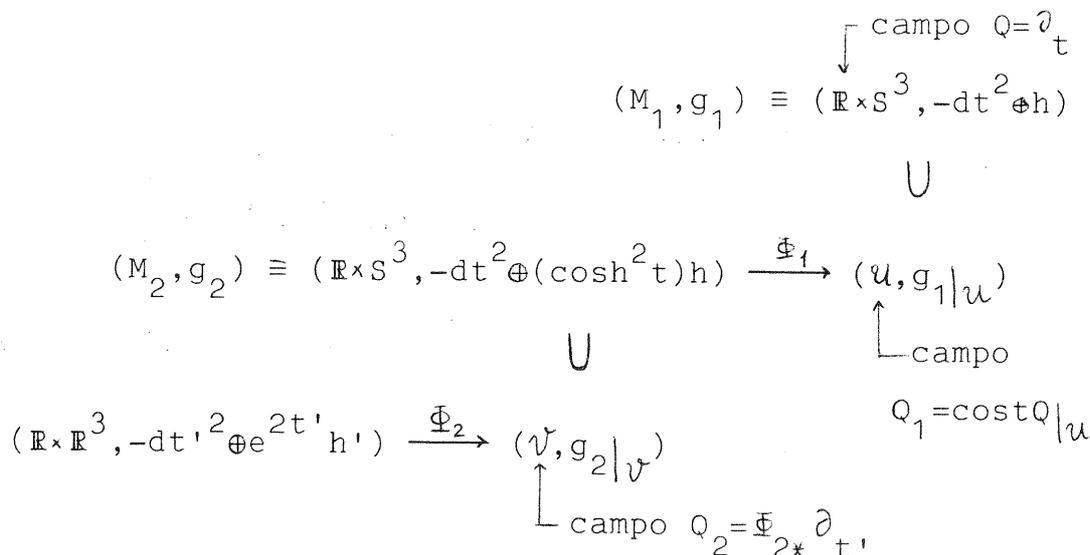
$$\mathcal{V} := \{(t, \rho, \theta, \varphi) \in M \mid \operatorname{sen} ht + \operatorname{cos} ht \operatorname{cos} \rho > 0\}$$

$(\mathcal{V}, g_2|_{\mathcal{V}})$  constituye el espacio-tiempo (métrico) del modelo

cosmológico del "estado estacionario". La aplicación  $\Phi_1|_{\mathcal{V}}$  ( $\Phi_1$  como arriba) nos da el difeomorfismo causal del espacio-tiempo del modelo del estado estacionario sobre una región (contenida en el  $\mathcal{U}$  anterior) del espacio-tiempo estático de Einstein a que se hace referencia en ([6], pág. 127).

Sea ahora el ETC orientado tiempo  $(\mathcal{V}, [g_2]|_{\mathcal{V}})$ . La aplicación  $\Phi_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $(t', \rho', \theta, \varphi) \mapsto (t, \rho, \theta, \varphi)$  con  $t' = \ln(\text{senht} + \text{coshtcos}\rho)$ ,  $\rho' = \text{coshtsen}\rho / (\text{senht} + \text{coshtcos}\rho)$  es un difeomorfismo causal, si consideramos la estructura conforme  $[-dt'^2 \oplus e^{2t'} h']$  sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , con  $h'$  la métrica riemanniana estándar en  $\mathbb{R}^3$  (en coordenadas polares  $\rho', \theta, \varphi$  se tiene  $h' = d\rho'^2 + \rho'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$ ). Es claro pues que el campo  $Q_2 := \Phi_{2*} \partial_{t'}$ , definido sobre  $\mathcal{V}$ , es un factorizador global completo de  $(\mathcal{V}, [g_2]|_{\mathcal{V}})$ . Por otra parte, se demuestra fácilmente que  $\Phi_2^* g_2|_{\mathcal{V}} = -dt'^2 \oplus e^{2t'} h'$ , de donde se sigue inmediatamente  $g^{Q_2} = g_2|_{\mathcal{V}}$  (esto implica, dado que  $g_2|_{\mathcal{V}} = g^{\partial_t}$ , que  $g^{Q_2} = g^{\partial_t}$ ; los campos  $Q_2$  y  $\partial_t$  sin embargo no coinciden). El campo  $Q_2$  no es pues homogéneo temporal, aunque sí es homogéneo e isótropo espacial.

El siguiente diagrama resume en cierto modo el presente ejemplo



CAPITULO 4

DESPLAZAMIENTO AL ROJO (O AL AZUL) EN UN ETC

4.1. INTRODUCCION

Supongamos que, acompañando a cierto observador  $\gamma$ , hay un fragmento de materia en el que tiene lugar una transición atómica concreta y fija con emisión de luz, dispositivo al que en lo sucesivo llamaremos "nuestra fuente luminosa". En un cierto intervalo  $\Delta\tau$  de tiempo propio de  $\gamma$  se emiten  $n$  pulsos luminosos<sup>\*</sup>; la frecuencia de emisión, observada por  $\gamma$ , será, pues,  $\nu_{E|\gamma} = \frac{n}{\Delta\tau}$ .

Supongamos ahora que los  $n$  pulsos son recibidos por otro observador  $\gamma'$  en un intervalo  $\Delta\tau'$  de su tiempo propio; la frecuencia de recepción, observada por  $\gamma'$ , será, pues,  $\nu_{R|\gamma'} = \frac{n}{\Delta\tau'}$ . La razón de ambas frecuencias será  $r := \frac{\nu_{E|\gamma}}{\nu_{R|\gamma'}} = \frac{\Delta\tau'}{\Delta\tau}$ . El hecho de que sea  $r > 1$  (respectivamente,  $r < 1$ ) está significando que la frecuencia de emisión, observada por  $\gamma$  con respecto a su tiempo propio, es mayor (resp., menor) que la frecuencia de recepción, observada por  $\gamma'$  con respecto a su tiempo propio. Dicho de otro modo, el observador  $\gamma'$  encuentra que la frecuencia de la luz se halla desplazada hacia valores más bajos (resp., más altos) que los hallados por  $\gamma$  en emisión. Puesto que la luz roja se caracteriza por ser de menor frecuencia que la azul, se dice que  $\gamma'$  observa un "desplazamiento al rojo" (resp. al azul) con respecto a las observaciones hechas por  $\gamma$ .

---

\* No parece que un análisis del desplazamiento al rojo cosmológico precise de un tratamiento cuántico de la radiación. De hecho el tratamiento cuántico que hace Segal en su modelo posee, por lo que al desplazamiento al rojo respecta, un análogo geométrico (clásico) inmediato. (Véase capítulo 6.)

En observaciones astrofísicas el emisor es una estrella o galaxia y el receptor es algún observador terrestre. Pero dado que la observación directa en el lugar de emisión resulta imposible, con lo que realmente se compara la frecuencia de la luz que recibimos es con la frecuencia de la luz emitida en el propio observatorio terrestre y por la misma fuente luminosa que causa la emisión en la galaxia. A la hora de interpretar esta razón de frecuencias se hace la hipótesis física de que el tiempo propio que dura la emisión de un pulso es el mismo para cualquier observador, siempre y cuando la emisión se produzca por el mismo proceso físico y los relojes que midan los tiempos propios sean físicamente idénticos. Esta hipótesis es razonable, pues es de esperar que la distinta posición en el espacio-tiempo afecte, si fuera el caso, de igual manera al proceso físico emisor de luz y al reloj que lo cronometra.

En ciertos casos, un valor  $r \neq 1$  en la razón de frecuencias puede interpretarse como efecto Doppler (véase ejemplo 4.1) debido al movimiento observado por la fuente luminosa con respecto al observatorio terrestre (por ejemplo, en el caso de señales procedentes de satélites artificiales analizadas en ausencia de gravedad en el marco de la relatividad especial; véase [10], §2.2, y [3], §5.4.2) o como debido al campo gravitatorio existente en la región recorrida por las señales luminosas (por ejemplo, en el caso de señales que se propagan a través de campos gravitatorios estacionarios intensos, analizados en el marco de la teoría de Einstein; véase [10], §3.5, y [3], §7.2 y §7.4.3). Sin embargo la observación sistemática de valores  $r > 1$  para los espectros de la luz procedente de la mayor parte de las galaxias y **cuásares** (observación conocida con el nombre de desplazamiento al rojo cosmológico) no parece que pueda interpretarse en el sentido arriba indicado; la interpretación hoy día generalmente aceptada está basada en los llamados modelos cosmológicos "expansivos" ([10], capítulos 14 y 15; también, ejemplo 4.2).

Afirmamos que un ETC orientado-tiempo  $(M, \mathcal{L})$  proporciona un marco

apropiado para analizar el desplazamiento al rojo cosmológico; para ello basta postular la relevancia cosmológica de un sistema de referencia factorizador global,  $Q$ . En concreto, cualquier galaxia de las llamadas "típicas" (esto es, cuyas trayectorias sean aproximadamente las de la materia en promedio; véase [10], capítulo 14) seguirá una línea de universo representada por una curva integral  $\gamma$  del SRF postulado,  $Q$ , y nuestra galaxia (que se puede considerar "típica"; véase [10], pág. 110) estará representada por otra de tales curvas  $\gamma'$ . La parametrización de ambas curvas representará la que se obtendría sobre las respectivas líneas de universo con sendos relojes físicamente idénticos acompañando a cada una de las galaxias. En cuanto a las curvas que representan las trayectorias seguidas por la luz en su propagación, la filosofía del modelo basado en un ETC (véase §2.1) autoriza a suponer que son precisamente aquellas que admiten parametrizaciones que las hacen geodésicas-luz de cualquier métrica lorentziana dada y compatible con la estructura conforme.

El presente capítulo lo destinamos a formalizar las cuestiones relativas al desplazamiento al rojo y a establecer algunos resultados interesantes a este respecto. En §4.2 se define la razón de tiempos propios  $r$  (definición 4.1); se ofrece una alternativa para el cálculo de  $r$  vía una métrica cualquiera compatible con la estructura conforme (lema 4.1 y corolario); y se establece el importante resultado (teorema 4.1) de que la homogeneidad temporal de un SRF,  $Q$ , implica que los observadores de  $Q$  no apreciarán desplazamiento al rojo si ellos son emisores y receptores. Por último, en §4.3, se tratan con este formalismo dos ejemplos clásicos de cálculos de desplazamiento al rojo en espacios tiempos métricos de la relatividad especial y general.

## 4.2. RAZON DE TIEMPOS PROPIOS

Definición 4.1. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo.

Sean los observadores  $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow M$ ,  $\gamma': \mathcal{E}' \rightarrow M$  y sean  $[c, d] \subset \mathcal{E}$ ,  $[c', d'] \subset \mathcal{E}'$ .

Supongamos que existe una función  $C^\infty$  biyectiva  $f: [c, d] \rightarrow [c', d']$  tal que  $\forall \tau \in [c, d]$ ,  $\exists$  curva luz-futura entre  $\gamma\tau$  y  $\gamma'f\tau$  que es geodésica para alguna  $g \in \mathcal{L}$ .

En tal caso definimos la razón de tiempos propios r relativa a  $\gamma$  y  $\gamma'$  en  $\gamma'f\tau_0$  (con  $\tau_0 \in [c, d]$ ) como

$$r := \left. \frac{df}{d\tau} \right|_{\tau_0}$$

- Notas: a) Es sabido que, dadas  $g, g' \in \mathcal{L}$ , cualquier geodésica-luz de  $g$  puede reparametrizarse convenientemente para ser geodésica-luz de  $g'$  (véase [3], pág. 132), con lo que es obvio que la definición anterior no depende de la  $g$  elegida.
- b) Como ya se dijo en 4.1 (véase también 2.1) las curvas luz-futuras que representan las trayectorias seguidas por la luz en su propagación son aquellas que admiten reparametrizaciones que las hacen geodésicas de cualquier  $g \in \mathcal{L}$ . En la definición anterior se garantiza por tanto que existe alguna trayectoria luminosa entre  $\gamma\tau$  y  $\gamma'f\tau$ ,  $\forall \tau \in [c, d]$ .  
No está garantizada la unicidad de dicha trayectoria (ni, por tanto, la de la función  $f$ ).
- c) La razón de tiempos propios  $r$  arriba definida depende pues solamente de  $\gamma$ , de  $\gamma'$ , de  $\tau_0$  y de la(s)  $f$  existente(s). Dicha  $r$  representa la versión infinitesimal del cociente  $\frac{\Delta\tau'}{\Delta\tau}$ ; si  $r > 1$ , será observado por el receptor un desplazamiento al rojo. (En cosmología es usado convencionalmente el "índice de desplazamiento al rojo"  $z := r - 1$ .)

El siguiente lema proporciona un método para calcular  $r$  vía un cociente de productos escalares.

Lema 4.1. Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo. Sean  $\gamma, \gamma', f, \tau_0$  como en la definición 4.1. Sea  $g \in \mathcal{L}$  y sea  $\lambda: [a, b] \rightarrow M$ , con  $\lambda a = \gamma \tau_0, \lambda b = \gamma' f \tau_0$ , la geodésica luz-futura de  $g$  cuya existencia viene garantizada por la definición 4.1. Entonces se tiene:

$$r = \frac{g(\lambda_* a, \gamma_* \tau_0)}{g(\lambda_* b, \gamma'_* (f \tau_0))}$$

Demostración: Sea  $\lambda^\tau: [a, b] \rightarrow M$ , con  $\lambda^\tau a = \gamma \tau, \lambda^\tau b = \gamma' f \tau$ , la correspondiente geodésica luz-futura entre  $\gamma \tau$  y  $\gamma' f \tau, \forall \tau \in [c, d]$  (con  $\lambda^{\tau_0} = \lambda$ ). Sean  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  y  $\sigma: \mathcal{D} \rightarrow M$  definida por  $\sigma(u, \tau) := \lambda^\tau u$ . Entonces se verifica:  $g(\sigma_* \partial / \partial x^1, \sigma_* \partial / \partial x^1) = 0$  (constante); se sigue (véase [3], §5.0.3) que  $g(\sigma_* \partial / \partial x^1, \sigma_* \partial / \partial x^2)$  es constante a lo largo de cada geodésica  $\lambda^\tau$  ( $x^1, x^2$ , coordenadas estándar en  $\mathbb{R}^2$ ).

Es inmediato verificar

$$\begin{aligned} \sigma_* \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{(u, \tau_0)} \right) &= \lambda_* u, \quad \sigma_* \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_{(a, \tau_0)} \right) = \gamma_* \tau_0 \quad \text{y} \\ \sigma_* \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_{(b, \tau_0)} \right) &= (\gamma' \circ f)_* \tau_0 = \gamma'_* (f \tau_0) \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \end{aligned}$$

Así, podemos escribir

$$g(\lambda_* a, \gamma_* \tau_0) = g(\lambda_* b, \gamma'_* (f \tau_0)) \cdot \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau_0},$$

de donde se deduce

$$r := \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau_0} = \frac{g(\lambda_* a, \gamma_* \tau_0)}{g(\lambda_* b, \gamma'_* (f \tau_0))}$$

Notas: a) El resultado de  $r$  calculado a partir de  $g$  no se altera si en lugar de  $g$  se elige otra métrica  $g' \in \mathcal{L}$  (lo que resulta lógico, ya que  $r$  es independiente de  $g$ ); de hecho lo que sucede es que la contribución del factor conforme  $\alpha$  (con  $g' = \alpha g$ ), sobre ambas curvas  $\gamma$  y  $\gamma'$ , se cancela

exactamente con la contribución del factor que proviene de la reparametrización de la curva  $\lambda$  para mantener su carácter geodésico al cambiar  $g$  por  $g'$  (concretamente, la nueva curva  $\lambda' = \lambda \circ c$ , con  $c: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ , verifica

$$\lambda'_* u = \lambda_* c_u \cdot \frac{dc}{du} = \frac{1}{\alpha(\lambda c_u)} \lambda_* c_u).$$

- b) La dependencia de  $r$  en  $\gamma$ ,  $\gamma'$  y  $\tau_0$ , a que se hacía referencia en la nota c) a la definición 4.1 es, pues, en realidad una dependencia en los vectores tangentes  $\gamma_* \tau_0$  y  $\gamma'_* \tau_0$ .

Corolario. En las hipótesis del lema 4.1 se verifica

$$r = \frac{g(\lambda_* a, \gamma_* \tau_0)}{g(\lambda_* a, \Pi_{b,a}^g \gamma'_*(f \tau_0))}$$

siendo  $\Pi_{b,a}^g$  el transporte paralelo definido por la conexión de Levi-Civita,  $\nabla^g$ , sobre la curva  $\lambda$  entre los puntos  $\lambda b = \gamma'_* f \tau_0$  y  $\lambda a = \gamma_* \tau_0$ .

Demostración: Se sigue inmediatamente de que el transporte  $\Pi^g$  preserva los productos escalares definidos por  $g$  y de que  $\lambda$  es geodésica de  $\nabla^g$ .

El siguiente teorema afirma que los observadores de un sistema de referencia factorizador (no necesariamente global) temporalmente homogéneo no pueden apreciar desplazamiento al rojo.

Teorema 4.1. Sea  $(M, \zeta)$  un ETC orientado-tiempo. Sea  $Q$  un SRF homogéneo temporal. Entonces para cualquier pareja de observadores de  $Q$ ,  $\gamma$  y  $\gamma'$  en las condiciones de la definición 4.1, la razón de **tiempos propios** es igual a 1.

Demostración: En el corolario al lema 4.1, tomemos  $g := g^Q$ . Por ser  $Q$  un SRF homogéneo temporal, se verifica (lema 3.10)  $\nabla_V^Q Q = 0$ ,  $\forall v \in TM$  y, puesto que  $\nabla^g = \nabla^Q$ , se tiene  $\Pi_{b,a}^g Q(\alpha b) = Q(\alpha a)$  sobre cualquier curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ . En particular, para  $\lambda$  se verifica que  $\Pi_{b,a}^g (\gamma'_* f \tau_0) \equiv \Pi_{b,a}^g (Q(\lambda b)) = Q(\lambda a) \equiv \gamma_* \tau_0$ , con lo cual,  $r=1$ .

4.3. EJEMPLOS

Ejemplo 4.1. Sea  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  el espacio de Minkowski en su versión conforme (ejemplo 2.1). Consideremos dos SR,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{G}$ , en  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  conjugados inerciales (ejemplo 3.1). Describiremos aquí el llamado "efecto Doppler relativista".

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\mathcal{C} = \partial/\partial x^0$  y  $\mathcal{G} = \delta\partial/\partial x^0 + \delta\beta\partial/\partial x^3$ , con  $-1 < \beta < 1$  y  $\delta = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Se interpreta que los observadores de  $\mathcal{G}$  se mueven con una velocidad  $\beta c$  relativa a  $\mathcal{C}$  (siendo  $c$  la velocidad de la luz), en la dirección de la coordenada  $x^3$ . Podemos considerar que  $\mathcal{G}$  se obtiene de  $\partial/\partial x^0$  vía la transformación del grupo de Lorentz  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\Phi(v) = Av$ , con

$$A = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & \delta\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta\beta & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

El observador de  $\mathcal{C}$ ,  $\gamma': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\gamma'\tau = (\tau, 0, 0, 0)$  será para nosotros el receptor de luz, y un observador de  $\mathcal{G}$ ,  $\gamma$ , será el emisor. Nos proponemos calcular la razón de tiempos propios,  $r$ , relativa a  $\gamma$  y  $\gamma'$  en  $\gamma'f_0$ . Tengamos en cuenta previamente los siguientes puntos:

(a) Por ser  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{G}$  SR conjugados inerciales,  $g^{\mathcal{C}} = g^{\mathcal{G}} = \eta$   
 $\nabla^{\mathcal{C}} = \nabla^{\mathcal{G}} = \nabla^{\eta}$

(b) Puesto que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{G}$  son SRF temporalmente homogéneos, se verifica (lema 3.10) para toda curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\prod_{b,a}^{g^{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(\alpha b)) = \mathcal{C}(\alpha a) \text{ y } \prod_{b,a}^{g^{\mathcal{G}}}(\mathcal{G}(\alpha b)) = \mathcal{G}(\alpha a)$$

Por (a) y (b) y aplicando el corolario al lema 4.1, obtenemos que

$$\frac{\eta(\lambda_* a, \mathcal{G}(\gamma 0))}{\eta(\lambda_* a, \mathcal{C}(\gamma 0))} = \frac{\eta(\lambda_* a, \mathcal{G}(\gamma 0))}{\eta(\lambda_* a, \prod_{b,a}^{\eta}(\mathcal{C}(\gamma' f_0)))} = r$$

Siendo  $\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^4$  una curva luz geodésica de  $\eta$  entre

$\gamma_0$  y  $\gamma'f_0$ . Podemos escribir sin pérdida de generalidad que  $\lambda_* a = (\partial/\partial x^0 + a^1 \partial/\partial x^1 + a^2 \partial/\partial x^2 + a^3 \partial/\partial x^3)(\lambda a)$ , con  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  (carácter luz). Se sigue que

$$r = \delta(1 - \beta a^3)$$

Este resultado es conocido por el efecto Doppler relativista sobre la razón de frecuencias observada, debido a la velocidad relativa al observador receptor de la fuente luminosa.

Un cambio a coordenadas polares esféricas  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^0, x^r, x^\theta, x^\varphi)$  con  $x^1 = x^r \operatorname{sen} x^\theta \operatorname{sen} x^\varphi$ ,  $x^2 = x^r \operatorname{sen} x^\theta \operatorname{cos} x^\varphi$ ,  $x^3 = x^r \operatorname{cos} x^\theta$ , nos muestra que  $-\beta a^3$  representa la componente radial de la velocidad relativa entre emisor y receptor.

Notaremos  $\beta_r := -\beta a^3$ . Así pues,  $r = \delta(1 + \beta_r)$ ; este es un resultado bien conocido (véase [10], 2-2). Un alejamiento relativo  $\beta_r > 0$  implica  $r > 1$  y, por tanto, observación de un desplazamiento al rojo (véase 4.1). Análogamente, un acercamiento relativo implica la observación de un desplazamiento al azul.

Ejemplo 4.2. Sea  $Q$  un SRF sobre un ETC  $(M, \mathcal{E})$ , con  $\Phi: T \times S \longrightarrow U \subset M$ . Recordaremos que  $\Phi_* \partial_t = Q$ ,  $\Phi^* g^Q = -dt^2 \oplus fh$  para alguna  $f > 0$ , función sobre  $T \subset \mathbb{R}$ . Nos proponemos aquí calcular la razón de tiempos propios  $r$ , relativa a dos observadores de  $Q$ ; para ello realizaremos todo el cálculo en  $(T \times S, [-dt^2 \oplus fh])$ .

Definiendo  $t' := \int_0^t f^{-1/2} dt$ , se obtiene  $\partial_{t'} = f^{1/2} \partial_t$  y  $dt' = f^{-1/2} dt$ . De la igualdad

$$-1 = g^{\partial_{t'}}(\partial_{t'}, \partial_{t'}) = f g^{\partial_t}(\partial_t, \partial_t)$$

deducimos que  $g^{\partial_{t'}} = f^{-1} g^{\partial_t} = -f^{-1} dt^2 \oplus h = -dt'^2 \oplus h$ ; luego  $\partial_{t'}$  resulta ser un SR factorizador homogéneo temporal. Por el teorema 4.1, la razón de tiempos propios  $r'$ , relativa a observadores de  $\partial/\partial t'$ , es igual a 1.

Ahora bien, si tomamos  $g \in [-dt^2 \oplus fh]$  y  $\lambda$  geodésica luz de  $g$ , se tiene (por el lema 4.1)

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{g(\lambda_* a, \partial_t \lambda a)}{g(\lambda_* b, \partial_t \lambda b)} = \frac{(f \circ t(\lambda a))^{-\frac{1}{2}} g(\lambda_* a, \partial_{t'}(\lambda a))}{(f \circ t(\lambda b))^{-\frac{1}{2}} g(\lambda_* b, \partial_{t'}(\lambda b))} = \\
 &= \left( \frac{f \circ t(\lambda b)}{f \circ t(\lambda a)} \right)^{\frac{1}{2}} r' = \left( \frac{f \circ t(\lambda b)}{f \circ t(\lambda a)} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Este resultado es más general que el que se obtiene para el desplazamiento al rojo cosmológico en los modelos de Robertson-Walker (véase [10]), en el sentido de que no se impone homogeneidad e isotropía (espaciales) a la  $h$ . En dichos modelos el factor  $\sqrt{f}$  se le conoce como "factor de expansión". Un valor  $r > 1$  implica que el factor de expansión en el instante  $(t\lambda a)$  de la emisión es menor que en el instante  $(t\lambda b)$  de la recepción. Por consiguiente, ya que la métrica de cada hipersuperficie espacial viene dada por  $f(t)h$ , se puede interpretar como que el "universo se halla en expansión".

## CAPITULO 5

### MODELO COSMOLOGICO DE SEGAL

#### 5.1. INTRODUCCION

Dedicamos este capítulo al estudio del modelo cosmológico propuesto por I. E. Segal (véase [2]). Dicho modelo se basa en un espacio-tiempo conforme sobre el cual un cierto campo de vectores, cuyas curvas integrales debieran representar las trayectorias promedio de la materia en el espacio-tiempo, induce una métrica lorentziana "estática". Una coordinatización del espacio-tiempo vía la exponencial de dicha métrica lo asimilaría al espacio-tiempo estático de Einstein; en estas condiciones es claro que no sería posible esperar del modelo un desplazamiento al rojo cosmológico. Segal propone, por el contrario, una cierta coordinatización "alternativa" como la única "antropomórficamente posible"; ésta daría lugar (según Segal) a que cualquier observador de dicho campo de vectores apreciara un desplazamiento al rojo cosmológico, que además dependería cuadráticamente de la distancia al emisor. En este capítulo vamos a describir el modelo cosmológico de Segal, dejando para el capítulo 6 el análisis del supuesto desplazamiento al rojo.

En §5.2 se dan los postulados (P.1 a P.4) del modelo cosmológico de Segal. Dichos postulados pueden resumirse diciendo que el modelo cosmológico de Segal consiste en la tripleta  $(M, \mathcal{L}, Q)$ , con  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado-tiempo que verifica la condición de causalidad y  $Q$  un cierto SRF global y completo sobre  $(M, \mathcal{L})$ , homogéneo e isótropo espacial y homogéneo temporal. Es interesante reseñar aquí que el ETC del modelo cosmológico de Segal es esencialmente el único que satisface dichos postulados y que  $Q$  queda también definido unívocamente (a menos de conjugación). El hecho de que  $Q$  sea homogéneo temporal exclu-

ye la mayoría de los modelos cosmológicos clásicos.

En §5.3 se detalla la estructura del ETC del modelo cosmológico de Segal. El espacio de Minkowski admite un embedding causal en su "compactificación conforme" (lema 5.3) y el ETC del modelo de Segal es el recubridor universal\* de dicha compactificación (lema 5.4). Se demuestra (lema 5.5) que la composición del embedding causal con una cierta sección de la aplicación recubridora arriba citados no es sino la aplicación conforme entre el espacio de Minkowski y una región del "espacio estático de Einstein" dada en ([6], pág. 118-121). Finalmente se da un cuadro-resumen de este apartado.

En §5.4 se analiza la acción del grupo causal del ETC del modelo cosmológico de Segal. Dicho grupo causal es isomorfo (lema 5.6) al recubridor universal  $S\widetilde{U}(2,2)$ , con lo que los 15 campos causales independientes resultan completos. En el apéndice (A.3) se da explícitamente la expresión de los 15 campos causales sobre el espacio de Minkowski. A continuación (y aunque esto resulta superfluo para el objetivo de este trabajo, que es el análisis del supuesto desplazamiento al rojo en el modelo de Segal) se considera una representación alternativa del ETC del modelo de Segal. A tal efecto se establece el difeomorfismo causal (lema 5.7) entre la compactificación conforme del espacio de Minkowski y el grupo  $U(2)$ ; consiguientemente, el ETC del modelo de Segal resulta difeomorfo causal al grupo recubridor universal  $\widetilde{U}(2)$ . Se analiza a continuación (lema 5.8) la acción de  $SU(2,2)/\mathbb{Z}_4$  como grupo causal de  $U(2)$ . En el apéndice (A.3) se da explícitamente la expresión de los 15 campos causales sobre  $U(2)$ .

---

\* Cuando hablemos de que una variedad causal "recubre" a otra, lo haremos no sólo en el sentido topológico habitual, sino también en el sentido de que la aplicación recubridora es causal (véase lema 2.7).

En 5.5 se plantea la cuestión de identificar el tipo de cartas locales (sobre el ETC de Segal) en cuyos términos se analizan las observaciones experimentales. Se recuerda brevemente que, en el caso de la teoría general de la relatividad, dichas cartas son las inducidas por la aplicación exponencial de la (conexión asociada a la) métrica lorentziana global existente. En el modelo de Segal puede demostrarse que la exponencial asociada a la métrica global inducida sobre el ETC por el SRF  $Q$  de los postulados P.3 y P.4 coincide (lema 5.9) con la exponencial de  $\widetilde{U}(2)$  como grupo de Lie. Pero Segal no da significado observacional a dicha métrica global y propone una coordinatización "alternativa"; dicha coordinatización se analiza a continuación y en el lema 5.10 se demuestra que coincide con la dada por la exponencial asociada a una cierta métrica lorentziana local en torno al punto de observación, que a su vez es inducida por un SRF local  $Q$  del que se obtiene su expresión explícita. Finalmente se da un cuadro-resumen de este apartado.

## 5.2. POSTULADOS DE SEGAL PARA EL ESPACIO-TIEMPO

A continuación exponemos en forma de postulados las condiciones que Segal considera conveniente y razonable exigir a una "buena" representación del espacio-tiempo físico a gran escala ([2], II-1,2). Hemos transcrito los postulados de Segal en el lenguaje desarrollado en los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

- P.1 El espacio-tiempo es una variedad diferenciable  $C^\infty$  de dimensión 4, conexa, Hausdorff, paracompacta y sin borde (véase §2.1).
- P.2 El espacio-tiempo posee una orientación causal infinitesimal (OCI; véase definición 2.2) que verifica la condición de causalidad. Supondremos que esta orientación viene inducida por una estructura conforme (orientable tiempo) (véanse §2.1, §2.3).
- P.3 El espacio-tiempo admite un sistema de referencia factorizador (SRF) global, homogéneo espacial e isótropo espacial (véanse definiciones 3.5 y 3.6 b,c).
- P.4 El SRF mencionado en el postulado anterior es completo y homogéneo temporal (véase definición 3.6 a).

Comentario sobre P.2.- Inicialmente Segal postula únicamente la existencia de una OCI que verifique la condición de causalidad. Su posterior discusión, acerca de la posibilidad de que los conos que dan dicha OCI vengan definidos por estructuras finslerianas no-lorentzianas locales, no es concluyente para dimensión 4. Es por esta razón por la que hemos incluido en P.2 la condición de que dichos conos correspondan a los de una estructura conforme (lema 2.5); esto resulta lo más razonable (véase §1.1; también [14], pág. 10-15) y, por otra parte, es lo que (sin incluirlo explícitamente en sus postulados) hace el propio Segal.

Comentario sobre P.3.- Este postulado es, además de un requerimiento razonable para abordar de manera simplificada muchos de los análisis de los datos observacionales cosmológicos, una consecuencia de aplicar el "principio cosmológico" a las observaciones hechas desde la Tierra, alrededor de la cual el universo aparece, considerado a gran escala, isótropo con bastante aproximación (véase el comentario posterior al lema 3.8). En este orden de ideas el SRF postulado en P.3 sería aquel cuyas curvas integrales representaran las trayectorias promedio de la materia en el espacio-tiempo.

Comentario sobre P.4.- Este postulado es un requerimiento necesario para que el flujo del SRF enunciado respete la orientación causal infinitesimal y para que tal flujo sea un subgrupo a un parámetro del grupo causal del espacio-tiempo (véase lema 3.8 b). (En [2] se ofrecen otros argumentos de carácter físico que harían, en opinión de Segal, razonable la introducción de este postulado: obtención de un concepto de "estado" independiente del tiempo, de una noción de "energía" bien definida, así como de una ley de conservación para ésta ). Nótese que los modelos cosmológicos clásicos, que en general verifican P.1, P.2 y P.3, no verifican P.4, pues incluir la homogeneidad temporal de los sistemas de referencia "acompañantes" implicaría, en el marco de la Relatividad General, que el espacio tiempo métrico sería estático e incapaz de ofrecer una explicación convincente del fenómeno del desplazamiento al rojo cosmológico observado (véase ejemplo 4.2).

Puede demostrarse que existen tres únicos espacio-tiempos que verifican P.1 a P.4 ([2], pág. 58-59):

- 1)  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  (véanse ejemplos 2.1 y 3.1)
- 2)  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  (ejemplos 2.2 y 3.2)
- 3)  $(M', \mathcal{L}')$  (véase [2], pág. 59:  $(M', \mathcal{L}')$  es difeomorfo causal con cierta subvariedad abierta de  $(S^1 \times S^3, [-l \oplus h])$ , con  $l$  y  $h$  las estructuras riemannianas estándar sobre  $S^1$  y  $S^3$  respectivamente)

Hay que hacer las siguientes observaciones:

i)  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  es la versión conforme (ejemplo 2.1) del espacio-tiempo de Minkowski. Posee un grupo causal de dimensión 11 (véase [8]) isomorfo a  $(\mathbb{R}_4 \times SO_+(1,3)) \times \mathbb{R}_+$  (producto directo del grupo de Lorentz inhomogéneo por el grupo de transformaciones de escala).

ii)  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  posee un grupo causal de dimensión 15 (esto es, maximal; lema 2.6) isomorfo a  $\widetilde{SU}(2,2)$  (véase lema 5.6).  $\mathbb{R} \times S^3$  es el recubridor universal de  $S^1 \times S^3$  (ejemplo 2.2).

iii)  $(M', \mathcal{L}')$  posee un grupo causal de dimensión 10, isomorfo a  $SO(3,2)$  ([2], pág. 58).

Segal argumenta que, puesto que existen difeomorfismos causales de  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  (lemas 5.3 y 5.4) y  $(M', \mathcal{L}')$  en abiertos de variedades causales que son a su vez recubiertas por  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  y puesto que los grupos causales de las dos primeras son esencialmente subgrupos del grupo causal de ésta última,  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  debe considerarse "universal", y por tanto debe ser adoptado como el espacio-tiempo para un modelo cosmológico.

En cuanto al SRF de los postulados P.3 y P.4 es claro (véase ejemplo 3.2) que tendrá que ser alguno de los SRF conjugados (véase lema 3.11) al campo  $\partial_t$  sobre  $\mathbb{R} \times S^3$ ; no se pierde pues generalidad adoptando  $\partial_t$  como el SRF de dichos postulados.

### 5.3. EL ESPACIO-TIEMPO DEL MODELO DE SEGAL

Como ya se ha dicho en §5.2, Segal adopta el espacio-tiempo conforme orientado-tiempo  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  (con  $h$ , la estructura riemanniana estándar sobre  $S^3$ ) como espacio-tiempo de su modelo cosmológico. Vamos a ver a continuación que este espacio-tiempo puede considerarse como el recubridor universal de la "compactificación conforme" del espacio de Minkowski. (Hemos omitido las demostraciones que pueden verse en [2], aunque hemos adaptado los enunciados a las notaciones de los capítulos 2 y 3 de este trabajo.)

#### Definición 5.1

- (a) Sea  $b$  un producto escalar sobre  $\mathbb{R}^6$  de signatura  $(---+++)$ . Consideremos el espacio proyectivo  $\mathbb{P}\mathbb{R}^6$ ; denotamos  $\tilde{w} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^6$  con  $w (\neq 0) \in \mathbb{R}^6$ , a la clase  $\tilde{w} := \{y \in \mathbb{R}^6 / y = \lambda w; \lambda (\neq 0) \in \mathbb{R}\}$ . Definimos la cuádrica proyectiva  $B$  inducida por  $b$  como el conjunto

$$B := \{\tilde{w} \in \mathbb{P}\mathbb{R}^6 / b(w, w) = 0\}$$

- (b) Consideremos el grupo  $GL(6, \mathbb{R})$ ; cada elemento  $T \in GL(6, \mathbb{R})$  induce una transformación  $\tilde{T}: \mathbb{P}\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^6$ ,  $\tilde{w} \longmapsto (\tilde{T}w)$ . Sea el subgrupo de  $GL(6, \mathbb{R})$

$$O(2, 4) := \{T \in GL(6, \mathbb{R}) / b(Tw, Ty) = b(w, y), \forall w, y \in \mathbb{R}^6\}$$

Definimos el grupo proyectivo  $O(B)$  de la cuádrica  $B$  como el conjunto

$$O(B) := \{\tilde{T} / T \in O(2, 4)\}$$

(Es claro que  $O(B)$ , actuando sobre la cuádrica  $B$ , deja a ésta invariante.)

Lema 5.1. Sean  $B$  y  $O(B)$  como en la definición 5.1. Entonces se tiene:

- a)  $B$  posee una estructura de variedad  $C^\infty$  compacta y de dimensión 4.

b)  $O(B)$  posee una estructura de grupo de Lie, isomorfo a  $O(2,4)/\mathbb{Z}_2$ , bajo el que  $B$  es un espacio homogéneo.

c) Existe una única estructura conforme  $\mathcal{L}_B$  sobre  $B$  tal que la acción de  $O(B)$  sobre  $B$  es conforme (esto es:  $\varphi^* \mathcal{L}_B = \mathcal{L}_B$ ,  $\forall \varphi \in O(B)$ ).

Demostración: Véase [2], escolio 2.9, pág. 38.

Lema 5.2. Sea  $(S^1 \times S^3, [-1\theta h])$  el ETC orientado-tiempo del ejemplo

2.2. Sea  $(B, \mathcal{L}_B)$  el ETC como arriba. Entonces se tiene:

a) La aplicación  $\pi: S^1 \times S^3 \longrightarrow B$ ,  $((u^{-1}, u^0), (u^1, u^2, u^3, u^4)) \longmapsto \tilde{w}$ , con  $(u^{-1})^2 + (u^0)^2 = 1 = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2$  y  $w = (u^{-1}, u^0, u^1, u^2, u^3, u^4) \in \mathbb{R}^6$ , es un recubridor doble y es conforme (esto es:  $\pi^* \mathcal{L}_B = [-1\theta h]|_{\pi^{-1}(B)}$ ).

De hecho  $(B, \mathcal{L}_B)$  es difeomorfo conforme a  $(S^1 \times S^3 / \{I, -I\}, [-1\theta h])$ , siendo  $I, -I$  respectivamente la identidad y la inversión en  $S^1 \times S^3$ .

b) La orientación temporal en  $(S^1 \times S^3, [-1\theta h])$  (ejemplo 2.2) es invariante bajo la inversión  $-I$ ; consecuentemente el ETC  $(B, \mathcal{L}_B)$  resulta orientado-tiempo y la aplicación  $\pi$  es causal.

c) El grupo causal de  $(B, \mathcal{L}_B)$  es isomorfo a  $SO_0(2,4)/\mathbb{Z}_2$  (por tanto, maximal; véase lema 2.6) bajo el que  $B$  sigue siendo un espacio homogéneo.

Demostración: Véase [2], escolios 2.10 y 2.11, pág. 39-40.

Lema 5.3. Sea el ETC orientado-tiempo  $(B, \mathcal{L}_B)$  como arriba y sea  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  como en el ejemplo 2.1. Entonces la aplicación

$$j: (\mathbb{R}^4, [\eta]) \longrightarrow (B, \mathcal{L}_B), x \longmapsto \tilde{w},$$

con  $w = (1 + \frac{\eta(x, x)}{4}, x^0, x^1, x^2, x^3, 1 - \frac{\eta(x, x)}{4}) \in \mathbb{R}^6$ , es un difeomorfismo

causal sobre su imagen y ésta es densa en  $B$ .

Demostración: Véase [2], escolio 2.12 y corolario 2.13.1, pág. 42-43.

Denominaremos a  $(B, \mathcal{L}_B)$  la compactificación conforme del espacio de Minkowski.

Lema 5.4.  $(\mathbb{R}^1 \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$ , como en el ejemplo 2.2, es el recubridor universal de la compactificación conforme del espacio de Minkowski.

Demostración: Se sigue de los lemas 5.1 y 5.2 y de la composición de aplicaciones causales  $\pi \circ \Psi$

$$(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h]) \xrightarrow{\Psi} (S^1 \times S^3, [-1 \oplus h]) \xrightarrow{\pi} (B, \mathcal{L}_B)$$

( $\Psi$  se define en el ejemplo 2.2 y  $\pi$  en el lema 5.2.a).

La composición  $s \circ j: (\mathbb{R}^4, [\eta]) \longrightarrow (\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  (con  $s$  la sección de la aplicación recubridora  $\pi \circ \Psi$  que lleva el punto

$$\tilde{w} \in B \text{ (con } w = (1, 0, 0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^6)$$

en el punto

$$(t=0, u^1=0, u^2=0, u^3=0, u^4=1) \in \mathbb{R} \times S^3)$$

es un difeomorfismo causal sobre su imagen, como muestran los lemas 5.3 y 5.4. A continuación vamos a demostrar que el difeomorfismo causal  $s \circ j$  no es sino la aplicación conforme entre el espacio de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  y una región del espacio estático de Einstein  $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$  dada en ([6], pág. 118-121).

Designemos por  $(t, \rho, \theta, \varphi)$  la carta sobre  $\mathbb{R} \times S^3 \approx \widetilde{U}(2)$  definida en el apéndice y por  $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$  la carta sobre  $\mathbb{R}^4$  dada por

$$\begin{cases} x^1 = x^r \sin x^\theta \sin x^\varphi \\ x^2 = x^r \sin x^\theta \cos x^\varphi \\ x^3 = x^r \cos x^\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x^r = (x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})^{\frac{1}{2}} \\ x^\theta = \arctg (x^{1^2} + x^{2^2})^{\frac{1}{2}} / x^3 \\ x^\varphi = \arctg x^1 / x^2 \end{cases}$$

Entonces se tiene el siguiente

Lema 5.5

i) La aplicación  $(s \circ j): \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \times S^3$  viene dada, en las cartas arriba indicadas, por las expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} \frac{x^0}{1 + \frac{\eta(x,x)}{4}} \\ \rho = \operatorname{arctg} \frac{x^r}{1 - \frac{\eta(x,x)}{4}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = x^\theta \\ \varphi = x^\varphi \end{array} \right.$$

mientras que la aplicación inversa viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 = \operatorname{tg} \left( \frac{t+\rho}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{t-\rho}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{sen} t}{\operatorname{cost} + \operatorname{cosp}} \\ x^r = \operatorname{tg} \left( \frac{t+\rho}{2} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{t-\rho}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{sen} \rho}{\operatorname{cost} + \operatorname{cosp}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^\theta = \theta \\ x^\varphi = \varphi \end{array} \right.$$

Es claro que la imagen de la aplicación  $s \circ j$  será el abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R} \times S^3$  definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\pi < t + \rho < \pi \\ -\pi < t - \rho < \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right. \quad \text{con } \rho \geq 0$$

ii) Se verifica  $(s \circ j)^{-1*} \eta = \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{t+\rho}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{t-\rho}{2} \right)} (-dt^2 \oplus h) \Big|_{\mathcal{U}}$

Demostración:

i) La composición  $(s \circ j)$  viene dada, respecto de las coordenadas usuales  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  de  $\mathbb{R}^4$ , por

$$\begin{array}{ccc} (x^0, x^1, x^2, x^3) & \xrightarrow[\text{(lema 5.3)}]{j} & \tilde{w} \xrightarrow{\quad} \\ & & \text{con } w := \left( 1 + \frac{\eta(x,x)}{4}, x^0, x^1, x^2, x^3, 1 - \frac{\eta(x,x)}{4} \right) \\ & & \xrightarrow{\text{sección de } \pi} \\ & & \xrightarrow[\text{(lema 5.2)}]{k_x} k_x \left( 1 + \frac{\eta(x,x)}{4}, x^0, x^1, x^2, x^3, 1 - \frac{\eta(x,x)}{4} \right) \xrightarrow{\quad} \\ & & \text{con } k_x := \left( \left( 1 + \frac{\eta(x,x)}{4} \right)^2 + x^0{}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\frac{\text{sección de } \Psi}{(\text{Ej. 2.2})} \rightarrow (t, u^1 = k_x x^1, u^2 = k_x x^2, u^3 = k_x x^3, u^4 = k_x (1 - \frac{\eta(x,x)}{2}))$$

$$\text{con } t = \text{arctg} \frac{x^0}{1 + \frac{\eta(x,x)}{4}}$$

Teniendo en cuenta los cambios  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^0, x^r, x^\theta, x^\varphi)$  y  $(t, u^1, u^2, u^3) \mapsto (t, \rho, \theta, \varphi)$  se llega a la expresión deseada para  $(s \circ j)$ .

En cuanto a la expresión de la inversa, considérese que

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{t+\rho}{2} \pm \text{tg} \frac{t-\rho}{2} &= \frac{\text{sen} \frac{t+\rho}{2}}{\cos \frac{t+\rho}{2}} \pm \frac{\text{sen} \frac{t-\rho}{2}}{\cos \frac{t-\rho}{2}} = \frac{\text{sen}(\frac{t+\rho}{2} \pm \frac{t-\rho}{2})}{\cos \frac{t+\rho}{2} \cos \frac{t-\rho}{2}} = \\ &= \begin{cases} \frac{2 \text{sen} t}{\text{cost} + \text{cos} \rho} \\ \frac{2 \text{sen} \rho}{\text{cost} + \text{cos} \rho} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (s \circ j)^{-1*} \eta &= (s \circ j)^{-1*} [-dx^0{}^2 + dx^r{}^2 + (x^r)^2 dx^\theta{}^2 + (x^r)^2 \text{sen}^2 x^\theta dx^\varphi{}^2] = \\ &= \frac{4}{(\text{cost} + \text{cos} \rho)^2} [-dt^2 + d\rho^2 + \text{sen}^2 \rho d\theta^2 + \text{sen}^2 \rho \text{sen}^2 \theta d\varphi^2] = \\ &= \frac{1}{\cos^2(\frac{t+\rho}{2}) \cos^2(\frac{t-\rho}{2})} (-dt^2 \oplus h) \Big|_u \end{aligned}$$

El siguiente esquema resume las notaciones de este apartado:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^6 \longrightarrow \text{PR}^6 \supset (B, \mathcal{C}_B) \xleftarrow{j} (\mathbb{R}^4, [\eta]) \\ \downarrow s \\ \begin{array}{c} \uparrow \pi \\ (S^1 \times S^3, [-1 \oplus h]) \\ \uparrow \Psi \\ (\mathbb{R}^1 \times S^3, [-dt^2 \oplus h]) \end{array} \end{array}$$

5.4. EL GRUPO CAUSAL DEL ESPACIO-TIEMPO DE SEGAL

Comenzamos con el siguiente

Lema 5.6. El grupo causal del ETC orientado-tiempo  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  es isomorfo (como grupo de Lie) al grupo  $S\widetilde{U}(2,2)$  (aquí la notación  $\widetilde{G}$  designa el recubridor universal de  $G$ ).

Demostración: Se sigue de los siguientes hechos:

- (i)  $(B, \mathcal{C}_B)$  es un ETC orientado-tiempo (lema 5.2.b) sobre el que el grupo conexo  $SO_0(2,4)/\mathbb{Z}_2$  actúa causal y transitivamente (lema 5.2.c).
- (ii)  $SO_0(2,4)/\mathbb{Z}_2$  es isomorfo a  $SU(2,2)/\mathbb{Z}_4$ .
- (iii) La aplicación recubridora universal
 
$$\pi \circ \Psi: (\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h]) \longrightarrow (B, \mathcal{C}_B)$$
 es causal (ejemplo 2.2 y lema 5.2.b).
- (iv) [2], escolio 2.5, pág. 33.

Para el estudio de la acción del grupo causal del espacio-tiempo de Segal es interesante (aunque no imprescindible) la siguiente representación alternativa de dicho espacio-tiempo.

Lema 5.7. Sean  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  y  $(B, \mathcal{C}_B)$  los ETC orientados-tiempo del ejemplo 2.1 y del lema 5.2. Sean  $(H(2), \overline{F})$  y  $(U(2), \mathcal{F})$  las variedades causales del ejemplo 2.3 (se sobreentiende que:  $\forall h \in H(2)$ ,  $\overline{F}_h := h + F$ , siendo  $F$  el cono  $C$  convexo sobre el espacio vectorial  $H(2)$  a que se hacía referencia en dicho ejemplo 2.3 y considerando identificados  $H(2)$  y  $T_h H(2)$  para todo punto  $h \in H(2)$ ). Parametricemos  $\mathbb{R}^4$ ,  $B$ ,  $H(2)$  y  $U(2)$  en la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbb{R}^4 \ni x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ B \ni \tilde{w}, \text{ con } \mathbb{R}^6 \ni w = (w^{-1}, w^0, w^1, w^2, w^3, w^4) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(2), h = \begin{pmatrix} h^0 + h^1 & h^2 + ih^3 \\ h^2 - ih^3 & h^0 - h^1 \end{pmatrix} \\ U(2), u = (u^{-1} + iu^e) \begin{pmatrix} u^4 + iu^1 & -u^3 + iu^2 \\ u^3 + iu^2 & u^4 - iu^1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Entonces se tiene:

(a) La aplicación  $\alpha: (\mathbb{R}^4, [\eta]) \longrightarrow (H(2), \bar{F})$ ,  $x \longmapsto h$ , con  $h^\mu := x^\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ), es un difeomorfismo causal.

(b) La aplicación  $\beta: (B, \mathcal{E}_B) \longrightarrow (U(2), \tilde{\mathcal{F}})$ ,  $\tilde{w} \longmapsto u$ , con  $u^a := \frac{w^a}{((w^{-1})^2 + (w^0)^2)^{\frac{1}{2}}}$  ( $a=-1,0,1,2,3,4$ ), es un difeomorfismo causal.

(c) La aplicación de Cayley  $J: (H(2), \bar{F}) \longrightarrow (U(2), \mathcal{F})$ ,  $h \longmapsto u := (I + \frac{i}{2}h)(I - \frac{i}{2}h)^{-1}$ :

(i) Posee la siguiente expresión en coordenadas

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{-1} = \frac{1 - \frac{\det h}{4}}{((1 - \frac{\det h}{4})^2 + (\frac{\text{tr } h}{2})^2)^{\frac{1}{2}}} \\ u^\mu = \frac{h^\mu}{((1 - \frac{\det h}{4})^2 + (\frac{\text{tr } h}{2})^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\mu=0,1,2,3) \\ u^4 = \frac{1 + \frac{\det h}{4}}{((1 - \frac{\det h}{4})^2 + (\frac{\text{tr } h}{2})^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$$

(ii) Hace conmutativo el siguiente diagrama entre variedades causales

$$\begin{array}{ccc} (B, \mathcal{E}_B) & \xrightarrow{\beta} & (U(2), \mathcal{F}) \\ \uparrow j & & \uparrow J \\ (\mathbb{R}^4, [\eta]) & \xrightarrow{\alpha} & (H(2), \bar{F}) \end{array}$$

siendo  $j$ , la aplicación definida en el lema 5.3.

(iii) Es un difeomorfismo causal sobre su imagen y ésta es densa en  $U(2)$ .

Demostración:

(a), (b) y (c-i) son inmediatas.

(c-ii) es consecuencia de las anteriores.

(c-iii) es consecuencia de (a), (b), (c-ii) y del lema 5.3.

Localmente  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  y  $(U(2), \mathcal{F})$  son difeomorfos causales. Para estudiar localmente la acción del grupo causal de  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  (isomorfo a  $S\widetilde{U}(2,2)$ ) bastará estudiar la acción del grupo causal de  $(U(2), \mathcal{F})$  (isomorfo a  $SU(2,2)/\mathbb{Z}_4$ ).

En este sentido se tiene el siguiente

Lema 5.8. La correspondencia  $\chi: SU(2,2) \longrightarrow \text{Diff}(U(2)), T \longmapsto \chi_T$ ,  
dada por  $\chi_{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} u := (Au+B)(Cu+D)^{-1}$  (siendo  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SU(2,2)$  y

$u \in U(2)$ ) es un homomorfismo de  $SU(2,2)$  en el grupo causal de  $(U(2), \mathcal{F})$ .

Demostración: [2], escolio 2.7, pág. 35-36.

Dado que el núcleo de dicho homomorfismo está formado por el subgrupo discreto de  $SU(2,2)$   $\{I, e^{i\pi/2}I, e^{i\pi}I, e^{3i\pi/2}I\} \approx \mathbb{Z}_4$ , el lema 5.8 proporciona, en forma fácilmente computable, la acción del grupo causal  $SU(2,2)/\mathbb{Z}_4$  sobre  $(U(2), \mathcal{F})$ :

Remitimos al apéndice para una descripción detallada de la acción sobre  $U(2)$  de los grupos uniparamétricos inducidos por los 15 campos fundamentales de  $SU(2,2)$ .

### 5.5. SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL MODELO DE SEGAL

El modelo cosmológico de Segal consiste básicamente (postulados P.1 a P.4 en 5.2) en la tripleta  $(M, \xi, Q)$ , con  $(M, \xi)$  un ETC orientado-tiempo que verifica la condición de causalidad y  $Q$  un cierto SRF global y completo sobre  $(M, \xi)$ , homogéneo e isótropo espacial y homogéneo temporal.

Por las razones apuntadas en 5.2, los postulados P.1 a P.4 conducen a la identificación  $(M, \xi) \cong (\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 + dh])$ . En cuanto al campo  $Q$  (cuyas curvas integrales van a representar las trayectorias promedio de la materia en el espacio-tiempo), ya se dijo en 5.2 que no se pierde generalidad adoptando  $Q = \partial_t$ .

La pregunta que se plantea ahora es la siguiente: dado un punto  $p$  sobre el rango de un observador  $\gamma$  de  $\partial_t$ , ¿cómo se asignan coordenadas a los puntos situados en un cierto entorno de  $p$ ? La pregunta es importante ya que, al ser el análisis de las observaciones experimentales esencialmente minkowskiano (esto es, en términos de  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$ ), el problema es cómo "transferir" los sucesos de interés en  $(M, \xi)$  al espacio vectorial conforme  $(T_p M, \xi_p)$  (identificado canónicamente con  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$ ).

Recordemos brevemente cómo se construye el sistema de coordenadas locales asociadas a un observador en la teoría general de la relatividad. En ésta, el espacio-tiempo viene modelado por una variedad lorentziana  $(M, g)$ . Dado un observador  $\gamma: \mathbb{R} \supset \xi \longrightarrow M$  (curva temporal futura tal que  $g(\dot{\gamma}_x, \dot{\gamma}_x) = -1$ , no necesariamente geodésica) se construye el sistema de coordenadas locales asociado a  $\gamma$  de la manera siguiente ([13], 13.6; [1], 2.10):

- i) Se elige un punto  $c \in \xi$  como origen de tiempos propios (sobre la curva  $\gamma$  el tiempo propio viene dado por la longitud de arco).
- ii) Para cada valor  $a \in \xi$ , las geodésicas de  $g$  ortogonales a  $\dot{\gamma}_x(a)$

por el punto  $\gamma_a$  generan (localmente) una hipersuperficie espacial  $S_a$ . La validez de la construcción exige que por cada punto de la región "próxima" a  $\gamma\xi$  que se desea coordinatizar pase una sola de estas hipersuperficies (el tratamiento será pues tanto más local cuanto mayor sea la curvatura de la métrica  $g$  a lo largo de  $\gamma\xi$  y cuanto más se aparte  $\gamma$  del comportamiento geodésico).

iii) Se eligen cuatro campos de vectores  $C^\infty$  sobre  $\gamma$ ,  $e_\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) ortonormales y con  $e_0 = \dot{\gamma}_*$ .

iv) Cada suceso  $A$  en las proximidades de  $\gamma\xi$  puede ser localizado por medio de cuatro coordenadas:

$x^0 = a - c$  (siendo  $S_a$  la hipersuperficie espacial por  $A$ )  
 $x^i$  ( $i=1,2,3$ ) viene dada por la coordenada "espacial"  $i$ -ésima de  $A$  dada por la carta normal (en torno a  $\gamma_a$ ) asociada a la base  $\{e_\mu(\gamma_a)\}$  de  $T_{\gamma_a}M$  y a la exponencial de la conexión de Levi-Civita  $\nabla^g$ .

Pero volvamos al modelo cosmológico de Segal  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h], \partial_t)$  y consideremos la métrica lorentziana inducida  $g^{\partial_t} \in \mathcal{C}$  (lema 3.4), que no es otra sino  $-dt^2 \oplus h$ . Dado un observador  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  de  $\partial_t$ , es inmediato ver (como consecuencia de ser  $\partial_t$  un SRF homogéneo temporal) que las coordenadas locales asociadas a  $\gamma$  en el sentido arriba indicado coinciden (a menos de traslaciones en  $x^0$ , y siempre que la elección de los campos "espaciales"  $e_i$  ( $i=1,2,3$ ) sea la adecuada) con las que asignaría la carta normal (en torno a cualquier punto  $p$  del rango de  $\gamma$ ) asociada a la base  $\{e_\mu(p)\}$  de  $T_pM$  y a la exponencial de  $-dt^2 \oplus h$  (dicha carta normal toma la forma  $(Id, x)$ , siendo  $x$  una carta normal de  $h$  sobre  $S^3$ ). Sobre la variedad métrica  $(\mathbb{R} \times S^3, g^{\partial_t})$ , la exponencial de  $g^{\partial_t}$  (o, más concretamente, la inversa de dicha exponencial en la región  $\mathcal{V}$  sobre la que ésta es un difeomorfismo) aparece así como la aplicación-clave que coordinatiza la variedad para los observadores de  $\partial_t$ .

Lema 5.9. Sea la variedad lorentziana  $(\mathbb{R} \times S^3, g^{\partial t} = -dt^2 \oplus h)$ . Sea  $\tilde{U}(2)$  el grupo de Lie recubridor universal de  $U(2)$ ;  $\mathbb{R} \times S^3$  y  $\tilde{U}(2)$  son difeomorfos como variedades (lemas 5.4 y 5.7.b). Pues bien, la exponencial  $\text{Exp}_e^{-dt^2 \oplus h}$  asociada a  $g^{\partial t}$  en torno a la identidad de  $\tilde{U}(2)$  coincide con la exponencial  $\exp_{\tilde{U}(2)}$  como grupo de Lie.

Demostración: Sobre  $S^3 \approx SU(2)$  la única estructura riemanniana invariante bajo traslaciones a izquierdas y a derechas y bajo el difeomorfismo  $SU(2) \rightarrow SU(2), g \mapsto g^{-1}$  es precisamente  $h$ . Su conexión de Levi-Civita  $\nabla^h$  deberá coincidir con la llamada "conexión-(0)" (definida sobre cualquier grupo de Lie conexo, ver [15], II, 1.3, pág. 104), ya que ésta es la única conexión que es invariante bajo traslaciones a izquierdas y a derechas y bajo el difeomorfismo-inversión ([15], II. ejercicio A, 6).

Se sabe también ([15], II, 1.3, pág. 104) que la exponencial  $\text{Exp}_e^{\nabla^{(c)}}$  de la conexión-(0) en torno a la identidad del grupo de Lie en cuestión  $G$  coincide con la exponencial  $\exp_G$  como grupo de Lie; por tanto, se tiene

$$\text{Exp}_I^h = \exp_{SU(2)}$$

Ahora bien, es claro que, sobre el grupo aditivo  $\mathbb{R}$ , la exponencial  $\text{Exp}_0^{-dt^2}$  en torno a la identidad coincide con la exponencial  $\exp_{\mathbb{R}}$  como grupo de Lie.

De donde se deduce que (en torno a  $e \equiv (0, I) \in \tilde{U}(2)$ ):

$$\text{Exp}_e^{-dt^2 \oplus h} = \text{Exp}_0^{-dt^2} \times \text{Exp}_I^h = \exp_{\mathbb{R}} \times \exp_{SU(2)} \equiv \exp_{\tilde{U}(2)}$$

Nota: El grupo de isometrías de  $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$  es un grupo de Lie a 7 parámetros. Por ser éste transitivo sobre  $\mathbb{R} \times S^3$ , no se pierde generalidad tomando como punto  $p$  sobre el rango de  $\gamma$  la identidad  $e = (0, I)$  en  $\tilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \times S^3$ . Recordemos que la aplicación  $\exp_{\tilde{U}(2)}$  se discute en el apéndice y que su inversa

viene dada (en cartas adecuadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ) sobre

$\mathbb{R}^4 \simeq iH(2)$  y  $(t, \rho, \theta, \varphi)$  sobre  $\mathbb{R} \times S^3 \simeq \tilde{U}(2)$  por las expresiones

$$\begin{cases} x^0 = t \\ x^r = \rho \\ x^\theta = \theta \\ x^\varphi = \varphi \end{cases}$$

- lleva el abierto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R} \times S^3$  difeomórficamente sobre el abierto  $\mathcal{V}_1 \subset \mathbb{R}^4$  (con  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}_1$  definidos respectivamente por

$$\begin{cases} -\infty < t < \infty \\ 0 \leq \rho < \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -\infty < x^0 < \infty \\ 0 \leq x^r < \pi \\ 0 \leq x^\theta \leq \pi \\ 0 \leq x^\varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Pero en el modelo cosmológico de Segal no hay una métrica que posea un significado físico intrínseco sobre el espacio-tiempo. ¿Cómo coordinatizan pues la variedad los observadores de  $\partial_t$ ? El criterio de Segal es que esta coordinatización viene dada por la aplicación  $s \circ j: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \times S^3$  (más concretamente, por la inversa de dicha aplicación en la región sobre la que ésta es un difeomorfismo). Recordemos que la aplicación  $s \circ j$  ha sido discutida al final del apartado 5.3 y que su inversa

- viene dada (en cartas adecuadas  $(x^0, x^r, x^\theta, x^\varphi)$  sobre  $\mathbb{R}^4$  y  $(t, \rho, \theta, \varphi)$  sobre  $\mathbb{R} \times S^3$ ) por las expresiones

$$\begin{cases} x^0 = \frac{2 \operatorname{sen} t}{\cos t + \cos \rho} \\ x^r = \frac{2 \operatorname{sen} \rho}{\cos t + \cos \rho} \\ x^\theta = \theta \\ x^\varphi = \varphi \end{cases}$$

- lleva el abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times S^3$  difeomórficamente sobre  $\mathbb{R}^4$  (con  $\mathcal{U}$  definido por

$$\begin{cases} -\pi < t + \rho < \pi \\ -\pi < t - \rho < \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ \end{matrix} \right) )$$

Esta es la coordinatización de  $\mathbb{R} \times S^3$  que Segal postula para los observadores de  $\partial_t$ . Al respecto hay que hacer las siguientes observaciones:

- i) En un principio, tan razonable resulta en el modelo de Segal postular una coordinatización vía  $\exp_{\tilde{U}(2)}$  como postularla vía  $(s \circ j)$ .
- ii) Pero la aplicación  $(s \circ j)$  no sólo es un difeomorfismo de todo  $\mathbb{R}^4$  sobre su imagen  $\mathcal{U}$  (a diferencia de lo que ocurre con la aplicación  $\exp_{\tilde{U}(2)}$ , que sólo proporciona un difeomorfismo de un cierto entorno  $\mathcal{V}_1$  del origen de  $\mathbb{R}^4$  sobre su imagen  $\mathcal{V}$ ), sino que además es globalmente causal según ya comentamos antes del lema 5.5 (a diferencia de lo que ocurre con la aplicación  $\exp_{\tilde{U}(2)}$ , que sólo es localmente causal, ver [2], escolio 2.3). Desde el punto de vista de la causalidad, la segunda coordinatización parece pues poseer "mejores" propiedades.
- iii) De las expresiones en coordenadas de  $\exp_{\tilde{U}(2)}$  y  $(s \circ j)$  (véase las fórmulas que acabamos de escribir; véase también el apéndice) se deduce fácilmente que, en regiones próximas al punto de observación, ambas coordinatizaciones arrojan el mismo resultado (hasta términos de segundo orden en las coordenadas). Por tanto, razona Segal, será a las observaciones experimentales de sucesos que tienen lugar en regiones remotas a las que habría que acudir para encontrar validez a una u otra coordinatización.
- iv) Segal sostiene, en este sentido, que la coordinatización vía  $(s \circ j)$ :
  - a) Predice un desplazamiento al rojo cosmológico. Ello no es desde luego posible si se coordinatiza vía  $\exp_{\tilde{U}(2)}$  ya que, en tal caso, el espacio-tiempo puede describirse mediante el modelo

(métrico) estático de Einstein  $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$ .

- b) Ajusta los datos experimentales del desplazamiento al rojo cosmológico mejor de lo que lo hacen los modelos (métricos) 'expansivos' clásicos.

Sin entrar en las cuestiones relativas a b) (véase [11]), veremos en el capítulo 6 que en realidad la coordinatización vía  $(s \circ j)$  no predice de hecho ningún tipo de desplazamiento al rojo cosmológico.

Pero antes de entrar en el análisis del supuesto desplazamiento al rojo cosmológico en el modelo de Segal (con una coordinatización local vía  $(s \circ j)$  para los observadores de  $Q = \partial_t$ ) vamos a ver cómo se incorpora esta coordinatización al lenguaje de los sistemas de referencia desarrollado en el capítulo 3.

Lema 5.10. Sea  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  el ETC orientado-tiempo del modelo de Segal. Sea el difeomorfismo  $(s \circ j): \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times S^3$  a que acabamos de hacer referencia. Definamos sobre  $\mathcal{U}$  el campo  $\omega := (s \circ j)_* \partial_{x^i}$  ((siendo  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  la carta estándar en  $\mathbb{R}^4$ ). Entonces se tiene:

- i) La métrica lorentziana  $g^{\mathcal{Q}}$  inducida sobre  $\mathcal{U}$  (lema 3.4) resulta ser  $g^{\mathcal{Q}} = F(-dt^2 \oplus h)|_{\mathcal{U}}$ , con

$$F := \left( \cos^2\left(\frac{t+\rho}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t-\rho}{2}\right) \right)^{-1}$$

- ii)  $\mathcal{Q}$  es un SRF homogéneo temporal.  
 iii) La exponencial  $\text{Exp}_e^{F(-dt^2 \oplus h)}$  asociada a  $g^{\mathcal{Q}}$  en torno a la identidad de  $\tilde{U}(2)$  ( $\cong$  punto de  $\mathbb{R} \times S^3 \approx \tilde{U}(2)$  de coordenadas  $(t=0, \rho=0, \theta=0, \psi=0)$ ) coincide con la aplicación  $(s \circ j)$ .  
 iv) El campo  $\mathcal{Q}$  verifica

$$\mathcal{Q} = \left( \frac{1}{2}(1 + \cos\theta \cos\rho) \partial_t - \frac{1}{2} \text{sen}\theta \text{sen}\rho \partial_\rho \right) |_{\mathcal{U}}$$

Demostración:

- i) Dado que  $(s \circ j)^{-1*} \eta = F(-dt^2 \oplus h)$  (lema 5.5, ii), se tiene:

$$F(-dt^2 \oplus h)(\omega, \omega) = \eta((s \circ j)_*^{-1} \omega, (s \circ j)_*^{-1} \omega) = \eta(\partial_{x^0}, \partial_{x^0}) = -1$$

ii) Puesto que  $(s \circ j)$  es causal,  $Q$  es un SR.

Dado que  $g^Q(\omega, \cdot) = \eta((s \circ j)_*^{-1} \omega, (s \circ j)_*^{-1} \cdot) = -dx^0$ ,  $Q$  es sincronizable a tiempo propio con función tiempo-propio

$$x^0 \circ (s \circ j)^{-1} = \frac{2s \operatorname{ent}}{\operatorname{cost} + \operatorname{cos} \rho}$$

Pero además  $Q$  es un factorizador completo de  $\mathcal{U}$  vía

$$\mathcal{F} := (s \circ j): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{U}.$$

Dado que  $(s \circ j)^* g^\omega = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$ ,  $Q$  es homogéneo temporal.

iii) Es trivial, dado que  $(s \circ j): (\mathbb{R}^4, \eta) \longrightarrow (\mathcal{U}, F(-dt^2 \oplus h)|_{\mathcal{U}})$  es una isometría.

iv) Escribiendo  $Q = (f \partial_t + g \partial_\rho)|_{\mathcal{U}}$ , y teniendo en cuenta

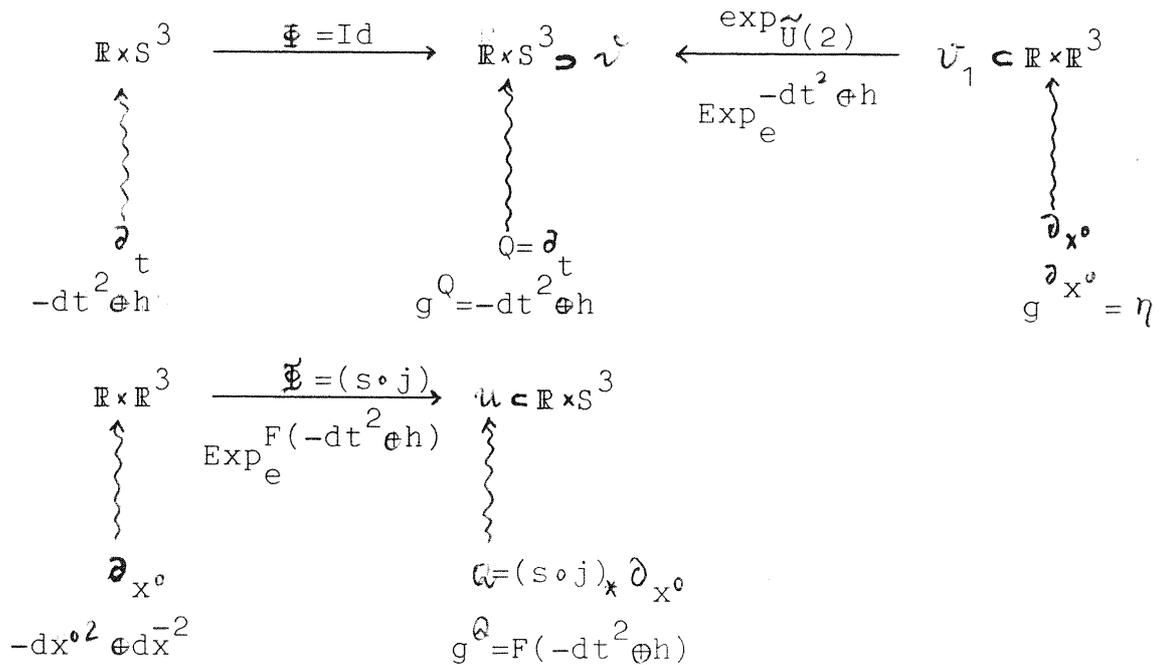
$$\begin{cases} \frac{\partial x^0}{\partial t} = 2 \frac{1 + \operatorname{cost} \operatorname{cos} \rho}{(\operatorname{cost} + \operatorname{cos} \rho)^2} = \frac{\partial x^r}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x^r}{\partial t} = 2 \frac{s \operatorname{ent} \operatorname{sen} \rho}{(\operatorname{cost} + \operatorname{cos} \rho)^2} = \frac{\partial x^0}{\partial \rho} \end{cases}$$

y la identidad  $(1 + \operatorname{cost} \operatorname{cos} \rho)^2 - (s \operatorname{ent} \operatorname{sen} \rho)^2 = (\operatorname{cost} + \operatorname{cos} \rho)^2$ , se llega a la expresión deseada.

El lema anterior ofrece una nueva perspectiva sobre el modelo cosmológico de Segal. En efecto, los observadores de  $Q = \partial_t$  coordinatizan (localmente) la variedad espacio-tiempo  $\mathbb{R} \times S^3$  esencialmente en la misma forma en que se hace en la teoría general de la relatividad, esto es, vía la exponencial asociada a una cierta métrica lorentziana compatible con la estructura conforme  $[-dt^2 \oplus h]$ . Lo novedoso del modelo no está pues tanto en la "forma de coordinatizar" como en la elección de la métrica; Segal postula que 'las mediciones locales antropomórficamente posibles vienen representadas por variables dinámicas planas y no curvas, mientras que el análisis y la dinámica "verdaderos", no antropomórficos, son curvos y no planos' ([2], pág. 75; aquí el adjetivo "plano" se refiere obviamente al hecho de que  $F(-dt^2 \oplus h)$  es una métrica lorentziana plana,

mientras que  $(-dt^2 \oplus h)$  no lo es), lo que equivale a decir que cada observador de  $Q = \partial_t$  se sitúa observacionalmente "como si" en realidad el SRF del que él es curva integral fuera el correspondiente  $\mathcal{Q}$  centrado en el punto de observación y no  $Q$ .

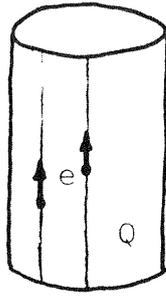
El siguiente diagrama resume en cierto modo lo que hemos visto acerca de los SRF  $Q$  y  $\mathcal{Q}$ :



Nota. Los difeomorfismos  $\mathbb{F}, \mathbb{F}$  son los que dotan a los campos  $Q, \mathcal{Q}$  del carácter de factorizadores homogéneos-temporales. Las exponenciales  $\text{Exp}_e^{g^Q}, \text{Exp}_e^{g^{\mathcal{Q}}}$  (esta última coincide con  $\mathbb{F}$ ) inducen las respectivas coordinatizaciones.

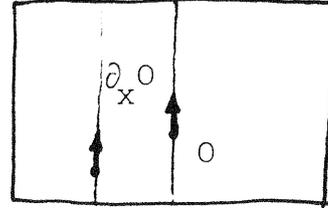
Finalmente el siguiente dibujo ilustra la transferencia a  $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$  vía  $\exp_{\tilde{U}(2)}$  (respectivamente, a  $(\mathcal{U}, F(-dt^2 \oplus h)|_{\mathcal{U}})$  vía  $(s \circ j)$ ) del campo  $\partial_{x^0}$  sobre el espacio Minkowskiano donde tiene lugar el análisis de las observaciones experimentales (véase [6], pág. 122).

$(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$



$$\exp_{\tilde{U}(2)} = \text{Exp}_e^{-dt^2 \oplus h}$$

$(\mathbb{R}^4, \eta)$



$(U, F(-dt^2 \oplus h)|_u)$



$$(s \circ j) = \text{Exp}_e^{F(-dt^2 \oplus h)|_u}$$

CAPITULO 6

¿HAY DESPLAZAMIENTO AL ROJO EN EL MODELO DE SEGAL?

Como ya hemos visto en el capítulo 4, un ETC orientado-tiempo  $(M, \mathcal{E})$  en el que hay definido un SRF  $Q$  global, cuyas curvas integrales representen las trayectorias de la materia en promedio, proporciona un marco adecuado para analizar el desplazamiento al rojo cosmológico (esto es, entre observadores de  $Q$ ). El modelo de Segal (véase capítulo 5) se ajusta a este esquema; en este sentido el siguiente teorema es el resultado más importante de este trabajo.

Teorema 6.1. Sea el modelo cosmológico de Segal  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h], \partial_t)$ . Sean  $\gamma$  y  $\gamma'$  dos observadores de  $\partial_t$ . Entonces la razón de **tiempos propios** para la radiación emitida por  $\gamma$  y recibida por  $\gamma'$  es igual a 1.

Demostración: Se sigue inmediatamente del carácter homogéneo temporal del SRF  $\partial_t$  y del teorema 4.1.

Nota. Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  arbitrario, la posible no unicidad de los trayectos seguidos por la luz entre  $\gamma t_0$  y el observador  $\gamma'$  no altera obviamente para nada el resultado anterior.

El teorema anterior nos dice que, en el modelo cosmológico de Segal, no existe desplazamiento al rojo cosmológico.

¿Cómo se compagina lo anterior con la afirmación de I. E. Segal de que en su modelo existe tal desplazamiento al rojo? En nuestra opinión, ello tiene que ver con una concepción equivocada por parte de Segal de lo que significa el desplazamiento al rojo. En el resto de este capítulo 6 vamos a analizar en detalle la demostración (?) que Segal hace de la existencia de dicho desplazamiento en su modelo; y lo haremos siguiendo una triple línea de argumentación.

Nota previa

- i) En lo sucesivo, identificaremos los observadores  $\gamma$  y  $\gamma'$  de  $Q \cong \partial_t$  con una galaxia típica y con la Tierra, respectivamente (véase §4.1).
- ii) Designaremos por  $G$  un punto del rango de  $\gamma$  (correspondiente a un cierto instante de tiempo propio  $\tau_0$ ,  $\gamma\tau_0 = G$ ); sin pérdida de generalidad podemos tomar  $t(G) = \rho(G) = \theta(G) = \psi(G) = 0$ . Supondremos que, en torno al punto  $G$ , la galaxia emite radiación que es captada en la Tierra en torno a un punto del rango de  $\gamma'$  que designaremos por  $T$ . Si consideramos la trayectoria de la radiación entre  $G$  y  $T$  con la parametrización que la hace (véase §4.1) geodésica de la métrica lorentziana global  $g^{\partial t}$ , llamaremos  $\lambda$  a dicha trayectoria así parametrizada. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que dicha propagación se realiza a  $\theta = \psi = \text{constante} = 0$  (esto es, a  $u^1 = u^2 = \text{constante} = 0$ ), por lo que podremos tomar  $\lambda$  como curva integral del campo (geodésico)  $\partial_t + \partial_\rho$ . Eligiendo  $\lambda_0 = G$ ,  $\lambda_\alpha = T$ , las coordenadas del punto  $T$  resultarán ser  $t(T) = \rho(T) = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ),  $\theta(T) = \psi(T) = 0$ .
- Por último, designaremos por  $P$  el punto sobre el rango de  $\gamma$  de coordenadas  $t(P) = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ),  $\rho(P) = \theta(P) = \psi(P) = 0$ .
- iii) Denominaremos carta-Segal centrada en  $G$  a la aplicación  $(s \circ j)_G^{-1} : \mathbb{R} \times S^3 \supset \mathcal{U}_G \longrightarrow \mathbb{R}^4$  que fue discutida en §5.3 y §5.5. El subíndice  $G$  hace referencia a que dicha aplicación toma el punto  $G$  como origen de coordenadas. Designaremos por  $(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)$  coordenadas cartesianas en el  $\mathbb{R}^4$  de la carta-Segal centrada en  $G$  y por  $\mathcal{O}_G$  el campo local (con dominio  $\mathcal{U}_G$ ) definido por dicha carta (véase lema 5.10).
- Cuando nos refiramos a la carta-Segal centrada en  $P$  utilizaremos las notaciones  $(s \circ j)_P^{-1}$ ,  $(x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3)$ ,  $\mathcal{U}_P$ ,  $\mathcal{O}_P$ ; y análogamente para el punto  $T$ .

El punto de vista en favor de la existencia de desplazamiento al rojo cosmológico en el modelo de Segal podría resumirse de la siguiente manera:

Si el observador  $\gamma'$  coordinatizara la variedad mediante la exponencial asociada a  $g^Q = -dt^2 \oplus h$ , las curvas integrales de  $Q$  (que representan las trayectorias de la materia en promedio) se corresponderían sobre  $\mathbb{R}^4$  de la carta con las curvas integrales del campo  $\partial_{x^0}$ : el cosmos aparecería "estático" al observador  $\gamma'$ .

Pero según postula Segal en su modelo (véase §5.5),  $\gamma'$  coordinatiza la variedad mediante la aplicación  $(s \circ j)$ , lo que implica que las curvas integrales de  $Q$  se corresponden (véase apéndice A3-d) sobre el  $\mathbb{R}^4$  de la carta con las del campo  $\left[1 + \frac{\eta(x, x)}{4}\right] \partial_{x^0} + \frac{x^c}{2} S$ : el cosmos no aparece estático al observador  $\gamma'$  (véase más adelante, apartado B).

Sería pues esta coordinatización alternativa (la única "antropomórficamente posible" según postula Segal), la responsable de que apareciera un desplazamiento al rojo cosmológico.

Vamos a exponer a continuación tres tipos de argumentos que prueban que el punto de vista arriba indicado es en realidad erróneo y que corroboran el resultado obtenido en el teorema 6.1.

A) El primer argumento es de tipo estructural. El punto de vista anterior no puede ser correcto, simplemente porque diferentes coordinatizaciones (más o menos "subjetivas", aunque sólo una quizás "antropomórficamente posible") de la variedad no pueden alterar el resultado ("objetivo", en cuanto ligado a las nociones de tiempo propio sobre  $\gamma$  y sobre  $\gamma'$ ) de que la relación de tiempos propios  $r$  (véase definición 4.1) entre los observadores  $\gamma$  y  $\gamma'$  de  $Q = \partial_t$  depende exclusivamente

-del instante  $\tau_0$  (de tiempo propio sobre  $\gamma$ ) en que se realiza la emisión, y

-de la función  $C^\infty$  biyectiva  $f$  entre cierto intervalo (de tiempo propio sobre  $\gamma$ ) en torno a  $\tau_0$  y otro intervalo de tiempo propio sobre  $\gamma'$ , función que garantiza la "conectabilidad-vía-luz" de  $\gamma$  y  $\gamma'$  para instantes de emisión próximos a  $\tau_0$ ,

valiendo por tanto  $r=1$  (teorema 6.1), independientemente de cómo el observador-terrestre "vea" las restantes curvas integrales de  $Q=\partial_t$ .

Nota. Argumentar que, más que coordinatizar la variedad vía  $(s, j)$ , el observador terrestre "observa la materia en promedio como si ésta siguiese las curvas integrales del campo  $\mathcal{Q} := (s \circ j)_* \tilde{\partial}_x$ " carece simplemente de sentido; porque, o bien las trayectorias de la materia en promedio son curvas integrales del SRF global  $Q=\partial_t$  (lo que viene directamente implicado por los postulados del modelo de Segal; véase §5.2), o bien lo son del SRF local  $\mathcal{Q}$ , siendo ambas posibilidades excluyentes. De todas formas, y suponiendo que se renunciase al SRF global  $Q$  como aquél cuyas curvas integrales representan las trayectorias promedio de la materia en el espacio-tiempo, hay que hacer notar que también  $\mathcal{Q}$  es homogéneo temporal (véase lema 5.10), con lo que la conclusión del teorema 6.1 sigue siendo válida para cualesquiera observadores de  $\mathcal{U}$  (en realidad, todo campo de la forma  $\mathcal{A}_* \tilde{\partial}_x$ , con  $\mathcal{A}: (\mathbb{R}^4, [\eta]) \longrightarrow (\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  un difeomorfismo causal sobre su imagen, resulta ser un SRF homogéneo temporal).

- B) El segundo argumento considera la apariencia observacional para  $T$  de la trayectoria espacio-temporal de  $G$ . Se trata de analizar en qué sentido el cosmos no aparece estático al observador  $\gamma'$ . Para ello calcularemos, en el punto  $G$ , el jacobiano del cambio de cartas-Segal centradas en  $G$  y  $T$  (suponiendo que cada uno de estos puntos pertenece al dominio de definición de la carta-Segal centrada en el otro). Dichas cartas vienen dadas, en coordenadas estándar sobre los  $\mathbb{R}^4$  respectivos, por (véase final de §5.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G^0 = \frac{2\text{sen}\theta}{\text{cost}+\text{cos}\rho} \\ x_G^1 = \frac{2\text{sen}\rho}{\text{cost}+\text{cos}\rho} \text{sen}\theta\text{sen}\varphi \\ x_G^2 = \frac{2\text{sen}\rho}{\text{cost}+\text{cos}\rho} \text{sen}\theta\text{cos}\varphi \\ x_G^3 = \frac{2\text{sen}\rho}{\text{cost}+\text{cos}\rho} \text{cos}\theta \end{array} \right. \text{sen}\theta\text{sen}\varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} x_T^0 = \frac{2\text{sen}(t-\alpha)}{\text{cos}(t-\alpha)+\text{cos}(\rho-\alpha)} \\ x_T^1 = \frac{2\text{sen}(\rho-\alpha)}{\text{cos}(t-\alpha)+\text{cos}(\rho-\alpha)} \text{sen}\theta\text{sen}\varphi \\ x_T^2 = \frac{2\text{sen}(\rho-\alpha)}{\text{cos}(t-\alpha)+\text{cos}(\rho-\alpha)} \text{sen}\theta\text{cos}\varphi \\ x_T^3 = \frac{2\text{sen}(\rho-\alpha)}{\text{cos}(t-\alpha)+\text{cos}(\rho-\alpha)} \text{cos}\theta \end{array} \right.$$

Un sencillo cálculo conduce a

$$\frac{\partial(x_T^0, x_T^1, x_T^2, x_T^3)}{\partial(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)} \Big|_G = \begin{pmatrix} \frac{1+\text{cos}^2\alpha}{2\text{cos}^2\alpha} & 0 & 0 & \frac{\text{sen}^2\alpha}{2\text{cos}^2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\text{sen}^2\alpha}{2\text{cos}^2\alpha} & 0 & 0 & \frac{1+\text{cos}^2\alpha}{2\text{cos}^2\alpha} \end{pmatrix}$$

Esta transformación (lineal) puede considerarse (bidimensionalmente, respecto de las coordenadas  $x_G^0, x_G^3$ ) como la composición de una dilatación en un factor  $\frac{1}{\text{cos}\alpha}$  y de la transformación de Lorentz (bidimensional)

$$\frac{1}{2\text{cos}\alpha} \begin{pmatrix} 1+\text{cos}^2\alpha & \text{sen}^2\alpha \\ \text{sen}^2\alpha & 1+\text{cos}^2\alpha \end{pmatrix}$$

Comparando esta última con la transformación-Lorentz estándar

$$\frac{\partial(x_T^0, x_T^3)}{\partial(x_G^0, x_G^3)} = \begin{pmatrix} \delta & \delta\beta \\ \delta\beta & \delta \end{pmatrix}$$

(la cual se interpreta a su vez diciendo que el origen de las coordenadas  $x_G$  se mueve con una velocidad  $\beta$  ( $-1 < \beta < 1$ ) respecto del origen de las coordenadas  $x_T$  en la dirección de la coordenada  $x_T^3$ ; y siendo  $\delta \equiv (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ ; véase ejemplo 4.1), se obtiene

$$\beta = \frac{\text{sen}^2\alpha}{1+\text{cos}^2\alpha}, \quad \delta = \frac{1+\text{cos}^2\alpha}{2\text{cos}\alpha};$$

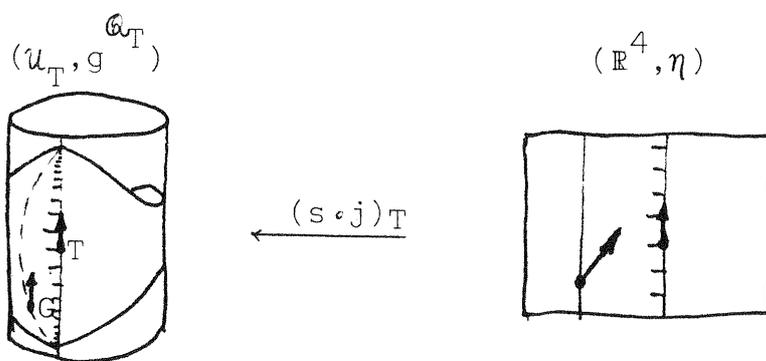
esta velocidad relativa  $\beta > 0$  en la dirección de la coordenada  $x_T^3$  supone, dado que  $x_T^3(G) = -\text{tg}\alpha < 0$ , un ACERCAMIENTO APARENTE DE G CON RESPECTO A T.

Así pues, la apariciencia observacional para T de la trayectoria espacio-temporal de G (en  $t = \tau = 0$ ) vendría caracterizada por

- una dilatación de los valores medidos para las coordenadas  $(x_T^0, x_T^r)$  de un suceso próximo a G, en relación con los valores para las coordenadas  $(x_G^0, x_G^r)$  de dicho suceso ( $\equiv$  contracción de las escalas que definen  $(x_T^0, x_T^r)$  en relación con las que definen  $(x_G^0, x_G^r)$ ), en un factor  $\frac{1}{\cos\alpha}$
- un acercamiento radial relativo de G con velocidad

$$\beta_r = \frac{-\text{sen}^2\alpha}{1 + \text{cos}^2\alpha};$$

ello se ilustra en el siguiente diagrama (véase final del apartado 5.5):



¿Cuál sería el efecto observacional en cuanto al desplazamiento al rojo de la radiación emitida en G y recibida en T? Es claro que se tendría

$$r_{\text{dilatación}} + r_{\text{acercamiento}} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot r_{\text{acercamiento}}$$

Ahora bien, el factor  $r_{\text{acercamiento}}$  ha sido calculado en el ejemplo 4.1 y el resultado (bien conocido) es

$$r_{\text{acercamiento}} = \gamma(1 + \beta_r) = \frac{1 + \text{cos}^2\alpha}{2\text{cos}\alpha} \left(1 - \frac{\text{sen}^2\alpha}{1 + \text{cos}^2\alpha}\right) = \text{cos}\alpha;$$

con lo que resulta claro que  $r_{\text{dilatación} + \text{acercamiento}} = 1$ . Vemos de nuevo que no existe desplazamiento al rojo cosmológico en el modelo de Segal.

Nota. En [2], III-7, Segal lleva a cabo casi hasta el final el cálculo que acabamos de hacer, llegando a dar la expresión del jacobiano

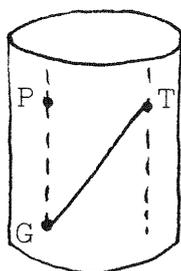
$$\left. \frac{\partial(x_T)}{\partial(x_G)} \right|_G$$

Sorprende que Segal obtenga ([2], III-6)

$$r = \frac{2}{1+\cos\alpha} = 1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

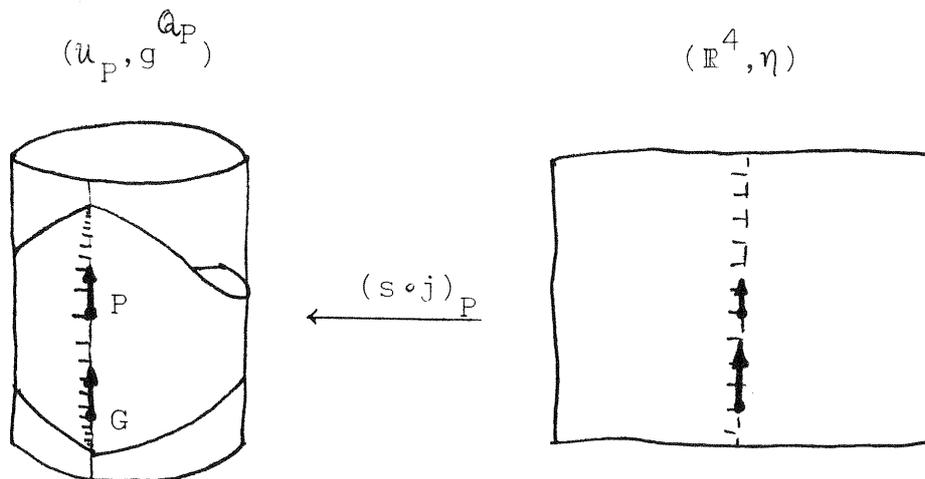
en nuestro esquema ello equivaldría a considerar que G y T se hallaran sobre la misma curva integral de  $Q = \partial_t$ . En efecto:

consideremos el punto P del rango de  $\gamma$ , de coordenadas  $t(P) = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ),  $\rho(P) = \theta(P) = \varphi(P) = 0$ . Se tiene:



$$\left. \frac{\partial(x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3)}{\partial(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)} \right|_G = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1+\cos\alpha} \end{pmatrix}$$

Así pues, la apariencia observacional para P (en  $t = \alpha$ ,  $\rho = 0$ ) de la trayectoria espacio-temporal de G vendría caracterizada por una dilatación de los valores medidos para las coordenadas  $(x_P^0, x_P^r)$  de un suceso próximo a G, en relación con los valores para las coordenadas  $(x_G^0, x_G^r)$  de dicho suceso ( $\equiv$  contracción de las escalas que definen  $(x_P^0, x_P^r)$  en relación con las que definen  $(x_G^0, x_G^r)$ ), en un factor  $\frac{2}{1+\cos\alpha}$ . Ello se ilustra en el siguiente diagrama:



Aceptando que  $r$  fuera el dado por este esquema, es claro que resultaría  $r = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$ .

Sin embargo, el fenómeno del desplazamiento al rojo tiene que ver no con una "evolución temporal" sino con una "propagación de luz". Este es a nuestro entender el error de Segal (véase apartado C).

C) El tercer argumento se basa en el análisis detallado del cálculo que hace Segal del supuesto desplazamiento al rojo en su modelo. En dicho cálculo "mecano-cuántico" (en el que

- el estado de un sistema físico viene descrito por un vector ( $\cong$  función de onda) del espacio de Hilbert de funciones (complejas) de cuadrado sumable definidas sobre las coordenadas espacio-temporales, y
- las variables dinámicas (posición, momento, energía) vienen descritas por operadores autoadjuntos en dicho espacio de Hilbert)

se estudia la "evolución temporal" del operador  $H_0 := \frac{1}{i} \mathcal{L}_G \cong \frac{1}{i} (s \circ j)_G \partial_{x_G^0}$  ( $\cong$  variable dinámica "energía aparente" con que el observador en G analizaría según Segal la radiación emitida desde él), debida al hamiltoniano  $H := \frac{1}{i} Q \cong \frac{1}{i} \partial_t$  ( $\cong$  variable dinámica "verdadera energía" sobre el espacio-tiempo de Segal), a lo largo de un intervalo  $\Delta t = \alpha$  ( $\cong$  diferencia de valores de  $t$  entre el punto G de emisión y el punto T de recepción). El operador

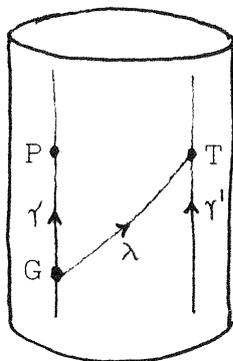
$H_0(\alpha) := e^{-iH\alpha} H_0 e^{iH\alpha}$  representaría según Segal la variable dinámica "energía aparente" con que el observador en T analizaría la radiación recibida en T procedente de G. Suponiendo que la función de onda que describe la radiación (onda plana en el tratamiento que hace Segal) es autoestado de  $H_0$  con autovalor  $\nu_E$  ( $\equiv$  frecuencia de emisión), Segal calcula una frecuencia de recepción  $\nu_R = \frac{1+\cos\alpha}{2} \nu_E$ ; con lo cual  $r = \frac{2}{1+\cos\alpha} = 1+\text{tg}^2 \alpha/2 > 1$ .

i) Como ya dijimos en 4.1, no parece que un análisis del desplazamiento al rojo cosmológico precise de un tratamiento cuántico. Vamos a ver a continuación que el cálculo "cuántico" de Segal posee un análogo "clásico" ( $\equiv$  geométrico) inmediato:

Evaluemos el siguiente cociente de productos escalares

$$R := \frac{g^{\partial_t}(\lambda_*, 0, \omega_G^G)}{g^{\partial_t}(\lambda_*, 0, \pi_{PG, \gamma}^g \omega_G^P)} = \frac{g^{\partial_t}((\partial_t + \partial_\rho)G, \omega_G^G)}{g^{\partial_t}((\partial_t + \partial_\rho)G, \pi_{PG, \gamma}^g \omega_G^P)}$$

siendo



- $\lambda: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$  la geodésica-luz futura de  $g^{\partial_t}$  entre  $\lambda 0 = G$  y  $\lambda \alpha = T$ , curva integral del campo  $(\partial_t + \partial_\rho)$  (véase nota al comienzo de este capítulo).

- $\pi_{PG, \gamma}^g$ , el transporte paralelo definido sobre  $\gamma$  por la conexión de Levi-Civita  $\nabla^{\partial_t}$  entre los puntos P y G.

Dado que  $\omega_G = \left( \frac{1}{2}(1 + \cos t \cos \rho) \partial_t - \frac{1}{2} \text{sen} t \text{sen} \rho \right) \Big|_{u_G}$  (lema 5.10.iv), y puesto que  $\nabla_{\partial_t} \partial_t = 0 = \nabla_{\partial_\rho} \partial_t$  (lema 3.10; recordar que  $Q \equiv \partial_t$  es homogéneo temporal; véase 5.2), se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\omega_G}^{\partial_t} \partial_t = 0; & \Rightarrow \nabla_{\partial_t}^{\partial_t} \omega_G = [\partial_t, \omega_G]; \Rightarrow \pi_{PG, \gamma}^g(\omega_G^P) = \phi_{-\alpha_*}^{\partial_t}(\omega_G^P) \equiv \\ & \equiv \phi_{-\alpha_*}^{\partial_t} \circ \omega_G \circ \phi_{\alpha}^{\partial_t}(G), \end{aligned}$$

siendo  $\phi_\alpha^{\partial_t}$  el difeomorfismo inducido, para valor  $\alpha$  del parámetro, por el campo  $\partial_t$ ; por lo dicho en el apéndice (A3-e), como el campo  $\partial_t$  pertenece al álgebra de Lie del grupo  $\widetilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \times S^3$ , se tendrá

$$\pi_{PG,\gamma}^{g \partial_t}(\omega_G^P) = e^{-\alpha \partial_t} \omega_G e^{\alpha \partial_t}(G) = e^{-iH\alpha} H_0 e^{iH\alpha}(G)$$

Por otra parte, si designamos por  $\tilde{\mathcal{L}}_{ab}$  ( $a, b = -1, 0, 2, 3, 4$ ) los generadores de  $\widetilde{SU}(2, 2)$  en su acción causal sobre  $\widetilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \times S^3$ , se tiene (véase apéndice, A3-d)

$$\partial_t = \tilde{\mathcal{L}}_{-10}, \quad \omega_G = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{L}}_{-10} + \tilde{\mathcal{L}}_{04});$$

con lo cual resulta

$$\pi_{PG,\gamma}^{g \partial_t}(\omega_G^P) = e^{-\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-10}} \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{L}}_{-10} + \tilde{\mathcal{L}}_{04}) e^{\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-10}}(G);$$

utilizando las relaciones de conmutación de los  $\tilde{\mathcal{L}}_{ab}$  (véase apéndice, A3-a) se obtiene

$$\begin{aligned} \pi_{PG,\gamma}^{g \partial_t}(\omega_G^P) &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{-10} + e^{-\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-10}} \tilde{\mathcal{L}}_{04} e^{\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-10}} \right\}(G) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{-10} - \text{sen} \alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-14} + \text{cos} \alpha \tilde{\mathcal{L}}_{04} \right\}(G); \end{aligned}$$

finalmente, teniendo en cuenta las expresiones de los  $\tilde{\mathcal{L}}_{ab}$  (véase apéndice, A3-c) y los valores  $u^0(G) = u^1(G) = u^2(G) = u^3(G) = 0$ , se llega a

$$\pi_{PG,\gamma}^{g \partial_t}(\omega_G^P) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_t - \text{sen} \alpha \cdot 0 + \text{cos} \alpha \partial_t \right\}(G) = \frac{1}{2}(1 + \text{cos} \alpha) \partial_t(G)$$

con lo cual se obtiene

$$R = \frac{g^{\partial_t}((\partial_t + \partial_\rho)G, \partial_t G)}{g^{\partial_t}((\partial_t + \partial_\rho)G, \frac{1}{2}(1 + \text{cos} \alpha) \partial_t G)} = \frac{2}{1 + \text{cos} \alpha}$$

Esta es la versión "clásica" del cálculo de Segal.

- ii) La comparación entre la definición dada para el factor R en (i) y la expresión obtenida para la razón de tiempos propios r en el corolario al lema 4.1

$$r = \frac{g^{\partial_t}(\lambda_* 0, \gamma_* \tau_0)}{g^{\partial_t}(\lambda_* 0, \pi_{TG}^g \partial_t \gamma'_*(f\tau_0))} \quad (\text{con } \gamma\tau_0=G, \gamma'_*(f\tau_0)=T)$$

pone de manifiesto las dos objeciones que hay que hacer al cálculo de Segal:

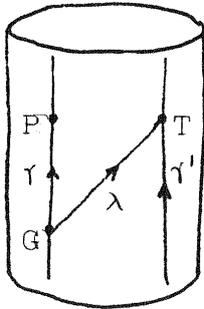
a) Como ya apuntamos en el apartado B de este capítulo, el desplazamiento al rojo no tiene nada que ver con una evolución temporal ( $\cong$  transporte entre los puntos P y G), sino con una propagación de luz ( $\cong$  transporte entre los puntos T y G). En la terminología de la mecánica cuántica, el operador  $H_0$  no es invariante bajo traslaciones espaciales, por lo que el operador que representa la variable dinámica "energía aparente" con que el observador en T analizará la radiación que le llega procedente de G será el resultado de hacer evolucionar "espacio-temporalmente" el operador  $H_0$ . Este es el punto débil del cálculo de Segal.

b) Carece de sentido suponer que  $\gamma$  y  $\gamma'$  siguen curvas integrales de  $\mathcal{Q}_G$ , ya que ambos observadores siguen curvas integrales de  $Q \equiv \partial_t$ . Lo anterior, sin embargo, no tiene incidencia (como veremos a continuación) en el cálculo del desplazamiento al rojo cosmológico (suponiendo resuelta satisfactoriamente la objeción (a)); ello es debido a que también  $\mathcal{Q}_G$  es homogéneo temporal (véase nota en el apartado A de este capítulo).

iii) En lo que sigue rehacemos el cálculo de Segal, subsanando el error mencionado en la objeción (a).

Evaluemos (según el esquema seguido en (i)) el cociente de productos escalares

$$R' := \frac{g^{\partial_t}(\lambda_* 0, \mathcal{Q}_G G)}{g^{\partial_t}(\lambda_* 0, \pi_{TG, \lambda}^{g \partial_t} \mathcal{Q}_G^T)} = \frac{g^{\partial_t}((\partial_t + \partial_\rho)G, \mathcal{Q}_G G)}{g^{\partial_t}((\partial_t + \partial_\rho)G, \pi_{TG, \lambda}^{g \partial_t} \mathcal{Q}_G^T)}$$



siendo

- $\lambda$ , como en (i)
- $\pi_{TG, \lambda}^{g \partial_t}$ , el transporte paralelo definido sobre  $\lambda$  por la conexión de Levi-Civita  $\nabla^{\partial_t}$  entre los puntos T y G.

Por los argumentos dados en (i) y puesto que  $\nabla_{\partial_\rho}^{\partial_t} \partial_\rho = 0$  ( $\partial_\rho$  es geodésico para  $\nabla^{\partial_t}$ , es inmediato comprobarlo) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{Q}_G}^{\partial_t} (\partial_t + \partial_\rho) = 0; &\Rightarrow \nabla_{(\partial_t + \partial_\rho)G}^{\partial_t} \mathcal{Q}_G = [\partial_t + \partial_\rho, \mathcal{Q}_G]; \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi_{TG, \lambda}^{g \partial_t} (\mathcal{Q}_G^T) &= \phi_{-\alpha}^{\partial_t + \partial_\rho} (\mathcal{Q}_G^T) \equiv \phi_{-\alpha}^{\partial_t + \partial_\rho} \circ \mathcal{Q}_G \circ \phi_{\alpha}^{\partial_t + \partial_\rho} (G); \end{aligned}$$

dado que  $(\partial_t + \partial_\rho)$  es (si nos restringimos a  $u^1 = u^2 = 0$ , como es el caso) un campo del álgebra de Lie del grupo  $\tilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \times S^3$ , se tendrá (véase A.3-e)

$$\pi_{TG, \lambda}^{g \partial_t} (\mathcal{Q}_G^T) = e^{-\alpha(\partial_t + \partial_\rho)} \mathcal{Q}_G e^{\alpha(\partial_t + \partial_\rho)} (G)$$

Teniendo en cuenta (véase apéndice, A.3-d) que

$$\partial_t = \tilde{\mathcal{L}}_{-10}, \quad \partial_\rho \Big|_{u^1=u^2=0} = \tilde{\mathcal{L}}_{34}, \quad \mathcal{Q}_G = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{L}}_{-10} + \tilde{\mathcal{L}}_{04}),$$

y utilizando las relaciones de conmutación de los  $\tilde{\mathcal{L}}_{ab}$  (véase apéndice, A.3-a), se obtiene

$$\begin{aligned} \pi_{TG, \lambda}^{g \partial_t} (\mathcal{Q}_G^T) &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{-10} + e^{-\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{34}} (e^{-\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-10}} \tilde{\mathcal{L}}_{04} e^{\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-10}}) e^{\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{34}} \right\} (G) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{-10} - \text{sen} \alpha e^{-\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{34}} \tilde{\mathcal{L}}_{14} e^{\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{34}} + \text{cos} \alpha e^{-\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{34}} \tilde{\mathcal{L}}_{04} e^{\alpha \tilde{\mathcal{L}}_{34}} \right\} (G) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathcal{L}}_{-10} - \text{sen} \alpha (\text{sen} \alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-13} + \text{cos} \alpha \tilde{\mathcal{L}}_{-14}) + \text{cos} \alpha (\text{sen} \alpha \tilde{\mathcal{L}}_{03} + \right. \\ &\quad \left. + \text{cos} \alpha \tilde{\mathcal{L}}_{04}) \right\} (G); \end{aligned}$$

finalmente, teniendo en cuenta las expresiones de los  $\tilde{\mathcal{L}}_{ab}$  (véase apéndice, A3-c) y los valores  $u^0(G)=u^1(G)=u^2(G)=u^3(G)=0$ , se llega a

$$\begin{aligned} \pi_{TG,\lambda}^{g \partial_t} (\omega_G^T) &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_t - \text{sen}^2 \alpha \partial_\rho - \text{sen} \alpha \cos \alpha \cdot 0 + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha \text{sen} \alpha \cdot 0 + \cos^2 \alpha \partial_t \right\} (G) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \cos^2 \alpha) \partial_t - \text{sen}^2 \alpha \partial_\rho \right\} (G) \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} R' &= \frac{g^{\partial_t} ((\partial_t + \partial_\rho)G, \partial_t G)}{g^{\partial_t} ((\partial_t + \partial_\rho)G, \frac{1}{2} \left\{ (1 + \cos^2 \alpha) \partial_t - \text{sen}^2 \alpha \partial_\rho \right\} (G))} = \\ &= \frac{-1}{-\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \alpha) - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

#### iv) Conclusión

La versión "clásica" ( $\cong$  geométrica) del cálculo de Segal (cálculo del factor R) arroja el resultado (véase (i))

$$R = \frac{2}{1 + \cos \alpha} \quad (\text{resultado de Segal})$$

La objeción (a) (véase (ii)) a dicho cálculo lleva a calcular el factor R' (en vez de R); se obtiene (véase (iii))

$$R' = 1$$

La objeción (b) (véase (ii)) a dicho cálculo lleva a calcular la razón r (en vez de R'); pero ya sabemos por el teorema 5.1 que se verifica  $r = 1$  (el que se obtenga  $R' = 1 = r$  era ya esperable; véase la Nota en el apartado A de este capítulo).

APENDICE

A.1. DEMOSTRACION DEL LEMA 2.1.b

Sea  $(M, \mathcal{C})$  una variedad conforme.

Sea  $\{U_i : i \in I\}$  un recubrimiento abierto de  $M$  tal que  $\forall U_i, \exists$  estructura semi riemanniana  $g_i$  definida en  $U_i$  compatible con  $\mathcal{C}$  (véase definición 2.1.b).

Por ser  $M$  paracompacta,  $M$  admite una partición de la unidad  $\{\varphi_i : i \in I\}$  subordinada a  $\{U_i\}$  (y con el mismo conjunto  $I$  de índices), esto es, una colección  $\{\varphi_i\}$  de funciones  $C^\infty$  tales que

- (i) El conjunto de soportes  $\{\text{sop } \varphi_i : i \in I\}$  es localmente finito
- (ii)  $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1, \forall p \in M$
- (iii)  $\varphi_i(p) \geq 0, \forall p \in M$  y  $\forall i \in I$
- (iii)  $\text{sop } \varphi_i \subset U_i, \forall i \in I$

Sea  $g := \sum_{i \in I} \varphi_i g_i$ ; es claro que  $g$  es un campo  $C^\infty$  de tensores de tipo  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  simétricos sobre  $M$ .

Por ser  $\{\text{sop } \varphi_i\}$  localmente finito, se tendrá:

$$\forall p \in M, g(p) = \varphi_{i_1}(p)g_{i_1}(p) + \dots + \varphi_{i_n}(p)g_{i_n}(p), \text{ para cierto conjunto finito } \{i_1, \dots, i_n\} \subset I$$

Debido a que  $g_\alpha \in \mathcal{C}|_{U_\alpha}$  ( $\alpha = i_1, \dots, i_n$ ), se tendrá

$$g_\alpha(p) = a_\alpha g_{i_n}(p), \text{ con } \mathbb{R} \ni a_\alpha > 0 \ (\alpha = i_1, \dots, i_n); \Rightarrow \\ \Rightarrow g(p) = (\varphi_{i_1}(p)a_{i_1} + \dots + \varphi_{i_{n-1}}(p)a_{i_{n-1}} + \varphi_{i_n}(p))g_{i_n}(p)$$

Al ser  $a_\alpha > 0, \varphi_\alpha \geq 0, \sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$  ( $\alpha = i_1, \dots, i_n$ ) se verifica

$$g(p) = ag_n(p), \text{ con } \mathbb{R} \ni a > 0$$

Por tanto  $g$  es una (pseudo)métrica global sobre  $M$  compatible con  $\mathcal{C}$ .

A.2. EL GRUPO  $\tilde{U}(2)$

a) Los grupos  $SU(2)$ ,  $U(2)$ ,  $\tilde{U}(2)$

Definiciones:

$$SU(2) := \{u_0 \in GL(2, \mathbb{C}) \mid u_0^+ = u_0^{-1} \text{ y } \det u_0 = 1\}$$

$$U(2) := \{u \in GL(2, \mathbb{C}) \mid u^+ = u^{-1}\}$$

Se tiene  $U(1) \times SU(2) / \mathbb{Z}_2 \approx U(2)$ ; este difeomorfismo se concreta en la identificación de  $(e^{i\pi}, u_0)$  y  $(e^{i0}, -u_0)$  con la misma matriz de  $U(2)$  (para cada  $u_0 \in SU(2)$ ).

$\tilde{U}(2)$  es el recubridor universal de  $U(2)$ .

Se tiene  $\mathbb{R} \times SU(2) \approx \tilde{U}(2)$  ( $\mathbb{R}$ , grupo aditivo).

Parametrizaciones:

$$\left. \begin{aligned} SU(2) \ni u_0 &= \begin{pmatrix} u^4 + iu^1 & -u^3 + iu^2 \\ u^3 + iu^2 & u^4 - iu^1 \end{pmatrix} \\ U(2) \ni u &= (u^{-1} + iu^0) \begin{pmatrix} u^4 + iu^1 & -u^3 + iu^2 \\ u^3 + iu^2 & u^4 - iu^1 \end{pmatrix} \\ \tilde{U}(2) \ni (t, u_0) &= (t, \begin{pmatrix} u^4 + iu^1 & -u^3 + iu^2 \\ u^3 + iu^2 & u^4 - iu^1 \end{pmatrix}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{con} \\ &u^1{}^2 + u^2{}^2 + u^3{}^2 + u^4{}^2 = 1 \\ &u^{-1}{}^2 + u^0{}^2 = 1 \\ &-\infty < t < \infty \end{aligned}$$

Cartas locales:

	<u>Sobre <math>SU(2)</math></u>	<u>Sobre <math>U(2)</math></u>	<u>Sobre <math>\tilde{U}(2)</math></u>
	$(e=I)$	$(e=I)$	$(e=(0, I))$
i)	$(u^1, u^2, u^3)$	$(u^0, u^1, u^2, u^3)$	$(t, u^1, u^2, u^3)$
	(con $-1 < u^\mu < 1$ ( $\mu=0, 1, 2, 3$ )) / $-\infty < t < \infty$ )		
ii)	$(\rho, \theta, \varphi)$	$(\chi, \rho, \theta, \varphi)$	$(t, \rho, \theta, \varphi)$
	(con $0 < \rho < \pi, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$ / $-\pi < \chi < \pi$ y $-\infty < t < \infty$ )		

Cambios de carta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \arcsen u^0 \\ \rho = \arcsen \sqrt{u^{1^2} + u^{2^2} + u^{3^2}} \\ \theta = \arcsen \frac{\sqrt{u^{1^2} + u^{2^2}}}{u^3} \\ \varphi = \arcsen \frac{u^1}{u^2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u^0 = \text{sen } \chi \\ u^1 = \text{sen } \rho \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ u^2 = \text{sen } \rho \text{sen } \theta \text{cos } \varphi \\ u^3 = \text{sen } \rho \text{cos } \theta \end{array} \right.$$

b) Algebras de Lie:

Base  $\{X_\mu^L\}$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) de campos sobre  $U(2)$  (respectivamente,  $\tilde{U}(2)$ ) invariantes a izquierda y tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i^L(e) = \partial_{u^i}(e) \equiv e_i \quad (i=1,2,3) \text{ y} \\ X_0^L(e) = \partial_\chi(e) \equiv e_0 \quad (\text{resp.}, X_0^L(e) = \partial_t(e) \equiv e_0) \end{array} \right.$$

se encuentra:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^L = \sqrt{1-\bar{u}^2} \partial_{u^1+u^3} \partial_{u^2-u^2} \partial_{u^3} \\ X_2^L = -u^3 \partial_{u^1} + \sqrt{1-\bar{u}^2} \partial_{u^2+u^1} \partial_{u^3} \\ X_3^L = u^2 \partial_{u^1-u^1} \partial_{u^2} + \sqrt{1-\bar{u}^2} \partial_{u^3} \\ X_0^L = \partial_\chi \quad (\text{resp.}, X_0^L = \partial_t) \end{array} \right. \quad \text{con } \bar{u}^2 = u^{1^2} + u^{2^2} + u^{3^2}$$

Se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} [e_i, e_j] = 2\varepsilon_{ijk} e_k \\ [e_0, e_j] = 0 \end{array} \right. \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

El conjunto  $\{e_1, e_2, e_3\}$  (resp.,  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ ) genera el álgebra de Lie  $SU(2)$  (resp., el álgebra  $U(2) \approx \tilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \oplus SU(2)$ ) que es isomorfa al álgebra  $A_0(2)$  (resp., al álgebra  $A(2)$ ), siendo:

$$\begin{aligned} A_0(2) &:= \{a_0 \in M(2, \mathbb{C}) \mid a_0^+ + a_0 = 0 \text{ y } \text{tr } a_0 = 0\} \equiv iH_0(2) \\ A(2) &:= \{a \in M(2, \mathbb{C}) \mid a^+ + a = 0\} \equiv iH(2) \end{aligned}$$

Dichos isomorfismos se consiguen identificando

$$e_{\mu} = i\sigma_{\mu} \quad (\mu=0,1,2,3), \text{ siendo:}$$

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Parametrizando  $A(2)$  en la forma

$$A(2), a \equiv ih = i \begin{pmatrix} h^0 + h^1 & h^2 + ih^3 \\ h^2 - ih^3 & h^0 - h^1 \end{pmatrix},$$

resulta que un elemento genérico de  $SU(2)$  (respectivamente,  $U(2) \approx \tilde{U}(2)$ ) podrá escribirse en la forma  $ih^j \sigma_j$  (respectivamente,  $ih^{\mu} \sigma_{\mu}$ ).

c) Exponenciales:

$$\exp_{SU(2)} a_0 = \sum_0^{\infty} \frac{1}{N!} [ih^j \sigma_j]^N = (\sigma_0 \cosh^r + i \frac{h^j}{h^r} \sigma_j \sinh^r)$$

introduciendo las notaciones

$$\begin{cases} h^r := (h^1{}^2 + h^2{}^2 + h^3{}^2)^{\frac{1}{2}} \\ h^{\theta} := \text{arctg}((h^1{}^2 + h^2{}^2)^{\frac{1}{2}} / h^3) \\ h^{\psi} := \text{arctg}(h^1 / h^2) \end{cases}$$

$$\exp_{U(2)} a = \exp_{U(1)} \underbrace{\left(\frac{\text{Tr}h}{2}\right)}_{h^0} \exp_{SU(2)} \underbrace{i\left(h - \frac{\text{Tr}h}{2}I\right)}_{a_0} =$$

$$= (\cosh^0 + i \sinh^0) \left( \sigma_0 \cosh^r + i \frac{h^j}{h^r} \sigma_j \sinh^r \right),$$

$$\exp_{\tilde{U}(2)} a = \left( \exp_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{\text{Tr}h}{2}\right)}_{h^0} \right), \exp_{SU(2)} \underbrace{i\left(h - \frac{\text{Tr}h}{2}I\right)}_{a_0} =$$

$$= (h^0, \left( \sigma_0 \cosh^r + i \frac{h^j}{h^r} \sigma_j \sinh^r \right))$$

Expresiones coordenadas de las exponenciales:

	Sobre $SU(2)$	Sobre $U(2)$	Sobre $\tilde{U}(2)$
i)	$u^j = \frac{h^j}{h^r} \operatorname{senh}^r$ $(j=1, 2, 3)$	$\begin{cases} u^0 = \operatorname{senh}^0 \\ u^j = \frac{h^j}{h^r} \operatorname{senh}^r \end{cases}$ $(j=1, 2, 3)$	$\begin{cases} t = h^0 \\ u^j = \frac{h^j}{h^r} \operatorname{senh}^r \end{cases}$ $(j=1, 2, 3)$
ii)	$\begin{cases} \varphi = h^r \\ \theta = h^\theta \\ \psi = h^\psi \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda = h^0 \\ \rho = h^r \\ \theta = h^\theta \\ \psi = h^\psi \end{cases}$	$\begin{cases} t = h^0 \\ \rho = h^r \\ \theta = h^\theta \\ \psi = h^\psi \end{cases}$

d) Transformación de Cayley  $J: H(2) \longrightarrow U(2)$  (lema 5.7):

$$J_a := \left(I + \frac{i}{2}h\right) \left(I - \frac{i}{2}h\right)^{-1} =$$

$$= \left(k_h \left(1 - \frac{\operatorname{deth}}{4}\right) + i k_h h^0\right) \cdot \left(k_h \left(1 + \frac{\operatorname{deth}}{4}\right) \sigma_0 + i k_h h^j \sigma_j\right),$$

definiendo  $k_h := \left( \left(1 - \frac{\operatorname{deth}}{4}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\operatorname{Tr}h}{2}\right)^2}_{h^0} \right)^{-\frac{1}{2}}$

Expresiones coordenadas de  $J$ :

i)	$u^\mu = k_h h^\mu$ $(\mu=0, 1, 2, 3)$	$\begin{bmatrix} u^{-1} = k_h \left(1 - \frac{\operatorname{deth}}{4}\right) \\ u^4 = k_h \left(1 + \frac{\operatorname{deth}}{4}\right) \end{bmatrix}$
ii)	$\begin{cases} \chi \equiv \operatorname{arcsen} u^0 = \operatorname{arctg} \frac{u^0}{u^{-1}} = \operatorname{arctg} \frac{h^0}{1 - \frac{\operatorname{deth}}{4}} \\ \rho \equiv \operatorname{arcsen} \sqrt{u^{1^2} + u^{2^2} + u^{3^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^{1^2} + u^{2^2} + u^{3^2}}}{u^4} \\ \phantom{\rho} = \operatorname{arctg} \frac{h^r}{1 + \frac{\operatorname{deth}}{4}} \end{cases}$	

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \equiv \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2 + u^2}}{u^3} = h^\theta \\ \varphi \equiv \operatorname{arctg} \frac{u^1}{u^2} = h^\varphi \end{array} \right.$$



b) Difeomorfismo conforme (lema 5.3)  $j: (\mathbb{R}^4, [\eta]) \longrightarrow (B, \mathcal{E}_B)$ ,  
 $x \mapsto \tilde{w}$ , con  $w = (1 + \frac{\eta(xx)}{4}, x^0, x^1, x^2, x^3, 1 - \frac{\eta(xx)}{4})$ .

Inversa (definida sobre la imagen de  $j$ , densa en  $B$ ):

$$\tilde{w} \mapsto x, \text{ con } x^\mu = \frac{2w^\mu}{(w^{-1} + w^4)} \quad (\mu=0,1,2,3) \quad [\forall \text{ representante } w \in \tilde{w}]$$

Entonces, generadores  $l_{ab}$  de  $SU(2,2)/\mathbb{Z}_4$  sobre  $\mathbb{R}^4$  (vía  $j$ ):

$$\begin{aligned} l_{-1\mu} &= w^{-1} \partial_{w^\mu} - \varepsilon_\mu w^\mu \partial_{w^{-1}} \equiv w^{-1} \frac{\partial x^\nu}{\partial w^\mu} \partial_{x^\nu} - \varepsilon_\mu w^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial w^{-1}} \partial_{x^\nu} = \\ &= w^{-1} \frac{2}{(w^{-1} + w^4)} \partial_{x^\mu} - \varepsilon_\mu w^\mu \frac{2w^\nu}{(w^{-1} + w^4)^2} \partial_{x^\nu} = \\ &= (1 + \frac{\eta(xx)}{4}) \partial_{x^\mu} + \varepsilon_\mu \frac{x^\mu}{2} S, \quad \text{con } S := x^\nu \partial_{x^\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{-14} &= w^{-1} \partial_{w^4 + w^4} \partial_{w^{-1}} \equiv w^{-1} \frac{\partial x^\nu}{\partial w^4} \partial_{x^\nu} + w^4 \frac{\partial x^\nu}{\partial w^{-1}} \partial_{x^\nu} = \\ &= w^{-1} \frac{-2w^\nu}{(w^{-1} + w^4)^2} \partial_{x^\nu} + w^4 \frac{-2w^\nu}{(w^{-1} + w^4)^2} \partial_{x^\nu} = -S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{0j} &= w^0 \partial_{w^j + w^j} \partial_{w^0} \equiv w^0 \frac{\partial x^\nu}{\partial w^j} \partial_{x^\nu} + w^j \frac{\partial x^\nu}{\partial w^0} \partial_{x^\nu} = \\ &= w^0 \frac{2}{(w^{-1} + w^4)} \partial_{x^j} + w^j \frac{2}{(w^{-1} + w^4)} \partial_{x^0} = x^0 \partial_{x^j} + x^j \partial_{x^0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{ij} &= -w^i \partial_{w^j + w^j} \partial_{w^i} \equiv -w^i \frac{\partial x^\nu}{\partial w^j} \partial_{x^\nu} + w^j \frac{\partial x^\nu}{\partial w^i} \partial_{x^\nu} = \\ &= -w^i \frac{2}{(w^{-1} + w^4)} \partial_{x^j} + w^j \frac{2}{(w^{-1} + w^4)} \partial_{x^i} = -x^i \partial_{x^j} + x^j \partial_{x^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{\mu 4} &= \varepsilon_\mu w^\mu \frac{\partial}{\partial w^4} + w^4 \frac{\partial}{\partial w^\mu} \equiv \varepsilon_\mu w^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial w^4} \partial_{x^\nu} + w^4 \frac{\partial x^\nu}{\partial w^\mu} \partial_{x^\nu} = \\ &= \varepsilon_\mu w^\mu \frac{-2w^\nu}{(w^{-1} + w^4)^2} \partial_{x^\nu} + w^4 \frac{2}{(w^{-1} + w^4)} \partial_{x^\mu} = (1 - \frac{\eta(xx)}{4}) \partial_{x^\mu} - \varepsilon_\mu \frac{x^\mu}{2} S \end{aligned}$$

Nota. (Compárese con lo dicho en el ejemplo 2.1)

$\{l_{0j}, l_{ij} | i, j=1, 2, 3\}$  genera el grupo de Lorentz  $SO_+(1, 3)$

$\{l_{-1\mu} + l_{\mu 4} = 2 \partial_{x^\mu} | \mu=0, 1, 2, 3\}$  genera el grupo abeliano de las traslaciones  $\mathbb{R}_4$

$\{l_{-14} = -S\}$  genera el grupo de las dilataciones  $\mathbb{R}_+$

$\{l_{-1\mu} - l_{\mu 4} = \frac{\eta(\alpha x)}{2} \partial_{x^\mu} + \epsilon_\mu x^\mu S | \mu=0, 1, 2, 3\}$  genera el grupo abeliano local de las llamadas "transformaciones conformes"

Los 11 campos  $l_{-1\mu} + l_{\mu 4}$ ,  $l_{-14}$ ,  $l_{0j}$ ,  $l_{ij}$  son afines en las coordenadas globales  $x^0, x^1, x^2, x^3$  de  $\mathbb{R}^4$ ; los otros 4 campos son no afines.

c) Difeomorfismo conforme (lema 5.7)  $\beta^{-1}: (U(2), \mathcal{F}) \longrightarrow (B, \mathcal{C}_B)$ ,  
 $u \longmapsto \tilde{w}$ , con  $w = ((1-u^0)^2)^{\frac{1}{2}}, u^0, u^1, u^2, u^3, (1-u^1^2-u^2^2-u^3^2)^{\frac{1}{2}}$

Inversa (definida sobre todo B)

$$\tilde{w} \longmapsto u; \text{ con } u^\mu = \frac{w^\mu}{(w^{-12} + w^0)^{\frac{1}{2}}} \quad (\mu=0, 1, 2, 3) \quad [\forall \text{ representante } w \in \tilde{w}]$$

Entonces, generadores  $\mathcal{L}_{ab}$  de  $SU(2, 2)/\mathbb{Z}_4$  sobre  $U(2)$  (vía  $\beta^{-1}$ )

[los generadores  $\tilde{\mathcal{L}}_{ab}$  de  $\widetilde{SU}(2, 2)$  sobre  $\widetilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \times S^3$  se obtienen de los  $\mathcal{L}_{ab}$  sin más que sustituir  $u^0 = \text{sent}$ ]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-10} &= w^{-1} \partial_{w^0 - w^0} \partial_{w^{-1}} = w^{-1} \frac{\partial u^\nu}{\partial w^0} \partial_{u^\nu} - w^0 \frac{\partial u^\nu}{\partial w^{-1}} \partial_{u^\nu} = \\ &= w^{-1} \left( \frac{1}{(w^{-12} + w^0)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^0} + \frac{-w^\nu 2w^0}{2(w^{-12} + w^0)^{\frac{3}{2}}} \partial_{u^\nu} \right) - w^0 \frac{-w^\nu 2w^{-1}}{2(w^{-12} + w^0)^{\frac{3}{2}}} \partial_{u^\nu} = \\ &= (1-u^0)^{\frac{1}{2}} \partial_{u^0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-1i} &= w^{-1} \frac{\partial u^\nu}{\partial w^i} \partial_{u^\nu} + w^i \frac{\partial u^\nu}{\partial w^{-1}} \partial_{u^\nu} = w^{-1} \frac{1}{(w^{-12} + w^0)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^i} + w^i \frac{-w^\nu 2w^{-1}}{2(w^{-12} + w^0)^{\frac{3}{2}}} \partial_{u^\nu} = \\ &= (1-u^0)^{\frac{1}{2}} [\partial_{u^i} - u^i \Sigma], \text{ con } \Sigma := u^\nu \partial_{u^\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-14} &= w^{-1} \frac{\partial u^\nu}{\partial w^4} \partial_{u^\nu} + w^4 \frac{\partial u^\nu}{\partial w^{-1}} \partial_{u^\nu} = w^4 \frac{-w^\nu 2w^{-1}}{2(w^{-12} + w^0)^{\frac{3}{2}}} \partial_{u^\nu} = \\ &= -(1-u^1^2 - u^2^2 - u^3^2)^{\frac{1}{2}} (1-u^0)^{\frac{1}{2}} \Sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0j} &= w^0 \frac{\partial u^\nu}{\partial w^j} \partial_{u^\nu} + w^j \frac{\partial u^\nu}{\partial w^0} \partial_{u^\nu} = w^0 \frac{1}{(w^{-12} + w^0)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^j} + w^j \left[ \frac{1}{(w^{-12} + w^0)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-w^\nu 2w^0}{2(w^{-12} + w^0)^{\frac{3}{2}}} \partial_{u^\nu} \right] = \end{aligned}$$

$$=u^0 \partial_{u^j+u^j} [\partial_{u^0-u^0} \Sigma]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij} &= -w^i \frac{\partial u^v}{\partial w^j} \partial_{u^v} + w^j \frac{\partial u^v}{\partial w^i} \partial_{u^v} = -w^i \frac{1}{(w^{-1^2} + w^0^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^j} + w^j \frac{1}{(w^{-1^2} + w^0^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^i} = \\ &= -u^i \partial_{u^j+u^j} \partial_{u^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{04} &= w^0 \frac{\partial u^v}{\partial w^4} \partial_{u^v} + w^4 \frac{\partial u^v}{\partial w^0} \partial_{u^v} = w^4 \left[ \frac{1}{(w^{-1^2} + w^0^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^0} + \frac{-w^v 2w^0}{2(w^{-1^2} + w^0^2)^{\frac{3}{2}}} \partial_{u^v} \right] = \\ &= (1-u^1^2 - u^2^2 - u^3^2)^{\frac{1}{2}} [\partial_{u^0-u^0} \Sigma] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{i4} = -w^i \frac{\partial u^v}{\partial w^4} \partial_{u^v} + w^4 \frac{\partial u^v}{\partial w^i} \partial_{u^v} = w^4 \frac{1}{(w^{-1^2} + w^0^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_{u^i} = (1-u^1^2 - u^2^2 - u^3^2)^{\frac{1}{2}} \partial_{u^i}$$

Nota

$\{\mathcal{L}_{-10}, \mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{i4} \mid i, j=1, 2, 3\}$  genera el grupo (compacto e isomorfo a  $\mathbb{R} \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ ) de isometrías de  $(\mathbb{R} \times S^3, -dt^2 \oplus h)$ .

Los 7 campos  $\mathcal{L}_{-10}, \mathcal{L}_{ij}, \mathcal{L}_{i4}$  son afines en las coordenadas  $\lambda, u^1, u^2, u^3$  de  $U(2)$ ; los otros 8 campos son no afines.

La afinidad de la acción de los 7 primeros campos puede también verse de la siguiente manera:

- i) Las expresiones matriciales de dichos generadores de  $\text{SU}(2,2)$  son matrices  $(4 \times 4$  complejas) diagonales por cajas, del tipo  $\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$ , para las que se verifica

$$\exp \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \quad (\text{con } A_i \equiv \exp a_i, \quad i=1,2)$$

- ii) La acción  $\chi$  de  $\text{SU}(2,2)$  sobre  $U(2)$  (véase lema 5.8) implica

$$\chi \left( \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \right) u = A_1 u A_2^{-1}$$

que es afín en los elementos de  $u \in U(2)$ .

d) Correspondencia entre:

ciertos campos  
sobre  $\tilde{U}(2)$

$$Q := \partial_t = (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \partial_u \Big|_{u^0 = \tilde{\mathcal{L}}_{-10}}$$

campos sobre  $\mathbb{R}^4$   
(vía la aplicación (s.o.j))

$$\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

elementos del  
álgebra  $SU(2,2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial x^0}{\partial t} \partial_{x^0} + \frac{\partial x^r}{\partial t} \partial_{x^r} \\ &= \frac{2(1+\text{costcos}\rho)}{(\text{cost}+\text{cos}\rho)^2} \partial_{x^0} + \frac{2\text{sentsen}\rho}{(\text{cost}+\text{cos}\rho)^2} \partial_{x^r} \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{4}(x^0)^2 + x^r{}^2 \right] \partial_{x^0} + \frac{1}{2} x^0 x^r \partial_{x^r} \\ &= \left[ 1 + \frac{\eta(\text{xx})}{4} \right] \partial_{x^0} + \frac{x^0}{2} S = 1_{-10} \end{aligned}$$

$$\partial_\rho \Big|_{u^1=u^2=0} = (1-u^3)^{\frac{1}{2}} \partial_{u^3} \Big|_{u^3 = \tilde{\mathcal{L}}_{34}}$$

(restringiéndose a  $u^1 = \ddot{u}^2 = 0$ )

$$\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial x^0}{\partial \rho} \partial_{x^0} + \frac{\partial x^r}{\partial \rho} \partial_{x^r} \Big|_{x^1=x^2=0} \\ &= \frac{2\text{sentsen}\rho}{(\text{cost}+\text{cos}\rho)^2} \partial_{x^0} + \frac{2(1+\text{costcos}\rho)}{(\text{cost}+\text{cos}\rho)^2} \partial_{x^3} \\ &= \frac{1}{2} x^0 x^3 \partial_{x^0} + \left[ 1 + \frac{1}{4}(x^0)^2 + x^3{}^2 \right] \partial_{x^3} \\ &= \left[ 1 - \frac{\eta(\text{xx})}{4} \right] \partial_{x^3} + \frac{x^3}{2} S = 1_{34} \end{aligned}$$

(restringiéndose a  $x^1 = x^2 = 0$ )

$$\frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q &:= (s.o.j) \Big|_{x^0} \\ &= \frac{1}{2} [(1+\text{costcos}\rho) \partial_t - \text{sentsen}\rho \partial_\rho] \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{L}}_{-10} + \tilde{\mathcal{L}}_{04}) \end{aligned}$$

e) Sean  $M$  una variedad,  $\varphi \in \text{Dif}(M)$ ,  $X$  un campo de vectores sobre  $M$ . Existe entonces (resultado estándar) un campo  $X'$  sobre  $M$  tal que

$$\varphi_* [X(m)] = X'(\varphi m), \quad \forall m \in M$$

Supongamos que  $m$  y  $\varphi^{-1}m$  pertenecen al dominio de una carta en cuyas coordenadas el difeomorfismo  $\varphi$  es afín. En tal caso se puede escribir (trabajando en el  $\mathbb{R}^n$  de la carta y utilizando el isomorfismo  $T_m \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto m+v$ )

$$X'(m) = (\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})(m)$$

Supongamos además que  $M$  posee una estructura de grupo de Lie y que  $\varphi$  es el difeomorfismo inducido (para un valor  $s$  del parámetro) por el flujo de un cierto campo de vectores  $Y$  del álgebra de Lie. En tal caso se tendrá

$$X'(m) = (e^{sY} X e^{-sY})(m)$$

(exponencial en el grupo de Lie  $M$ ).

Lo anterior se aplicará, en nuestro caso, tomando

$$M = \tilde{U}(2) \approx \mathbb{R} \times S^3, \quad Y = \partial_t, \quad \partial_\rho |_{u^1=u^2=0}$$

(téngase en cuenta que  $\partial_t = X_0^L, \partial_\rho |_{u^1=u^2=0} = X_3^L |_{u^1=u^2=0}$ ; véase apéndice A.2-b).

REFERENCIAS

- [1] J. Ehlers, "Survey of general relativity theory" in "Relativity, Astrophysics and Cosmology", W. Israel ed., D. Reidel, Dordrecht-Holland, 1973.
- [2] I.E. Segal, "Mathematical cosmology and extragalactic astronomy", Academic Press, New York, 1976.
- [3] R.K. Sachs-H. Wu, "General Relativity for Mathematicians", Springer, New York, 1977.
- [4] J.K. Beem-P.E. Ehrlich, "Global Lorentzian Geometry", Marcel Dekker, New York, 1981.
- [5] S. Kobayashi, "Transformation groups in differential geometry", Springer, Berlin, 1972.
- [6] S.W. Hawking-G.F.R. Ellis, "The large scale structure of space-time", Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973.
- [7] R. Geroch-G.T. Horowitz, "Global structure of spacetimes" in "General Relativity-An Einstein Centenary Survey", S.W. Hawking and W. Israel eds., Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1979.
- [8] E.C. Zeeman, Journal of Math. Phys. 5, 490 (1964).
- [9] R.L. Bishop-S.I. Goldberg, "Tensor Analysis on Manifolds", Macmillan, New York, 1968.
- [10] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology", John Wiley, New York, 1972.
- [11] R.M. Soneira, Astrophysical Journal, 230, L63-L65 (1979).
- [12] I.E. Segal, H.P. Jakobsen, B. Oersted, S.M. Paneitz, B. Spohr, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 78, 5261-5265 (1981).

- [13] Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, "Gravitation", Freeman, San Francisco, 1970.
- [14] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, "Introduction to general relativity" McGraw-Hill, New York, 1965.
- [15] S. Helgason, "Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces", Academic Press, New York, 1978.

