Álgebra Lineal y Geometría II

Grado de Física – UGR

Curso 2022-23

TEMA 1 : Aplicaciones multilineales y tensores

Revisado el 28/03/2023.

Ignacio Sánchez Rodríguez

1. Aplicaciones multilineales y tensores

1.1. Un repaso al espacio dual. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) de dimensión finita $n \geq 1$. Vamos a repasar algunos conceptos del espacio dual. En particular, vamos a recordar el llamado Teorema de Reflexividad que nos permite interpretar un vector de $\mathbf{V}$ como una aplicación lineal de $\mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$. Esta interpretación nos permitirá entender un vector de $\mathbf{V}$ como un tensor, según la definición de tensor que introduciremos más adelante (sección 1.5).

Recordemos que el *espacio dual* de $\mathbf{V}$ es el espacio $\mathbf{V}^*$ de las aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbb{K}$, llamadas *formas lineales*. El espacio dual es un espacio vectorial con las operaciones $\phi + \psi$ y $k\,\phi$ definidas por $(\phi + \psi)(\bar{u}) := \phi(\bar{u}) + \psi(\bar{u})$ y $(k\phi)(\bar{u}) := k\,\phi(\bar{u})$. Recordemos también que por cada base $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de $\mathbf{V}$ se obtiene una base $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ de $\mathbf{V}^*$ cuyas formas lineales están determinadas por las ecuaciones $\varphi^i(\bar{e}_j) = \delta^i_j$ (la delta de Kronecker, que es igual a 1 si $i = j$ e igual a 0 si $i \neq j$). Esta $\mathcal{B}^*$ es la llamada *base dual* de $\mathcal{B}$. (Observad que hemos puesto los índices arriba en las formas lineales que componen la base dual; en la siguiente sección 1.2 se explicará esto.)

Lo primero que observamos es que los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$ tienen la misma dimensión n y, por tanto, son isomorfos. Esto nos dice que eligiendo una base de $\mathbf{V}$ y la consiguiente base dual de $\mathbf{V}^*$, la aplicación lineal de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}^*$ que lleva la base de $\mathbf{V}$ en la dual es un isomorfismo. Pero resulta que este isomorfismo no es único: si elegimos otra base y su correspondiente base dual, el isomorfismo que se obtiene puede cambiar (verlo en el ejercicio 1.1.2 a continuación).

Ejemplos y ejercicios:

1.1.1. Si un isomorfismo $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ envía ordenadamente la base $\mathcal{B}$ en su dual $\mathcal{B}^*$ y un vector $\bar{u}$ tiene coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ respecto a $\mathcal{B}$, ¿qué coordenadas tiene $f(\bar{u})$ respecto a $\mathcal{B}^*$? ¿Cuál es la matriz asociada $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$?

1.1.2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2*}$ el isomorfismo que lleva la base estándar $\mathcal{B}_\circ = \{(1,0),(0,1)\}$ en su base dual $\mathcal{B}_\circ^* = \{\phi^1, \phi^2\}$, siendo $\phi^1(x,y) = x,\ \phi^2(x,y) = y,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Halla la base dual de la base $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$ y considera el isomorfismo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2*}$ que lleva $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}^*$. Comprueba que $f(1,0) = \phi^1 \neq g(1,0)$ y $f(0,1) = \phi^2 \neq g(0,1)$.

1.1.3. Calcula las coordenadas de los vectores $\bar{u} = (3, 2)$ y $\bar{v} = (0, 2)$ en la base $\mathcal{C}$ y las coordenadas de las formas lineales definidas por $\psi(x, y) = x-2y$ y $\omega(x, y) = 3x-3y$ en las bases $\mathcal{B}_\circ^*$ y $\mathcal{C}^*$.

Por la misma razón que antes, el espacio dual del dual, $\mathbf{V}^{**}$, tiene también dimensión n, la misma que $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$. Pero ahora resulta que sí hay un isomorfismo natural entre $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^{**}$, que no depende de ninguna elección de base. Se trata de aquel que identifica un vector $\bar{u}$ con la aplicación lineal (que denotamos igual que el vector) definida así:

$$\bar{u}\colon \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}, \quad \bar{u}(\psi) := \psi(\bar{u}).$$

De esta manera se obtiene un isomorfismo que nos permite identificar $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}^{**}$: un vector de $\mathbf{V}$ se interpreta como una función lineal sobre el espacio dual, es decir, como un elemento de $\mathbf{V}^{**}$. Es lo que se conoce como el *Teorema de Reflexividad.*

1.2. Coordenadas de vectores y formas lineales. En este Tema 1 escribimos las coordenadas de un vector en $\mathbf{V}$ con los índices arriba (superíndices) y las coordenadas de una forma lineal en $\mathbf{V}^*$ con los índices abajo (subíndices); en la teoría de tensores es muy útil usar las dos posiciones de los índices, cada una con su propio significado.

Sean un vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ y una forma lineal $\psi \in \mathbf{V}^*$. Recordemos que si tenemos una base $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ de $\mathbf{V}$ las *coordenadas* de $\bar{u}$ en la base $\mathcal{B}$ son los escalares x^i que multiplican a los vectores de la base en la igualdad:

$$\bar{u} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + \cdots + x^n\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\bar{e}_i, \qquad \text{con } x^i \in \mathbb{K}. \tag{1}$$

Agrupamos las coordenadas de $\bar{u}$ como un vector de $\mathbb{K}^n$ y escribimos

$$\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

. Análogamente, si tenemos la base dual $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$, por la ecuación

$$\psi = \alpha_1\varphi^1 + \alpha_2\varphi^2 + \cdots + \alpha_n\varphi^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi^i, \qquad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{K}, \tag{2}$$

obtenemos las *coordenadas* de ψ en la base $\mathcal{B}^*$, escritas así: $\psi_{\mathcal{B}^*} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ como un vector de $\mathbb{K}^n$.

En general en este Tema de tensores, siempre encontraremos que el índice de un sumatorio ("i", en este caso) se encuentra repetido en la fórmula como subíndice y como superíndice.

Para calcular $\psi(\bar{u})$ podemos usar las ecuaciones (1) y (2) y el que $\varphi^i(\bar{e}_j) = \delta^i_j$, igual a 1 si $i = j$, igual a 0 si $i \neq j$, y obtenemos:

$$\psi(\bar{u}) = (\alpha_1\varphi^1 + \cdots + \alpha_n\varphi^n)(x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Es importante para el tema de los tensores que nos hagamos la siguiente pregunta: ¿Cómo cambian las coordenadas de los vectores y las formas lineales cuando cambiamos de base? Si consideramos dos bases $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n\}$ de $\mathbf{V}$ entonces a cada vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ le corresponden dos vectores de $\mathbb{K}^n$ que son las coordenadas de $\bar{u}$ en cada base:

$$\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x^1, \dots, x^n) \quad \text{y} \quad \bar{u}_{\mathcal{C}} = (y^1, \dots, y^n);$$

recordemos del tema de espacios vectoriales como es la relación que hay entre ellas.

Supongamos que conocemos las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{lcl} \bar{e}_1 = a^1_1\bar{c}_1 + a^2_1\bar{c}_2 + \cdots + a^n_1\bar{c}_n & \Leftrightarrow & (\bar{e}_1)_{\mathcal{C}} = (a^1_1, \dots, a^n_1) \\ \bar{e}_2 = a^1_2\bar{c}_1 + a^2_2\bar{c}_2 + \cdots + a^n_2\bar{c}_n & \Leftrightarrow & (\bar{e}_2)_{\mathcal{C}} = (a^1_2, \dots, a^n_2) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \bar{e}_n = a^1_n\bar{c}_1 + a^2_n\bar{c}_2 + \cdots + a^n_n\bar{c}_n & \Leftrightarrow & (\bar{e}_n)_{\mathcal{C}} = (a^1_n, \dots, a^n_n)\,. \end{array} \tag{4}$$

Usando estos datos y que $\bar{u} = \sum_{i=1}^n x^i\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n y^j\bar{c}_j$, se deducen las n ecuaciones que relacionan las coordenadas del vector $\bar{u}$ en las dos bases, que se pueden escribir con la ayuda de sumatorios o, de manera compacta, como una ecuación matricial:

$$y^i = \sum_{j=1}^n a^i_j x^j, \quad \forall\, i = 1, \dots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Esta ecuación calcula las coordenadas de un vector en la base $\mathcal{C}$, a partir de las coordenadas de ese vector en la base $\mathcal{B}$. La matriz cuadrada

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{smallmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{smallmatrix}\right), \text{ escrita simplificadamente así: } \mathcal{B}_{\mathcal{C}} = (a^i_j),$$

se llama la *matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$*. Notar que para cada componente de esta matriz el *superíndice* indica la fila y el *subíndice* indica la columna (este criterio lo seguiremos habitualmente para matrices con índices arriba y abajo).

La hemos denotado por $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ para recordar que sus columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{C}$; esto es, la columna $\begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ es $(\bar{e}_j)_\mathcal{C}$ escrito en columna.

Simplificadamente, la ecuación (5) del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es:

$$\bar{u}_\mathcal{C} = \mathcal{B}_\mathcal{C}\ \bar{u}_\mathcal{B}\,, \tag{6}$$

donde $\bar{u}_\mathcal{B}$ y $\bar{u}_\mathcal{C}$ están escritos como matrices columna: $\bar{u}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ y $\bar{u}_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$.

La matriz $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ es invertible ya que sus columnas son las coordenadas de los vectores de una base. Entonces, despejando $\bar{u}_\mathcal{B}$ en (6), se deduce que la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ es la inversa de la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}_\mathcal{B} = (\mathcal{B}_\mathcal{C})^{-1}.$$

Los cambios de coordenadas en el dual se trabajan igualmente que los de $\mathbf{V}$, puesto que $\mathbf{V}^*$ es a su vez un espacio vectorial. Si tenemos las bases duales $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ y $\mathcal{C}^* = \{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ y una forma lineal $\psi \in \mathbf{V}^*$ con coordenadas:

$$\psi_{\mathcal{B}^*} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{y} \quad \psi_{\mathcal{C}^*} = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

al final, la ecuación del cambio de coordenadas de $\mathcal{B}^*$ a $\mathcal{C}^*$, según la fórmula (6), es

$$\psi_{\mathcal{C}^*} = \mathcal{B}^*_{\mathcal{C}^*}\ \psi_{\mathcal{B}^*}\,, \tag{7}$$

donde $\psi_{\mathcal{B}^*}$ y $\psi_{\mathcal{C}^*}$ están escritos como matrices columna: $\psi_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ y $\psi_{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Descubramos qué relación hay entre las matrices $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}^*_{\mathcal{C}^*}$. Reescribamos el resultado (3) con las notaciones anteriores:

$$\psi(\bar{u}) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \psi_{\mathcal{B}^*}^{\ t}\ \bar{u}_\mathcal{B},$$

donde el superíndice t indica que se ha hecho la traspuesta de la matriz columna para convertirla en una matriz fila. Del mismo resultado, pero usando las nuevas bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$, obtenemos:

$$\psi(\bar{u}) = (\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \psi_{\mathcal{C}^*}^{\ t}\ \bar{u}_\mathcal{C}.$$

Por tanto, igualando ambas ecuaciones y usando (6) y (7) se obtiene:

$$\psi_{\mathcal{B}^*}^{\ t}\ \bar{u}_\mathcal{B} = \psi_{\mathcal{C}^*}^{\ t}\ \bar{u}_\mathcal{C} = \psi_{\mathcal{B}^*}^{\ t}\ \mathcal{B}^{*\,t}_{\mathcal{C}^*}\ \mathcal{B}_\mathcal{C}\ \bar{u}_\mathcal{B};$$

ahora, reescribimos la igualdad de los extremos, intercalando la matriz unidad I_n, y nos queda:

$$(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) \ I_n \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) \ \mathcal{B}^{*\,t}_{\mathcal{C}^*} \ \mathcal{B}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Como esta ecuación es cierta para cualesquiera $x^i, \alpha_j \in \mathbb{K}$, entonces es, necesariamente, equivalente a la ecuación

$$I_n = \mathcal{B}^{*\,t}_{\mathcal{C}^*} \ \mathcal{B}_{\mathcal{C}},$$

o sea que $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}^{-1} = \mathcal{B}^{*\,t}_{\mathcal{C}^*}$ y, por tanto:

$$\mathcal{B}^*_{\mathcal{C}^*} = (\mathcal{B}_{\mathcal{C}}^{-1})^t = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}{}^t. \tag{8}$$

Como antes. llamemos $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = (a^i_j)$; denotemos a su inversa por $(b^i_j) \equiv (a^i_j)^{-1} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$. Entonces, sustituyendo (8) en la traspuesta de la ecuación (7) obtenemos la relación de las coordenadas de la forma lineal ψ en las dos bases duales:

$$(\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n_1 & \cdots & b^n_n \end{pmatrix} \iff \beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b^i_j, \quad \forall\, j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Asimismo, también se deduce que las formas lineales de la base $\mathcal{B}^*$ expresadas como combinaciones lineales de la base $\mathcal{C}^*$ son

$$\varphi^i = \sum_{k=1}^{n} b^i_k \, \omega^k. \tag{10}$$

Como vemos en las ecuaciones (5) y (9), las coordenadas de los vectores y de las formas lineales cambian de manera diferente cuando cambiamos de base: Para obtener las nuevas coordenadas de un vector se multiplican las antiguas por la derecha por la matriz $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = (a^i_j)$ y para obtener las nuevas coordenadas de una forma lineal se multiplican las antiguas por la izquierda por la matriz inversa $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = (b^i_j)$. Por esta manera de cambiar de coordenadas, tradicionalmente se dice que $\bar{u} \in \mathbf{V}$ es un *vector contravariante* y que $\psi \in \mathbf{V}^*$ es un *vector covariante*. Ambos son ejemplos sencillos de tensores y su comportamiento sirve de modelo para tensores más complicados.

1.3. Vectores contravariantes y covariantes en geometría y física. En Cálculo y Geometría Diferencial y en buena parte de la Física, especialmente en Relatividad General, se usan los *vectores contravariantes y covariantes* de la manera que describo brevemente a continuación.

En un espacio E que admite diferentes *sistemas de coordenadas* (cartesianas, polares, etc.) hay una manera de definir cierto espacio vectorial en cada punto $p \in E$, llamado *espacio tangente de E en p*. Cada sistema de coordenadas de E define una base en cada espacio tangente. Al cambiar de base, los vectores tangentes cambian de coordenadas según la llamada *matriz jacobiana* de la función de cambio entre los sistemas de coordenadas.

Más explícitamente, supongamos que el espacio E admite dos sistemas de coordenadas $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, donde cada componente, y^i, es una función diferenciable de las x^j (y viceversa, se pueden expresar las x^j en función de las y^i). La matriz jacobiana del cambio de coordenadas es $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$. En el espacio vectorial tangente definido en un punto particular $p \in E$, un vector $\vec{v}$ es una especie de vector de velocidad de una trayectoria a su paso por p —o puedes pensar el vector $\vec{v}$ como la intensidad de una fuerza aplicada en p—. Si el vector se expresa con n coordenadas, digamos $(v^1, \ldots, v^n)$, al usar el sistema $(x^1, \ldots, x^n)$ y con otras n coordenadas, $(v'^1, \ldots, v'^n)$, al usar el sistema $(y^1, \ldots, y^n)$, entonces las coordenadas de $\vec{v}$ cambian así:

$$\begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\big|_p & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\big|_p & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\big|_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \iff v'^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p v^j$$

y decimos que $\vec{v}$ es un *vector contravariante*.

Del cálculo diferencial sabemos que $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)^{-1}$. Si ahora definimos otro objeto, α, que se describe con n coordenadas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en el sistema de las (x^i) y con n coordenadas $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ en el sistema de las (y^j), y que cambian entre ellas así:

$$(\alpha'_1 \ \cdots \ \alpha'_n) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}\big|_p & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}\big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\big|_p & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\big|_p \end{pmatrix} \iff \alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big|_p \alpha_i\,,$$

decimos que α es un *vector covariante*.

Para nosotros, esto significa que α es un elemento del espacio dual al espacio tangente de E en p. Podemos decir que un vector covariante es una forma lineal que actúa sobre el espacio de los vectores contravariantes.

1.4. Aplicaciones bilineales y multilineales. Sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ tres espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una aplicación del producto cartesiano $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$, $F\colon \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, decimos que es *bilineal* si se verifica:

$$F(\alpha \bar{u} + \bar{u}', \bar{v}) = \alpha F(\bar{u}, \bar{v}) + F(\bar{u}', \bar{v})$$
$$F(\bar{u}, \alpha \bar{v} + \bar{v}') = \alpha F(\bar{u}, \bar{v}) + F(\bar{u}, \bar{v}')$$

$\forall\, \bar{u}, \bar{u}' \in \mathbf{U},\ \forall\, \bar{v}, \bar{v}' \in \mathbf{V},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$. Se puede decir que la aplicación F es bilineal porque es "lineal en cada factor"; es decir, $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$, la aplicación $F(\cdot, \bar{v}) : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$, $\bar{u} \mapsto F(\bar{u}, \bar{v})$ es lineal y, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{U}$, la aplicación $F(\bar{u}, \cdot) : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $\bar{v} \mapsto F(\bar{u}, \bar{v})$ es lineal.

El conjunto de las aplicaciones bilineales de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$, denotado por $L(\mathbf{U}, \mathbf{V}; \mathbf{W})$, tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con las operaciones habituales de suma de aplicaciones y multiplicación de escalares por aplicaciones.

Se puede generalizar lo anterior y definir que una aplicación $F\colon \mathbf{V}_1 \times \cdots \times \mathbf{V}_r \to \mathbf{W}$ es *multilineal o r-lineal* si es lineal en cada factor, es decir, $\forall\, i$ se verifica

$$F(\bar{u}_1, \ldots, \alpha \bar{u}_i + \bar{v}_i, \ldots, \bar{u}_r) = \alpha F(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, \bar{u}_r) + F(\bar{u}_1, \ldots, \bar{v}_i, \ldots, \bar{u}_r).$$

El conjunto $L(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_r; \mathbf{W})$ tiene, igualmente, estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Las aplicaciones bilineales de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ en $\mathbb{K}$ admiten una representación matricial cuando se trabaja en coordenadas: Sea $F\colon \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ una aplicación bilineal. Dadas una base $\mathcal{B} = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m\}$ de $\mathbf{U}$ y una base $\mathcal{C} = \{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n\}$ de $\mathbf{V}$, definimos *la matriz asociada a F en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$* como la matriz de orden $m \times n$ dada por $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) = (a_{ij})$, siendo $a_{ij} = F(\bar{b}_i, \bar{c}_j)$. Entonces se verifica:

$$F(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}_{\mathcal{B}}^{\,t} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) \cdot \bar{v}_{\mathcal{C}}.$$

Ejemplos y ejercicios:

1.4.1. El producto de matrices, entendido como la aplicación:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto A \cdot B,$$

es una aplicación bilineal. Desarrolla la propiedad de bilinealidad en este caso.

1.4.2. El conocido "producto vectorial" en $\mathbb{R}^3$, entendido como la aplicación

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y},$$

es una aplicación bilineal. Desarrolla la propiedad de bilinealidad en este caso.

1.4.3. La aplicación:

$$F\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}, \quad (\bar{u}, \varphi) \mapsto \varphi(\bar{u})$$

es una aplicación bilineal. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbf{V}$, ¿cuál es la matriz $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(F)$?

1.5. Concepto de tensor. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un tensor en $\mathbf{V}$ es una aplicación multilineal con valores en $\mathbb{K}$ cuyo espacio inicial es un producto cartesiano donde los factores son copias de $\mathbf{V}$ o de su dual.

Definición 1.1. Un *tensor* T en $\mathbf{V}$ de tipo (r, s) (o r veces covariante y s veces contravariante) es una aplicación $(r + s)$-lineal

$$T\colon \mathbf{V} \times \overset{r}{\cdots} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \times \overset{s}{\cdots} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}.$$

Nota: Se puede dar una definición similar de tensor, permitiendo que los factores de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$ aparezcan desordenados; pero en este curso, por simplicidad, asumiremos solamente el orden que se ha elegido, salvo que no se advierta otra cosa.

El tensor T de tipo (r, s) actúa sobre una ordenación de r vectores y s formas lineales para dar un escalar:

$$T(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r, \psi^1, \dots, \psi^s) \in \mathbb{K}.$$

Multilineal significa que si introducimos $r + s - 1$ vectores o formas en T, la aplicación de $\mathbf{V}$ o $\mathbf{V}^*$ en $\mathbb{K}$ que queda es lineal. Por ejemplo, supongamos que rellenamos cada entrada de T con vectores o formas fijas, salvo la primera entrada, entonces queda:

$$T(\,\cdot\,, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r, \psi^1, \dots, \psi^s),$$

que es una aplicación de $\mathbf{V}$ en $\mathbb{K}$, a la cual le pedimos que sea lineal, es decir, que se verifique:

$$T(\lambda\bar{u} + \bar{v}, \bar{u}_2, \dots, \psi^s) = \lambda T(\bar{u}, \bar{u}_2, \dots, \psi^s) + T(\bar{v}, \bar{u}_2, \dots, \psi^s).$$

Según esta definición, los tensores de tipo $(1, 0)$ son las formas lineales de $\mathbf{V}^*$ y los tensores de tipo $(0, 1)$ son los vectores de $\mathbf{V}$ ya que, como dijimos en la sección 1.1, un vector se puede ver como una aplicación lineal de $\mathbf{V}^*$ en $\mathbb{K}$, identificando así $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^{**}$. Por convenio, se dirá que los tensores de tipo $(0, 0)$ son los escalares.

Si el tipo (r, s) del tensor verifica que $r + s = 2$, solo hay dos factores en el dominio de T y, por eso, obtenemos una aplicación bilineal. En este curso nos vamos a centrar principalmente en los tensores esta clase, de los tipos: $(2, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 2)$.

Ejemplos y ejercicios:

1.5.1. Cuando $\mathbf{V} = \mathbb{R}$, un ejemplo sencillo se obtiene con el producto de números. Probar que la aplicación:

$$P\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad P(x, y) = xy$$

es bilineal y, en cambio, no es lineal con respecto a la estructura vectorial de $\mathbb{R}^2$. Igualmente, la aplicación $P\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x, y, z) = xyz$ es multilineal o 3-lineal (también se dice *trilineal*).

Aunque el ejemplo sea muy sencillo, el producto de números es uno de los pilares en la construcción de tensores. De hecho, las únicas aplicaciones bilineales T de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son las obtenidas multiplicando P por una constante: $T = kP$, con $k \in \mathbb{R}$. Esta constante es el valor de $T(1, 1)$.

1.5.2. En $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, un tensor de tipo $(2, 0)$ muy familiar es el producto escalar usual, entendido como la aplicación:

$$T\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad T((x, y), (x', y')) = (x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'.$$

Probad que es bilineal.

Este producto escalar es un caso particular de lo que llamamos una *métrica* en $\mathbf{V}$ y que estudiaremos en el Tema 2 del curso.

1.6. Tensores en coordenadas. En general, un tensor queda determinado si sabemos cómo actúa sobre los vectores de una base y sobre las formas lineales de su base dual, tal y como nos dice el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Dada una base $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de $\mathbf{V}$ y su base dual $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$, un tensor T de tipo (r, s) verifica, $\forall\, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r \in \mathbf{V}$, $\forall\, \psi^1, \dots, \psi^s \in \mathbf{V}^*$,*

$$T(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r, \psi^1, \dots, \psi^s) = \sum_{i_1, \dots i_r, j_1, \dots j_s = 1}^{n} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r} \alpha_{j_1}^1 \cdots \alpha_{j_s}^s T(\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_r}, \varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_s}) \tag{11}$$

donde $(x_k^1, \dots, x_k^n)$ son las coordenadas de $\bar{u}_k$ en $\mathcal{B}$ y $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ las de ψ^k en $\mathcal{B}^*$.

La demostración es fácil pero bastante larga de escribir en toda su generalidad; al final se apoya en la linealidad del tensor en cada factor. Para ilustrarla, veámosla para los tensores de tipo $(2, 0)$. Sea el tensor $T\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$. Para calcular el valor de $T(\bar{u}, \bar{v})$, sabiendo que $\bar{u} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i$, $\bar{v} = \sum_{j=1}^n y^j \bar{e}_j$, aplicamos la linealidad en el primer factor y luego en el segundo y obtenemos el resultado:

$$(12) \qquad T(\bar{u}, \bar{v}) = T\big(\sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i, \bar{v}\big) = \sum_{i=1}^n x^i T(\bar{e}_i, \bar{v}) = \sum_{i=1}^n x^i T\big(\bar{e}_i, \sum_{j=1}^n y^j \bar{e}_j\big) = $$
$$= \sum_{i=1}^n x^i \Big(\sum_{j=1}^n y^j T(\bar{e}_i, \bar{e}_j)\Big) = \sum_{i,j=1}^n x^i y^j T(\bar{e}_i, \bar{e}_j).$$

Igualmente, para un tensor R de tipo $(1,1)$, $R\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$, dada una forma lineal $\psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i$, con $\alpha_i \in \mathbb{K}$, se obtiene

$$(13) \qquad R(\bar{u}, \psi) = \sum_{i,j=1}^n x^j \alpha_i R(\bar{e}_j, \varphi^i);$$

y para un tensor de tipo $(0,2)$, $S\colon \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$, dada $\omega = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi^j$, con $\beta_j \in \mathbb{K}$, queda

$$(14) \qquad S(\psi, \omega) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j S(\varphi^i, \varphi^j).$$

En la expresión (11) intervienen los valores de T cuando actúa sobre los vectores de la base de $\mathbf{V}$ y las formas lineales de la base dual; estos valores se pueden llamar las *componentes del tensor* T relativas a la base $\mathcal{B}$. Las escribiremos simplificadamente así:

$$T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} := T(\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_r}, \varphi^{j_1}, \dots, \varphi^{j_s}), \qquad \text{con } i_1, \dots i_r, j_1, \dots j_s \in \{1, \dots, n\}.$$

En los casos que hemos visto en que $r + s = 2$, se obtienen las siguientes componentes:

$$(15) \qquad T_{ij} := T(\bar{e}_i, \bar{e}_j), \quad R^i_j := R(\bar{e}_j, \varphi^i), \quad S^{ij} := S(\varphi^i, \varphi^j),$$

que se pueden disponer como una matriz cuadrada de orden n que denotaremos por:

$$(16) \qquad M_{\mathcal{B}}(T) = (T_{ij}), \quad M_{\mathcal{B}}(R) = (R^i_j), \quad M_{\mathcal{B}}(S) = (S^{ij})$$

y que llamaremos la *matriz asociada*, respectivamente, a T, R y S relativa a la base $\mathcal{B}$. En los tres casos convenimos que el dígito en la posición de i (primero y/o arriba) indica la fila y el dígito en la posición de j (segundo y/o abajo) indica la columna.

De esta manera, se obtiene:

$$(17) \quad T(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}_{\mathcal{B}}^{\,t}\ M_{\mathcal{B}}(T)\ \bar{v}_{\mathcal{B}}, \quad R(\bar{u}, \psi) = \psi_{\mathcal{B}^*}^{\,t}\ M_{\mathcal{B}}(R)\ \bar{u}_{\mathcal{B}}, \quad S(\phi, \psi) = \phi_{\mathcal{B}^*}^{\,t}\ M_{\mathcal{B}}(S)\ \psi_{\mathcal{B}^*}.$$

Ejemplos y ejercicios:

1.6.1. En un espacio vectorial $\mathbf{V}$, sean $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base y T un tensor de tipo $(2,0)$. Calcula $T(\bar{u}, \bar{v})$ en función de las coordenadas $\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x^1, x^2)$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}} = (y^1, y^2)$, sabiendo que $T(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$, $T(\bar{e}_1+\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 3$, $T(\bar{e}_2, \bar{e}_1+2\bar{e}_2) = 4$, $T(\bar{e}_1-\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 1$. Hallar la matriz asociada a T relativa a la base $\mathcal{B}$.

1.6.2. En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathcal{B}_\circ = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base estándar y $\mathcal{B}_\circ^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ su base dual. Sea R un tensor de tipo $(1,1)$; calcula $R((3,-2,1), \psi)$, siendo $\psi(x,y,z) = x+y+2z$ y sabiendo que $R(\bar{e}_i, \varphi^i) = 1$ y $R(\bar{e}_j, \varphi^i) = 2$ cuando $i \neq j$, $\forall\, i,j \in \{1,2,3\}$. Escribid la matriz asociada a R relativa a la base $\mathcal{B}_\circ$.

Nota: Tradicionalmente no se pensaba en un *tensor* como una aplicación multilineal sino simplemente como cierto "objeto matemático" que se define por unas componentes numéricas respecto a una base, y que estas componentes cambian de una manera predeterminada cuando se cambia de base. Por ejemplo, un vector de $\mathbf{V}$ es un tensor que se describe respecto a una base con n coordenadas, que cambian con la regla de multiplicación que se indica en la fórmula (5). Otro tipo de tensores son las formas lineales, que también tienen n coordenadas, pero cambian según la fórmula (9). Los endomorfismos de $\mathbf{V}$ también son tensores, como estudiaremos más adelante en la sección 1.9; en este caso tienen las n^2 componentes de su matriz asociada en una base y cambian según la fórmula (18). Pero un tensor, independientemente de que tenga unas "componentes" relativas a cada base que se use para su descripción, es un objeto en sí mismo; por eso, conceptualmente, es bueno entenderlo de manera unificada como una aplicación multilineal de determinado tipo.

1.7. Operaciones con tensores. Con las habituales operaciones de suma y multiplicación por escalares para aplicaciones con valores en $\mathbb{K}$ podemos definir dichas operaciones para los tensores.

Si T y T' son tensores de tipo (r,s), definimos la suma $T+T'$ como el tensor del mismo tipo dado por:

$$(T+T')(\bar{u}_1, \dots, \psi^s) := T(\bar{u}_1, \dots, \psi^s) + T'(\bar{u}_1, \dots, \psi^s).$$

Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos la multiplicación λT como el tensor del mismo tipo dado por:

$$(\lambda T)(\bar{u}_1, \dots, \psi^s) := \lambda\, T(\bar{u}_1, \dots, \psi^s).$$

Teorema 1.2. *El conjunto $\mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$ de los tensores de tipo (r,s) sobre $\mathbf{V}$ con la suma y multiplicación por escalares es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

La tarea de verificar que $T+T'$ y λT son tensores y que $\mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$, con estas operaciones, es un espacio vectorial es fácil, pero aburrida y larga si se quiere escribir todo con la debida formalidad.

En este espacio vectorial el elemento neutro para la suma es el *tensor cero*, denotado por T_0 ó $\bar{0}$, que aplica cualesquiera $\bar{u}_1, \ldots, \psi^s$ en el $0 \in \mathbb{K}$.

Ejemplos y ejercicios:

1.7.1. Demuestra que, si T y T' son tensores de tipo $(2,0)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $T+T'$ y λT son aplicaciones bilineales.

1.7.2. Explica con tus palabras y por escrito por qué no se puede sumar un tensor $(2,0)$ con un tensor $(1,1)$.

Vamos a introducir una nueva operación entre tensores que nos servirá para hallar una base del espacio vectorial $\mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$, y por tanto su dimensión. Esta operación es válida para cualquier tipo de tensores, aunque nosotros la usaremos principalmente entre los tensores más elementales: los vectores y las formas lineales.

Definición 1.2. Sean $T \in \mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$ y $R \in \mathcal{T}_{p,q}(\mathbf{V})$. Se define el *producto tensorial* de T y R, denotado por $T \otimes R$, como la aplicación

$$T \otimes R : \mathbf{V} \times \overset{r+p}{\cdots} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \times \overset{s+q}{\cdots} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}$$

$$T \otimes R\,(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r+p}, \psi^1, \dots, \psi^{s+q}) := T(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r, \psi^1, \dots, \psi^s) R(\bar{u}_{r+1}, \dots, \bar{u}_{r+p}, \psi^{s+1}, \dots, \psi^{s+q}),$$

resultando que $T \otimes R \in \mathcal{T}_{r+p,s+q}(\mathbf{V})$.

Aunque es largo de escribir, es fácil verificar que el producto tensorial de tensores es de nuevo un tensor. Veámoslo en los casos más sencillos que posteriormente vamos a usar.

Si $\psi, \omega \in \mathbf{V}^*$ entonces, según la anterior definición, se tiene que

$$\psi \otimes \omega \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$$
$$(\psi \otimes \omega)(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \psi(\bar{u}_1)\omega(\bar{u}_2)$$

que es una aplicación bilineal porque

$$\begin{aligned}(\psi \otimes \omega)(\bar{u} + \lambda\bar{v}, \bar{z}) &= \psi(\bar{u} + \lambda\bar{v})\omega(\bar{z}) = (\psi(\bar{u}) + \lambda\psi(\bar{v}))\omega(\bar{z}) = \psi(\bar{u})\omega(\bar{z}) + \lambda\psi(\bar{v})\omega(\bar{z}) = \\ &= (\psi \otimes \omega)(\bar{u}, \bar{z}) + \lambda(\psi \otimes \omega)(\bar{v}, \bar{z}), \\ (\psi \otimes \omega)(\bar{z}, \bar{u} + \lambda\bar{v}) &= \psi(\bar{z})\omega(\bar{u} + \lambda\bar{v}) = \psi(\bar{z})(\omega(\bar{u}) + \lambda\omega(\bar{v})) = \psi(\bar{z})\omega(\bar{u}) + \lambda\psi(\bar{z})\omega(\bar{v}) = \\ &= (\psi \otimes \omega)(\bar{z}, \bar{u}) + \lambda(\psi \otimes \omega)(\bar{z}, \bar{v}),\end{aligned}$$

donde hemos usado la linealidad de ψ y de ω y la propiedad distributiva de $\mathbb{K}$.

Otros productos tensoriales que nos serán de utilidad son

$$\begin{aligned}
&\psi \otimes \bar{v} \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}\\
&(\psi \otimes \bar{v})(\bar{u}, \omega) = \psi(\bar{u})\bar{v}(\omega) = \psi(\bar{u})\omega(\bar{v}),\\
&\bar{u} \otimes \bar{v} \colon \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{K}\\
&(\bar{u} \otimes \bar{v})(\psi, \omega) = \bar{u}(\psi)\bar{v}(\omega) = \psi(\bar{u})\omega(\bar{v}),
\end{aligned}$$

en ambos casos la última igualdad se da porque un vector operando sobre una forma lineal es la forma lineal operando sobre el vector (es decir, $\bar{u}(\psi) := \psi(\bar{u})$, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}, \psi \in \mathbf{V}^*$).

Ejemplos y ejercicios:

1.7.3. Escribe la demostración de que $\psi \otimes \bar{v}$ es bilineal.

1.7.4. Dados $\bar{u} = (3, 2, 1)$ y $\bar{v} = (1, -2, -1)$, halla la matriz asociada a $\bar{u} \otimes \bar{v}$ relativa a la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

Por las propiedades distributiva y asociativa de la multiplicación en $\mathbb{K}$, es fácil comprobar que el producto tensorial de formas lineales verifica las siguientes propiedades:

$$(\psi + \psi') \otimes \omega = \psi \otimes \omega + \psi' \otimes \omega, \qquad \psi \otimes (\omega + \omega') = \psi \otimes \omega + \psi \otimes \omega'$$
$$(\alpha\psi) \otimes \omega = \psi \otimes (\alpha\omega) = \alpha(\psi \otimes \omega), \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}.$$

En general no se verifica la propiedad conmutativa: $\psi \otimes \omega \neq \omega \otimes \psi$, cuando $\psi \neq \omega$.

Propiedades análogas a éstas, las verifican los tensores de cualquier tipo. Otra propiedad que se verifica para tensores, $T,\ R,\ S$, de cualquier tipo es la propiedad asociativa, lo cual permite quitar los paréntesis:

$$T \otimes (R \otimes S) = (T \otimes R) \otimes S \equiv T \otimes R \otimes S;$$

en particular, $(\psi \otimes \phi) \otimes \omega = \psi \otimes (\phi \otimes \omega) = \psi \otimes \phi \otimes \omega$.

Construcción de bases de tensores. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Dada una base $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de $\mathbf{V}$ y obtenida su base dual $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Una base del espacio vectorial $\mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$ es:*

$$\mathcal{B}_{r,s} = \{\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes \bar{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{j_s} \;:\; i_k,\, j_k = 1, \dots, n\}$$

A esta base de $\mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$ se le llama base asociada a $\mathcal{B}$. La dimensión de $\mathcal{T}_{r,s}(\mathbf{V})$ es n^{r+s}.

La demostración es larga y similar para cualquier tipo de tensor; lo demostraremos en uno de los casos particulares que más nos interesan y que resumimos a continuación.

TEOREMA 1.4. *Los espacios vectoriales $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V})$, $\mathcal{T}_{1,1}(\mathbf{V})$ y $\mathcal{T}_{0,2}(\mathbf{V})$ tienen dimensión n^2 y los siguientes conjuntos ordenados son bases:*

- $\mathcal{B}_{2,0} = \{\varphi^i \otimes \varphi^j \ : \ i,j = 1,\dots,n\}$ *es la base de* $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V})$ *asociada a* $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}_{1,1} = \{\varphi^j \otimes \bar{e}_i \ : \ i,j = 1,\dots,n\}$ *es la base de* $\mathcal{T}_{1,1}(\mathbf{V})$ *asociada a* $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}_{0,2} = \{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \ : \ i,j = 1,\dots,n\}$ *es la base de* $\mathcal{T}_{0,2}(\mathbf{V})$ *asociada a* $\mathcal{B}$.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que $\mathcal{B}_{2,0}$ es base de $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V})$. Los casos de $\mathcal{B}_{1,1}$ y $\mathcal{B}_{0,2}$ se demuestran similarmente y os lo dejo como ejercicio.

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores de $\mathbf{V}$ tales que $\bar{u} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i$ y $\bar{v} = \sum_{j=1}^n y^j \bar{e}_j$, entonces

$$\varphi^i \otimes \varphi^j(\bar{u},\bar{v}) = \varphi^i(\bar{u})\varphi^j(\bar{v}) = x^i y^j.$$

Sustituyendo esto en (12) y usando la primera expresión de (15) queda, $\forall\, T \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V})$,

$$T(\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i,j=1}^n T(\bar{e}_i,\bar{e}_j)\,\varphi^i \otimes \varphi^j(\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}\,\varphi^i \otimes \varphi^j(\bar{u},\bar{v}),\ \forall\, \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V},$$

lo cual implica que $T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}\ \varphi^i \otimes \varphi^j$. Esto prueba que $\{\varphi^i \otimes \varphi^j \ : \ i,j = 1,\dots,n\}$ es un sistema generador de $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V})$.

Por otra parte, si para ciertos escalares λ_{ij} se verifica que el tensor cero, T_0, es

$$T_0 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\ \varphi^i \otimes \varphi^j$$

entonces valdrá 0 cuando lo aplicamos al par $(\bar{e}_k,\bar{e}_l)$, $\forall\, k,l = 1,\dots,n$:

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\ \varphi^i \otimes \varphi^j(\bar{e}_k,\bar{e}_l) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\ \varphi^i(\bar{e}_k)\varphi^j(\bar{e}_l) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\delta^i_k\delta^j_l = \lambda_{kl},$$

lo que nos dice que $\{\varphi^i \otimes \varphi^j \ : \ i,j = 1,\dots,n\}$ son linealmente independientes. □

Puesto que $\{\varphi^i \otimes \varphi^j\}$ es una base de los tensores $(2,0)$ y se tiene la expresión:

$$T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}\ \varphi^i \otimes \varphi^j,$$

las *componentes* $\{T_{ij} : i,j = 1,\dots,n\}$ del tensor T relativas a la base $\mathcal{B}$ son las *coordenadas* de T en la base $\mathcal{B}_{2,0}$ asociada a la base $\mathcal{B}$.

Análogamente, usando para su demostración (13) y (15), la expresión de $R \in \mathcal{T}_{1,1}(\mathbf{V})$ en combinación lineal de la base $\mathcal{B}_{1,1}$ es

$$R = \sum_{i,j=1}^{n} R_j^i \, \varphi^j \otimes \bar{e}_i$$

y, usando (14) y (15), la expresión de $S \in \mathcal{T}_{0,2}(\mathbf{V})$ en combinación lineal de la base $\mathcal{B}_{0,2}$ es

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} S^{ij} \, \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j.$$

Ejemplos y ejercicios:

1.7.5. Si $\psi, \omega \in \mathbf{V}^*$ tienen coordenadas $\psi_{\mathcal{B}^*} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\omega_{\mathcal{B}^*} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, halla las coordenadas del tensor $\psi \otimes \omega$ en la base asociada a $\mathcal{B}$ que le corresponde.

1.7.6. Si $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathbf{V}^*$ son dos formas linealmente independientes entonces no existen $\psi, \omega \in \mathbf{V}^*$ tales que $\psi \otimes \omega = \varphi^1 \otimes \varphi^2 + \varphi^2 \otimes \varphi^1$. Este ejemplo nos advierte que no cualquier tensor $(2, 0)$ es simplemente el producto tensorial de dos formas lineales.

1.8. Cambios de coordenadas en los tensores. Un tensor T de tipo (r, s) tiene las componentes

$$T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} := T(\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_r}, \varphi^{i_1}, \dots, \varphi^{i_s})$$

relativas a una base $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de $\mathbf{V}$, con $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ su base dual. Usemos tildes en las componentes de T relativas a otra base $\mathcal{C} = \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n\}$ y su dual $\mathcal{C}^* = \{\omega^1, \dots, \omega^n\}$:

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} := T(\bar{c}_{j_1}, \dots, \bar{c}_{j_r}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_s}).$$

Entonces los índices de arriba cambian como los de las coordenadas de los vectores (contravariantes, ver (5)) y los índices de abajo cambian como las coordenadas de las formas lineales (vectores covariantes, ver (9)), obteniéndose la complicada expresión general:

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = \sum a_{k_1}^{i_1} \dots a_{k_s}^{i_s} T_{l_1 \dots l_r}^{k_1 \dots k_s} b_{j_1}^{l_1} \dots b_{j_r}^{l_r}$$

donde el sumatorio se extiende de 1 a n en los índices repetidos: $k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_r$.

Hagamos la demostración para un tensor T de tipo $(1, 1)$. Queremos calcular las componentes $\tilde{T}_j^i = T(\bar{c}_j, \omega^i)$ a partir de las $T_j^i = T(\bar{e}_j, \varphi^i)$. Las coordenadas de $\bar{c}_j$ en la base $\mathcal{B}$ están en la columna j de la matriz $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = (b_j^i)$, por tanto,

$$\bar{c}_j = b_j^1 \bar{e}_1 + \cdots + b_j^n \bar{e}_n = \sum_{l=1}^{n} b_j^l \bar{e}_l.$$

Las coordenadas de ω^i en la base $\mathcal{B}^*$ están en la fila i de la matriz $\mathcal{C}_{\mathcal{B}^*}^{*\,t} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}} = (a^i_j)$, según (8), por tanto,

$$\omega^i = a^i_1\varphi^1 + \cdots + a^i_n\varphi^n = \sum_{k=1}^{n} a^i_k\varphi^k.$$

Sustituyendo y usando la bilinealidad queda lo que queremos probar:

$$\tilde{T}^i_j = T(\bar{c}_j, \omega^i) = T(\sum_{l=1}^{n} b^l_j\bar{e}_l, \sum_{k=1}^{n} a^i_k\varphi^k) = \sum_{k,l=1}^{n} b^l_j a^i_k T(\bar{e}_l, \varphi^k) = \sum_{k,l=1}^{n} a^i_k T^k_l b^l_j; \tag{18}$$

esta ecuación de cambio de coordenadas escrita en forma matricial queda así:

$$M_{\mathcal{C}}(T) = \mathcal{B}_{\mathcal{C}}\; M_{\mathcal{B}}(T)\; \mathcal{C}_{\mathcal{B}}.$$

Si llamamos $P = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$, queda $M_{\mathcal{C}}(T) = P^{-1}\, M_{\mathcal{B}}(T)\, P$, lo cual nos dice que $M_{\mathcal{B}}(T)$ y $M_{\mathcal{C}}(T)$ son matrices *semejantes*.

También se obtiene que los tensores $(2,0)$ cambian de componentes así:

$$\tilde{T}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} T_{kl} b^k_i b^l_j, \quad \text{o en forma matricial:} \quad M_{\mathcal{C}}(T) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}^{\,t}\; M_{\mathcal{B}}(T)\; \mathcal{C}_{\mathcal{B}};$$

y los tensores $(0,2)$ cambian sus componentes así:

$$\tilde{T}^{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} a^i_k a^j_l T^{kl}, \quad \text{o en forma matricial:} \quad M_{\mathcal{C}}(T) = \mathcal{B}_{\mathcal{C}}\; M_{\mathcal{B}}(T)\; \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^{\,t}.$$

En estos dos casos, las matrices $M_{\mathcal{B}}(T)$ y $M_{\mathcal{C}}(T)$ se dice que son *congruentes*:

Definición 1.3. Dos matrices cuadradas A y A' son *congruentes* si existe una matriz invertible P tal que $A' = P^tAP$.

Es fácil probar que "ser congruentes" es una relación de equivalencia en el conjunto de matrices de orden $n \times n$. ¡Inténtalo!

Ejemplos y ejercicios:

1.8.1. Sea T un tensor en $\mathbb{R}^2$ de tipo $(1,1)$ que en la base canónica viene representado por la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Halla la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{(3,1),(2,-1)\}$.

1.8.2. Haz el mismo ejercicio para el caso en que T sea de tipo $(2,0)$.

1.9. Equivalencia entre tensores de tipo $(1,1)$ y endomorfismos. Los endomorfismos de un espacio vectorial también son tensores. Si f es un endomorfismo de $\mathbf{V}$ y $\mathcal{B}$ es una base, los números que componen la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ se comportan como las componentes de un tensor $(1,1)$, como se observa en la fórmula posterior a (18) que es idéntica a la del cambio de base para endomorfismos: $M(f,\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathcal{C}}\, M(f,\mathcal{B})\, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

TEOREMA 1.5. *La aplicación que aplica cada* $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ *en* $T_f \in \mathcal{T}_{1,1}\mathbf{V}$*, definido por:*

$$T_f(\bar{u},\psi) := \psi(f(\bar{u})),$$

es un isomorfismo natural entre $\operatorname{End}\mathbf{V}$ *y* $\mathcal{T}_{1,1}\mathbf{V}$*.*

DEMOSTRACIÓN. La aplicación $\operatorname{End}\mathbf{V} \to \mathcal{T}_{1,1}\mathbf{V}$, $f \mapsto T_f$ está bien definida ya que T_f es un tensor puesto que es bilineal:

$$T_f(\lambda\bar{u}+\bar{v},\psi) = \psi(f(\lambda\bar{u}+\bar{v})) = \psi(\lambda f(\bar{u}) + f(\bar{v})) = \lambda\psi(f(\bar{u})) + \psi(f(\bar{v})) =$$
$$= \lambda T_f(\bar{u},\psi) + T_f(\bar{v},\psi),$$

$$T_f(\bar{u},\lambda\psi+\omega) = (\lambda\psi+\omega)(f(\bar{u})) = \lambda\psi(f(\bar{u})) + \omega(f(\bar{u})) = \lambda T_f(\bar{u},\psi) + T_f(\bar{u},\omega).$$

La aplicación $f \mapsto T_f$ es lineal por que, si $f,g \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que:

$$T_{\lambda f+g}(\bar{u},\psi) = \psi((\lambda f+g)(\bar{u})) = \psi(\lambda f(\bar{u}) + g(\bar{u})) = \lambda T_f(\bar{u},\psi) + T_g(\bar{u},\psi),$$

por tanto, $T_{\lambda f+g} = \lambda T_f + T_g$. También es inyectiva porque si T_f es el tensor cero,

$$0 = T_f(\bar{u},\psi) = \psi(f(\bar{u})),\ \forall\,\bar{u},\ \forall\,\psi \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Como $\dim(\operatorname{End}\mathbf{V}) = \dim(\mathcal{T}_{1,1}\mathbf{V}) = n^2$, entonces la aplicación es un isomorfismo. □

Además, dada una base de $\mathbf{V}$, un endomorfismo f y el tensor correspondiente T_f tienen la misma matriz respecto de dicha base. En efecto, dada una base $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ de $\mathbf{V}$ y su base dual $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1,\dots,\varphi^n\}$, la matriz $M(f,\mathcal{B}) = (a^i_j)$ verifica $a^i_j = \varphi^i(f(\bar{e}_j)) = T_f(\bar{e}_j,\varphi^i)$ que son, según la segunda fórmula de (15), las componentes de la matriz $M_{\mathcal{B}}(T_f)$.

1.10. Contracción de un tensor. La traza de un endomorfismo f está bien definida como la traza de su matriz asociada respecto a una base, $\operatorname{traza}(f) := \operatorname{traza} M(f,\mathcal{B})$, puesto que esta traza depende de f pero no de la base elegida. Siguiendo la sección anterior, la traza de f también se puede calcular con el tensor correspondiente T_f así: $\operatorname{traza}(f) = \sum_{k=1}^n T_f(\bar{e}_k,\varphi^k)$. Este valor se conoce también como la *contracción* del tensor T_f, y se puede considerar un caso especial de la definición siguiente.

Definición 1.4. Sea T un tensor de $\mathbf{V}$ de tipo (r,s), con $r,s \geq 1$. Consideremos dos índices i,j con $1 \leq j \leq r,\ 1 \leq i \leq s$. Definimos la *contracción* $\binom{i}{j}$ del tensor T al tensor $C^i_j(T)$ que se obtiene de tipo $(r-1,s-1)$ definido por

$$C^i_j(T)(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_{r-1},\psi^1,\dots,\psi^{s-1}) := \sum_{k=1}^{n} T(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_{j-1},\bar{e}_k,\bar{u}_j,\dots,\bar{u}_{r-1},\psi^1,\dots,\psi^{i-1},\varphi^k,\psi^i,\dots,\psi^{s-1}),$$

$\forall\, \bar{u}_1,\dots,\bar{u}_{r-1} \in \mathbf{V},\ \psi^1,\dots,\psi^{s-1} \in \mathbf{V}^*$ y $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ base de $\mathbf{V}$, con $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1,\dots,\varphi^n\}$.

Si llamamos $R = C^i_j(T)$ calculamos que las componentes de la contracción son:

$$R^{i_1\dots i_{s-1}}_{j_1\dots j_{r-1}} = \sum_{k=1}^{n} T^{i_1\dots k\dots i_{s-1}}_{j_1\dots k\dots j_{r-1}},$$

donde el superíndice k está en el lugar i-ésimo y el subíndice k está en el lugar j-ésimo.

La definición de una contracción no depende de la base $\mathcal{B}$ que hayamos elegido para hacer el cálculo. Para ilustrarlo, probemos que la contracción no depende de la base para el caso particular de la contracción $\binom{1}{2}$ de un tensor de tipo (2,2): Dado un tensor

$$T\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{R},$$

la contracción $\binom{1}{2}$ de T, siguiendo la definición anterior, es de la forma

$$C^1_2(T)\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to \mathbb{R},$$

con $C^1_2(T)(\bar{u},\psi) = \sum_{k=1}^n T(\bar{u},\bar{e}_k,\varphi^k,\psi)$. Si ahora tenemos otra base $\mathcal{C} = \{\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n\}$ y su dual $\mathcal{C}^* = \{\omega^1,\dots,\omega^n\}$, aplicando las fórmulas (4) y (10) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} T(\bar{u},\bar{e}_k,\varphi^k,\psi) &= \sum_{k=1}^{n} T(\bar{u}, \sum_{l=1}^{n} a^l_k \bar{c}_l, \sum_{m=1}^{n} b^k_m \omega^m, \psi) \\ &= \sum_{k,l,m=1}^{n} a^l_k b^k_m T(\bar{u},\bar{c}_l,\omega^m,\psi) = \sum_{l,m=1}^{n} \delta^l_m T(\bar{u},\bar{c}_l,\omega^m,\psi) \\ &= \sum_{l=1}^{n} T(\bar{u},\bar{c}_l,\omega^l,\psi).\end{aligned}$$

Ejemplos y ejercicios:

1.10.1. Halla todas las posibles contracciones del tensor T de tipo $(2,2)$ definido por $T(\bar{u},\bar{v},\varphi,\psi) = \varphi(\bar{u})\psi(\bar{v})$.

1.10.2. Explica porqué la traza de f es la única contracción posible del tensor T_f.

1.11. Tensores simétricos y antisimétricos en $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V})$. Veamos algunas propiedades adicionales que pueden tener los tensores. Seguimos considerando a $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Definición 1.5. Si T es un tensor $(2,0)$ sobre $\mathbf{V}$, decimos que es *simétrico* si

$$T(\bar{u},\bar{v}) = T(\bar{v},\bar{u}), \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V},$$

y decimos que T es un tensor *antisimétrico* si

$$T(\bar{u},\bar{v}) = -T(\bar{v},\bar{u}), \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V}.$$

Nota: Esta última propiedad es equivalente a decir que $T(\bar{u},\bar{u}) = 0$, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$. En efecto: si T es antisimétrico $T(\bar{u},\bar{u}) = -T(\bar{u},\bar{u})$ lo que implica que $T(\bar{u},\bar{u}) = 0$. Y viceversa, si $T(\bar{u},\bar{u}) = 0$, $\forall\, \bar{u}$, se verifica que $0 = T(\bar{u}+\bar{v},\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u},\bar{u})+T(\bar{u},\bar{v})+T(\bar{v},\bar{u})+T(\bar{v},\bar{v})$, $\forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V}$; por tanto, será $0 = T(\bar{u},\bar{v}) + T(\bar{v},\bar{u})$ lo que implica que T es antisimétrico. Por está equivalencia, a los tensores antisimétricos se les llama también *tensores alternados*.

Denotemos por $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$ al conjunto de los tensores $(2,0)$ simétricos y por $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$ al conjunto de los tensores $(2,0)$ antisimétricos. Como la suma y la multiplicación por escalares de tensores simétricos dan tensores simétricos, y lo propio sucede para los tensores antisimétricos, resulta que $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$ y $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{T}_{2,0}\mathbf{V}$. La suma de estos subespacios es suma directa y son complementarios, es decir:

$$\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{V}) = \mathcal{S}_2\mathbf{V} \oplus \mathcal{A}_2\mathbf{V},$$

ya que el único tensor que es simétrico y antisimétrico es el tensor cero y cada tensor se descompone en la suma de uno simétrico y uno antisimétrico, $T = T_{\mathbf{s}} + T_{\mathbf{a}}$, definidos por:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{s}}(\bar{u},\bar{v}) &:= \tfrac{1}{2}\big(T(\bar{u},\bar{v}) + T(\bar{v},\bar{u})\big) \\ T_{\mathbf{a}}(\bar{u},\bar{v}) &:= \tfrac{1}{2}\big(T(\bar{u},\bar{v}) - T(\bar{v},\bar{u})\big). \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio probar que $T_{\mathbf{s}}$ es simétrico y $T_{\mathbf{a}}$ es antisimétrico.

Si $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$ y T es un tensor simétrico (respectivamente, antisimétrico) se verifica que la matriz $M_{\mathcal{B}}(T)$ es simétrica (resp. antisimétrica), ya que las componentes de la matriz verifican $T_{ij} = T(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = T(\bar{e}_j,\bar{e}_i) = T_{ji}$ (resp., $T_{ij} = -T_{ji}$). Se obtiene que

$$M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}(T_{\mathbf{s}}) + M_{\mathcal{B}}(T_{\mathbf{a}}),$$

que se corresponde con la conocida descomposición de una matriz cuadrada en suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

Las bases de $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$ y $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$ se construyen usando los siguientes “productos”de formas lineales:

$$\psi \vee \omega := \psi \otimes \omega + \omega \otimes \psi, \quad \text{es el } \textit{producto simétrico} \text{ de } \psi \text{ por } \omega,$$

$$\psi \wedge \omega := \psi \otimes \omega - \omega \otimes \psi, \quad \text{es el } \textit{producto exterior} \text{ de } \psi \text{ por } \omega.$$

Comprobad que $\psi \vee \omega \in \mathcal{S}_2\mathbf{V}$ y $\psi \wedge \omega \in \mathcal{A}_2\mathbf{V}$. Es fácil ver que estas dos nuevas operaciones, al igual que el producto tensorial, tienen la propiedad distributiva.

Algunos denotan $\otimes_s$ en lugar de $\vee$. También se podrían definir los productos simétrico y exterior con las mismas fórmulas pero multiplicadas por $\frac{1}{2}$; es una cuestión de convenio.

Si tenemos la base dual $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ de $\mathbf{V}^*$, resulta que los siguientes conjuntos (convenientemente ordenados) son las bases de $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$ y $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$ *asociadas a la base* $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$:

- $\mathcal{B}_2^S = \{\varphi^i \vee \varphi^j \ : \ i \leq j; \ i, j = 1, \dots, n\}$ es base de $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$.
- $\mathcal{B}_2^A = \{\varphi^i \wedge \varphi^j \ : \ i < j; \ i, j = 1, \dots, n\}$ es base de $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$.

La dimensión de $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$ es $\frac{1}{2}n(n+1) = \binom{n+1}{2}$ y la de $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$ es $\frac{1}{2}n(n-1) = \binom{n}{2}$.

Notar que $\varphi^i \vee \varphi^i = 2\varphi^i \otimes \varphi^i$.

Análogamente, se definen los tensores simétricos y antisimétricos de $\mathcal{T}_{0,2}(\mathbf{V})$ cambiando los roles entre formas lineales y vectores. Igualmente, se puede definir el producto simétrico y el producto exterior de vectores y obtener las correspondientes bases asociadas a una base de $\mathbf{V}$. En cambio, todo lo anterior no puede hacerse en $\mathcal{T}_{1,1}(\mathbf{V})$.

Ejemplos y ejercicios:

1.11.1. Calcula las bases de $\mathcal{S}_2\mathbb{R}^2$ y de $\mathcal{A}_2\mathbb{R}^2$ asociadas a la base dual canónica de $\mathbb{R}^{2*}$.

1.11.2. Halla la descomposición en suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico del tensor $T\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dado por $T((x, y, z), (x', y', z')) = 3xx' + 2xz' + 2yz' - zx'$.

1.12. Tensores covariantes antisimétricos y función determinante. La Definición 1.5 de simetría y antisimetría se extiende fácilmente a cualquier par de factores de un tensor covariante (o contravariante) de orden $r \geq 3$. En particular, son especialmente útiles en geometría y física los tensores covariantes antisimétricos respecto a cualquier par de factores y que introducimos a continuación.

Definición 1.6. Un tensor T en $\mathbf{V}$ de tipo $(r, 0)$ es *antisimétrico* si

$$T(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_j, \dots, \bar{u}_r) = -T(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_j, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_r),$$

$\forall\, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r \in \mathbf{V}$ y $\forall\, i, j$ con $1 \leq i < j \leq r$.

Denotamos por $\mathcal{A}_r\mathbf{V}$ al conjunto de los tensores $(r,0)$ antisimétricos, el cual, además, es un espacio vectorial. La propiedad que los define es equivalente a decir que si se repite un vector en dos posiciones entonces el tensor vale 0; esto es, $T(\dots,\bar{u},\dots,\bar{u},\dots)=0$, $\forall\bar{u}\in\mathbf{V}$ (que se prueba como en la Nota posterior a la Definición 1.5).

Destaquemos la siguiente propiedad de los tensores covariantes antisimétricos.

Proposición 1.6. *Sea $T\in\mathcal{A}_r\mathbf{V}$. Si $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_r\in\mathbf{V}$ son linealmente dependientes entonces $T(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_r)=0$*

Para demostrarlo supongamos, por ejemplo, que $\bar{u}_1=a_2\bar{u}_2+\cdots+a_r\bar{u}_r$ y obtenemos:

$$T(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_r)=T(\sum_{i=2}^{r}a_i\bar{u}_i,\bar{u}_2,\dots,\bar{u}_r)=\sum_{i=2}^{r}a_iT(\bar{u}_i,\bar{u}_2,\dots,\bar{u}_r)=0,$$

porque necesariamente en cada sumando del último sumatorio hay un vector repetido.

Para considerar la base de $\mathcal{A}_r\mathbf{V}$ asociada a una base de $\mathbf{V}$ se debería empezar definiendo el *producto exterior de tensores covariantes antisimétricos* de cualquier orden (que resulta tener la propiedad asociativa), pero esta definición es algo complicada y no la incluimos en estos apuntes. Nos bastará con la siguiente definición que, en realidad, es un teorema que se prueba a partir de la definición general del producto exterior.

Definición 1.7. Sean $\psi^1\dots\psi^r\in\mathbf{V}^*$. Definimos el *producto exterior de formas lineales* con la fórmula

$$(\psi^1\wedge\dots\wedge\psi^r)(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_r):=\det(a^i_j),\quad\text{con}\quad a^i_j=\psi^i(\bar{u}_j).$$

Lo cual, por las propiedades de los determinantes, es un tensor covariante antisimétrico de orden r, es decir, $\psi^1\wedge\dots\wedge\psi^r\in\mathcal{A}_r\mathbf{V}$.

Se obtiene que $\mathcal{B}^A_r=\{\varphi^{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi^{i_r}\ :\ 1\leq i_1<\dots<i_r\leq n\}$ es una base de $\mathcal{A}_r\mathbf{V}$, la llamada *base asociada a* $\mathcal{B}$, y que la dimensión de $\mathcal{A}_r\mathbf{V}$ es $\binom{n}{r}$.

Aparte de $r=2$, en cuyo caso la Definición 1.7 coincide con la dada en la sección anterior, en este curso sólo nos ocuparemos del caso en que el orden del tensor antisimétrico es igual a la dimensión de $\mathbf{V}$. Este caso recibe un nombre que nos es familiar:

Definición 1.8. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Una *función determinante* sobre $\mathbf{V}$ es un tensor antisimétrico de tipo $(n,0)$. Un *elemento de volumen* de $\mathbf{V}$ es una función determinante no nula.

Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ podemos definir la siguiente aplicación:

$$\det_{\mathcal{B}}\colon \mathbf{V} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) \longmapsto \det(\bar{u}_{1_{\mathcal{B}}} \cdots \bar{u}_{n_{\mathcal{B}}})$$

donde $(\bar{u}_{1_{\mathcal{B}}} \cdots \bar{u}_{n_{\mathcal{B}}})$ es la matriz cuya columna j son las coordenadas del vector $\bar{u}_j$ en la base $\mathcal{B}$. Por las propiedades de los determinantes se ve fácilmente que $\det_{\mathcal{B}}$ es un tensor antisimétrico y no nulo; le llamaremos el *elemento de volumen de* $\mathbf{V}$ *determinado por* $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$ se prueba fácilmente que $\det_{\mathcal{B}} = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n$.

Como $\dim(\mathcal{A}_r\mathbf{V}) = \binom{n}{n} = 1$ los elementos de volumen determinados por dos bases son proporcionales. Si $\mathcal{C}$ es otra base de $\mathbf{V}$ se obtiene, por las fórmulas del cambio de base, que $\det_{\mathcal{C}} = k \det_{\mathcal{B}}$, siendo $k = \det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}})$. Además, $\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{B}}$ si y solo si la matriz del cambio de base tiene determinante 1. Necesariamente, todo elemento de volumen de $\mathbf{V}$ está asociado a alguna base.

1.13. Algunos problemas de tensores.

1. Sea la base $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ del espacio vectorial $\mathbf{S}^2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas reales de orden 2.
   a) Hallar la base de $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbf{S}^2(\mathbb{R}))$ asociada a $\mathcal{B}$.
   b) Calcular las coordenadas en la base hallada del tensor covariante de orden dos dado por $T(A, B) = \text{traza}(AB)$.
2. Sean $\mathcal{B}_\circ = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_\circ^* = \{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ su base dual. Se da la siguiente matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Si $T \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$ verifica que $M_{\mathcal{B}_\circ}(T) = A$, escribe T como combinación lineal de la base de $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$ asociada a $\mathcal{B}_\circ$.
   b) Lo mismo para $R \in \mathcal{T}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ tal que $M_{\mathcal{B}_\circ}(R) = A$, pero con la base de $\mathcal{T}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ asociada.
   c) Lo mismo para $S \in \mathcal{T}_{0,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $M_{\mathcal{B}_\circ}(S) = A$, pero con la base de $\mathcal{T}_{0,2}(\mathbb{R}^3)$ asociada.
3. Sean $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de $\mathbf{V}$ y $\mathcal{B}^* = \{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ su base dual. Considera el tensor $T = 6\phi^1 \otimes \phi^3 - 2\phi^2 \otimes \phi^1 - \phi^3 \otimes \phi^2 + 5\phi^2 \otimes \phi^3 - 3\phi^2 \otimes \phi^2 + 4\phi^3 \otimes \phi^3$.
   a) Escribe la matriz asociada a T relativa a la base $\mathcal{B}$.

b) Halla un tensor simétrico $S \in \mathcal{S}_2\mathbf{V}$ y un tensor antisimétrico $Q \in \mathcal{A}_2\mathbf{V}$ tal que $T = S + Q$.

c) Hallar la expresión de S como combinación lineal de los vectores de la base de $\mathcal{S}_2\mathbf{V}$ asociada a $\mathcal{B}$.

d) Hallar la expresión de Q como combinación lineal de los vectores de la base de $\mathcal{A}_2\mathbf{V}$ asociada a $\mathcal{B}$.

4. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_1$ de los polinomios reales de grado menor o igual que uno se considera, para cada número real a, la forma lineal:

$$\phi_a \colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}, \qquad \phi_a(p(t)) = p(a).$$

a) Probar que ϕ_a y ϕ_b forman una base del espacio dual $(\mathcal{P}_1)^*$ si y sólo si $a \neq b$.

b) Hallar $\phi_3 \otimes \phi_{-1}$ y $\phi_3 \wedge \phi_{-1}$.

c) ¿Es cierto que $\{\phi_3 \wedge \phi_{-1}\}$ es una base del espacio de tensores covariantes de orden dos y antisimétricos sobre $\mathcal{P}_1$?

5. Calcular el producto tensorial $\varphi \otimes \psi$, el producto simétrico $\varphi \vee \psi$ y el producto exterior $\varphi \wedge \psi$ de las siguientes formas lineales sobre $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(x, y, z) = x + 2y, \qquad \psi(x, y, z) = 3y - 2z.$$

Hallar la expresión de los 3 tensores obtenidos en las bases asociadas a la base canónica de los espacios $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{S}_2\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{A}_2\mathbb{R}^3$, respectivamente.

6. Probar que un tensor $T \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^2)$ es igual al producto tensorial de dos formas lineales si y solo si la matriz de T en la base usual tiene determinante cero.

7. Probar que un tensor $T \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$, no nulo, es igual al producto tensorial de dos formas lineales si y solo si la matriz de T en la base usual tiene rango 1.

8. Si un tensor covariante de orden 2 sobre $\mathbb{R}^2$ tiene por matriz respecto a la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

¿cuál es su matriz en la base $\{(1, 2), (1, 1)\}$?

9. Se consideran las siguientes matrices cuadradas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

¿Pueden representar el mismo tensor covariante de orden 2 en dos bases diferentes?

10. Escribe el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que se corresponde con el tensor de tipo $(1,1)$ dado por $T = 3\phi_1 \otimes \bar{e}_2 - 2\phi_2 \otimes \bar{e}_1 - 4\phi_3 \otimes \bar{e}_2 + \phi_2 \otimes \bar{e}_3 - \phi_2 \otimes \bar{e}_2 + \phi_3 \otimes \bar{e}_1 + \phi_3 \otimes \bar{e}_3$; siendo $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ la base dual canónica.
11. Calcular el tensor T_f perteneciente a $\mathcal{T}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ correspondiente al endomorfismo:
$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (2x - z, 3x + y, x - 2y + 3z).$$
Calcular T_f aplicado a la forma lineal $\psi \in \mathbb{R}^{3*}$, con $\psi(x,y,z) = x + y$, y al vector $\bar{u} = (2,-2,0)$.
12. Se considera el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ como un tensor dos veces covariante, es decir:
$$T((x,y,z),(x',y',z')) := (x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + yy' + zz'.$$
   a) Escribe su expresión tensorial respecto a la base dual canónica $\{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$.
   b) Calcula la matriz asociada a T relativa a la base $\{(1,1,1),(0,0,-1),(0,1,0)\}$.