

# **CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DE SEMIESPACIOS MULTICAPA SOMETIDOS A TORSIÓN**

por

Antonio Jesús Gómez Fernández

Proyecto Fin de Máster adscrito al Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica de la Universidad de Granada,  
en cumplimiento de los requisitos para la obtención del título de

## **MÁSTER UNIVERSITARIO DE ESTRUCTURAS**

Tutor: Dr. Guillermo Rus Carlborg

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

Universidad de Granada, E.T.S.I.C.C.P.,

18071 Granada, España

Septiembre 2012

# Resumen

Se presenta un modelo semianalítico para la caracterización mecánica de espacios elásticos seminfinitos, formados por capas homogéneas e isotrópicas apiladas verticalmente, sometidos a un movimiento torsional generado por un elemento circular que gira unido a la superficie del medio con el eje de giro normal a las capas.

Este tipo de problema se puede englobar dentro de lo que tradicionalmente se ha denominado Problema de Reissner y Sagoci, primeros autores en investigar el comportamiento mecánico de un sólido elástico seminfinito sometido a torsión desde su cara libre.

La respuesta mecánica del semiespacio elástico se describe mediante la ley de desplazamientos, tras la resolución de una ecuación diferencial obtenida a partir de las ecuaciones dinámicas del movimiento. Para su resolución se emplean diferentes métodos y herramientas matemáticas como la transformada de Hankel, el teorema de los residuos y aproximaciones numéricas.

El modelo supone elasticidad lineal, así como medios homogéneos e isotrópi-

cos, además uniones perfectas entre capas y del disco de giro con la superficie del medio.

Como innovaciones, además de resolver el problema para el caso multicapa, se aporta un método para resolución del sistema de ecuaciones integrales resultante de la imposición de condiciones de contorno. El método ideado es simple y generalizable a cualquier número de capas. Se expone en su formato matricial por lo que resulta sistemático y sencillo de aplicar. Además se incorpora un método numérico para la resolución de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie.

Para finalizar se muestran los resultados obtenidos tras las simulaciones de varios modelos concretos formados por distinta cantidad de capas. Se discuten los resultados y se obtienen conclusiones del modelo semianalítico general.

El interés por desarrollar la caracterización del modelo mecánico planteado viene dada por sus múltiples aplicaciones en el campo de la evaluación no destructiva (END), concretamente mediante el uso de ondas ultrasónicas de torsión, campo puntero en el que destaca el grupo de investigación de END del Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la Universidad de Granada dentro del cual se desarrolla este trabajo. Es la primera vez que un problema de Reissner y Sagoci es aplicado al campo y escala de los ultrasonidos.

# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mi tutor de Trabajo Fin de Máster D. Guillermo Rus Carlborg Profesor Titular del Dpto. de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, por el apoyo prestado en mi vuelta al mundo académico, apostando por mi y ofreciéndome esta oportunidad que para mi, es y sin duda será, fuente de momentos satisfactorios.

Destacar también la inestimable colaboración de D. David Arcoya Álvarez Catedrático del Dpto. de Análisis Matemático quien me ayudó, entre otras muchas cosas, a destripar los entresijos matemáticos que tan ocultos quedaban en la literatura.

No me puedo olvidar de mis compañeros del Laboratorio de Evaluación No Destructiva quienes conforman un gran equipo y grupo de amigos siempre prestos a ayudar. Y finalmente quisiera expresar toda mi gratitud y cariño a mi familia, por su comprensión y apoyo recibido durante la realización de este Trabajo Fin de Máster, especialmente a Lydia quién más próxima a mi ha estado.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Índice</b>	<b>vii</b>
<b>Listado de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivaciones . . . . .	1
1.2 Estado del arte . . . . .	3
1.3 Metodología . . . . .	5
<b>2 Desarrollo del Modelo</b>	<b>7</b>
2.1 Introducción e hipótesis de partida . . . . .	7
2.2 Problema de Reissner y Sagoci para medios multicapa . . . . .	11
2.2.1 Planteamiento del Problema . . . . .	11

2.2.2	Solución de la ecuación diferencial . . . . .	12
2.3	Resolución de las funciones incógnita . . . . .	14
2.3.1	Condiciones de contorno . . . . .	15
2.3.2	Sistema de ecuaciones integrales . . . . .	16
2.3.2.1	Simplificación del sistema . . . . .	17
2.4	Sistema dual de ecuaciones integrales . . . . .	20
2.4.1	Condición de onda saliente en el infinito . . . . .	21
2.4.2	Reducción a ecuación integral de Fredholm . . . . .	22
2.5	Resolución numérica de la ecuación integral de Fredholm . . . . .	23
2.6	Construcción de la solución . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>28</b>
3.1	Datos de los modelos . . . . .	28
3.2	Onda espacial en la superficie . . . . .	31
3.3	Modelo 2D de propagación vertical-radial . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Conclusiones y Trabajos futuros</b>	<b>37</b>
4.1	Conclusiones . . . . .	37
4.2	Trabajos futuros . . . . .	39
	<b>Apéndice</b>	<b>42</b>
<b>A</b>	<b>Propiedades Funciones de Bessel</b>	<b>43</b>
<b>B</b>	<b>Desarrollo de la Condición de Onda Saliente</b>	<b>44</b>



# Lista de Figuras

2.1	Esquema del problema base Reissner y Sagoci. Fuente: Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space I. E. Reissner, H.F. Sagoci. Journal of Applied Physics. vol. 15. págs. 652-654. 1944 . . . . .	8
2.2	Esquema del problema de Reissner y Sagoci para un semiespacio multicapa.	11
2.3	Tipología de las funciones de forma $N_i(x)$ utilizadas. . . . .	24
3.1	Onda atemporal propagándose sobre la superficie del modelo 2 medios. . .	31
3.2	Onda atemporal propagándose sobre la superficie del modelo 3 medios. . .	32
3.3	Onda atemporal propagándose sobre la superficie del modelo 4 medios. . .	33
3.4	Representación 2D de la propagación de la onda en un plano radial vertical cualquiera. Los colores indican la amplitud del desplazamiento transversal al plano. . . . .	36



# Introducción

Se presenta un modelo semianalítico para la caracterización mecánica de espacios elásticos seminfinitos formados por capas apiladas verticalmente, sometidos a un movimiento torsional generado por un elemento circular que gira unido a la superficie del medio con el eje de rotación normal a las capas.

## 1.1 Motivaciones

Los ultrasonidos son ondas de sonido de alta frecuencia y por lo tanto ondas mecánicas, lo que las hace idóneas como herramienta para obtener información mecánica como métodos de Evaluación No Destructiva (END). La idea es sencilla, obtener parámetros mecánicos de un elemento sin acceder al interior del mismo.

Dentro de las ondas mecánicas que habitualmente se utilizan encontramos las ondas tipo P y las tipo S. Las ondas P son de compresión - tracción y están relacionadas con el módulo de Young. Las ondas S son de tipo cortante y están

relacionadas con el módulo de cizalla. Así que dependiendo de las constantes elásticas que se quieran conocer se utilizarán unas u otras.

La obtención del módulo de cizalla tiene multitud de aplicaciones en numerosos campos que van desde ingeniería de materiales hasta ingeniería biomédica. Sirva como ejemplo biomédico el siguiente. Multitud de tejidos humanos tienen una geometría multicapa y existen patologías que se manifiestan en un cambio de consistencia del tejido. Esta consistencia es gobernada básicamente por la estructura de colágeno en la cual se engarzan las células. Esta estructura es mucho más sensible a esfuerzos de cizalla que a esfuerzos de compresión por el hecho de que en la compresión participan también las células mientras que en los esfuerzos cortantes básicamente sólo el colágeno estructural. Es por ello que las ondas S son varios ordenes de magnitud más sensibles al cambio de rigidez en el tejido.

De vuelta al ámbito de este trabajo se indica que las ondas mecánicas con las que se va a tratar son de tipo torsión. Estas ondas, provocadas sobre la superficie de un sólido con dimension horizontal infinita se traducen en ondas de tipo S que viajan radialmente sobre niveles horizontales, por lo tanto con la posibilidad de obtener el valor del módulo de cizalla de los diferentes niveles. El uso de una fuente oscilatoria de torsión y no una que genere directamente ondas S es debido a la forma en que están concebidos los sensores de ondas S actuales. La propagación de ondas S generan indirectamente ondas de tipo P por conversión de modos al llegar a las interfases, enmascarando así la señal recibida y por lo tanto dificultando la obtención del módulo de cizalla.

## 1.2 Estado del arte

El problema mecánico presentado tiene multitud de aplicaciones en cimentaciones, interacción suelo-estructura, diseño mecánico y estructural, y en evaluación no destructiva mediante ondas mecánicas. Es por ello que la cuestión propuesta ha gozado de un gran seguimiento desde mediados del siglo pasado hasta nuestros días.

La respuesta estática de un semiespacio elástico homogéneo e isótropo cuando un disco circular unido a la superficie es obligado a rotar sobre su eje normal central fue primero investigada y resuelta por Reissner y Sagoci [11]. Por ser los primeros autores que trataron la temática es común que este tipo de problema se denomine Problema de Reissner y Sagoci.

Reissner y Sagoci [11] resolvieron el problema de la fuerza torsional oscilatoria sobre un medio seminfinito mediante el uso de funciones de onda esféricas, además Sagoci [12] fue el primer autor en postular que la caracterización de este modelo proporcionaría el valor del módulo de cizalla del medio excitado. El mismo problema fue estudiado, unos años más tarde, por Sneddon [13] avanzando la resolución al utilizar la transformación matemática de Hankel y un sistema dual de ecuaciones integrales. Este sistema de resolución aun sigue vigente en artículos más recientes y en la realización del presente trabajo. Sneddon [13] resolvió el problema para el caso de deformación estática.

Desde entonces, se han hecho otras numerosas contribuciones, el caso dinámico fue resuelto de forma aproximada por Bycroft [3] tomando la distribución de

tensiones cortantes en la capa elástica como la propia de la geometría seminfinita, siendo esta una buena solución para capas de gran espesor y para bajas frecuencias de excitación; el caso dinámico fue también resuelto por Ufliand [16] mediante un método numérico; Stallybrass [14] adoptó un método variacional que conducía a resultados muy próximos a los exactos calculados por Reissner y Sagoci [11]. Collins [4] para un semiespacio y un estrato elásticos mediante una metodología proveniente de un estudio de difracción lumínica a través de una apertura circular; Noble [9] introduce como forma de resolución del sistema dual de Sneddon [13] la transformación de éste en una ecuación integral de Fredholm de segunda especie; Robertson [10], Thomas [15] y Gladwell [6] para un semiespacio elástico utilizando diversos métodos, Gladwell [7] y Awojobi [1, 2] para un estrato elástico, Keer et al. [5] para una capa unida superiormente a un semiespacio elástico. También encontramos artículos de aplicación como el presentado por Wang et al [17] donde estudian la respuesta torsional de un problema de Reissner y Sagoci para una capa saturada. Por último, Yu [18] expone la metodología a seguir para espacios elásticos multicapa ubicando la fuente oscilatoria en el interior del medio, manteniendo la metodología de Sneddon [13] y Noble [9] pero sin resolver la ecuación integral de Fredholm.

En el desarrollo de nuestro trabajo hemos seleccionado la metodología comenzada por Sneddon [13] y Noble [9] continuada por otros muchos autores para aplicarla a un modelo elástico multicapa y seminfinito con la carga oscilatoria de forma superficial. La forma de resolución incluye pequeños avances a diferencia de la forma propuesta por Yu [18], además se incluye un apartado de resolución

numérica para la ecuación integral de Fredholm de segunda especie.

Todos los trabajos anteriores han desarrollado sus modelos para aplicaciones de ingeniería civil donde las escalas son las propias del terreno y estructuras civiles y las oscilaciones tienen frecuencias muy bajas, a excepción del trabajo de Stallybrass [14]. Tras la revisión del estado del arte se confirma que este es el primer proyecto que pretende utilizar el problema de Reissner y Sagoci dentro del campo de los ultrasonidos donde las frecuencias de excitación son del orden de kilohercios, los espesores de los especímenes del orden de décimas de milímetro y los desplazamientos múltiples de micra.

## **1.3 Metodología**

Se presenta un método general semianalítico para resolver un problema tipo de Reissner y Sagoci para un medio multicapa seminfinito con un número finito de capas superpuestas verticalmente. La estructura que sigue el trabajo tras el presente capítulo 1 de introducción es la que sigue.

En el capítulo 2 se expone la metodología para la resolución del problema, empleando para ello un sistema híbrido entre los métodos utilizados por varios de los autores mencionados cuya base se presenta en el trabajo de Sneddon [13] y Noble [9], como última referencia del método se encuentra el trabajo de Yu [18].

En el capítulo 3 se muestran los resultados obtenidos para varios modelos concretos donde se va haciendo varias el número de capas y parámetros de las mismas.

---

El capítulo 4 contiene una las conclusiones y discusiones del método, así como futuras líneas de aplicación y proyectos de continuidad del trabajo.

## Desarrollo del Modelo

En este capítulo se desarrolla el modelo semianalítico que caracterizará mecánicamente el problema de Reissner y Sagoci para un medio elástico multicapa seminfinito.

### 2.1 Introducción e hipótesis de partida

Para introducir adecuadamente nuestro problema se presenta el esquema del modelo base de investigación de Reissner y Sagoci [11]. Ver figura 2.1.

El problema base consiste en un sólido elástico homogéneo e isotrópico de geometría seminfinita el cual se ve sometido a un esfuerzo torsional inducido por un disco unido a la cara plana del sólido de radio  $a$  que gira sobre un eje normal al plano superficial del semiespacio.

Por lo tanto nuestras hipótesis de partida son:

1. La caracterización mecánica se realizará dentro de las leyes de la elasticidad

lineal.

2. Los distintos medios apilados son homogéneos e isotrópicos en todo su volumen.
3. Se tomarán uniones perfectas entre capas, garantizando así la perfecta transmisión de desplazamientos y tensiones.

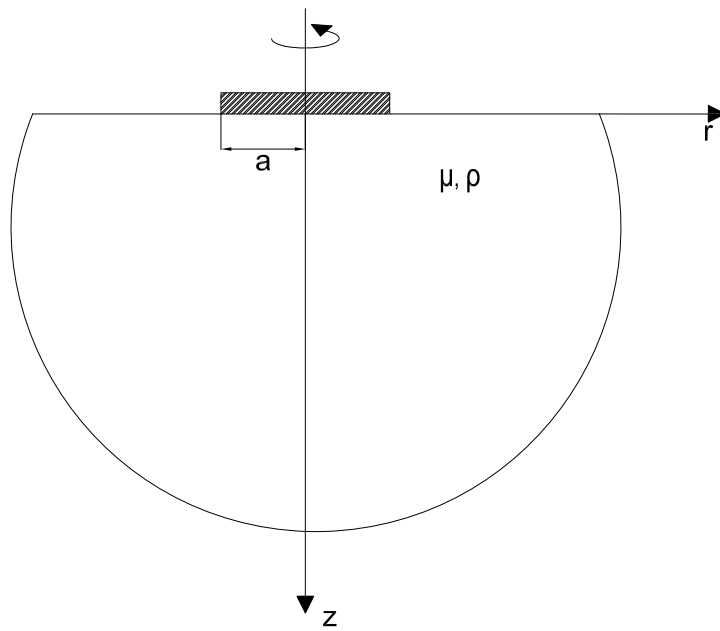


Figura 2.1: Esquema del problema base Reissner y Sagoci. Fuente: Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space I. E. Reissner, H.F. Sagoci. Journal of Applied Physics. vol. 15. págs. 652-654. 1944

Utilizando coordenadas cilíndricas partiremos de las siguientes ecuaciones elásticas dinámicas de Navier-Stokes [11]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (2.1)$$



$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \rho f_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Donde las magnitudes  $\sigma_{ij}$  con  $i, j = r, \theta, z$  se corresponden con las componentes del tensor de tensiones,  $u_i$  con  $i = r, \theta, z$  son las componentes del desplazamiento,  $\rho$  es la densidad del medio y los elementos  $f_r$  son las fuerzas externas.

Las componentes del tensor de deformación son:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2.4)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (2.5)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (2.7)$$

$$e_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (2.9)$$

La relación entre las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones son las siguientes:

$$\sigma_{rr} = \lambda(e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}) + 2\mu e_{rr} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda(e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}) + 2\mu e_{\theta\theta} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}) + 2\mu e_{zz} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta z} = 2\mu e_{\theta z} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu e_{rz} \quad (2.15)$$

La particularidad de este problema se traduce en la simplificación de las ecuaciones gobernantes pues los desplazamientos están limitados a la magnitud angular, es decir:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = u_\theta(r, z, t) \quad u_z = 0 \quad (2.16)$$

por lo tanto las únicas componentes del tensor de tensiones distintas de cero son:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}(r, z) \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r, z) \quad (2.17)$$

Despreciando las fuerzas externas [11] las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

En función de la ley de desplazamientos:

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales 2.19 será la que debamos resolver para obtener la solución del problema.

## 2.2 Problema de Reissner y Sagoci para medios multicapa

### 2.2.1 Planteamiento del Problema

Una vez expuesto el problema de partida de Reissner y Sagoci [11] continuaremos con la resolución del problema para un medio seminfinito multicapa a partir de la ecuación diferencial que gobierna el movimiento. Ver figura 2.2.

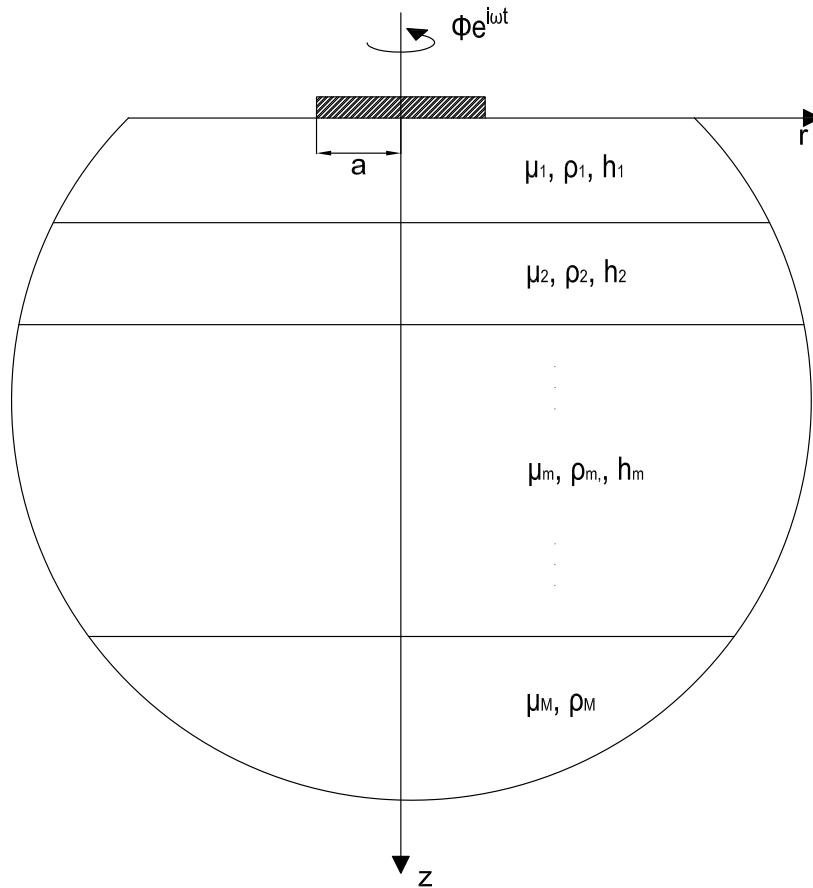


Figura 2.2: Esquema del problema de Reissner y Sagoci para un semiespacio multicapa.

El modelo propuesto es generalista, contiene  $M$  medios siendo el último de ellos el medio seminfinito. Los parámetros significativos de cada capa son la densidad del material  $\rho$ , el módulo de cizalla  $\mu$  y el espesor  $h$ .

El movimiento oscilatorio es impuesto desde el disco, el cual gira con frecuencia angular  $\omega$  y amplitud máxima de giro  $\phi$  radianes.

En coordenadas cilíndricas las ecuaciones que gobiernan el movimiento torsional en cada medio son:

$$\frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(m)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(m)}}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial z^2} = \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial^2 u_\theta^{(m)}}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Con  $m = 1, 2, \dots, M$ .

### 2.2.2 Solución de la ecuación diferencial

Buscaremos soluciones para la ecuación 2.20 del siguiente tipo:

$$u_\theta(r, z, t) = U_\theta(r, z) e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

Por tanto, sustituyendo esta expresión en la ecuación 2.20 obtenemos:

$$\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \left( \frac{\rho \omega^2}{\mu} - \frac{1}{r^2} \right) U_\theta + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.22)$$

Se define la Transformada de Hankel para la función  $U_\theta$ :

$$\bar{U}_\theta(\xi, z) = \int_0^\infty r U_\theta(r, z) J_1(\xi r) dr \quad (2.23)$$

$$U_\theta(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{U}_\theta(\xi, z) J_1(\xi r) dr \quad (2.24)$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de primera especie y de orden 1.

Si se multiplica la expresión 2.22 por  $rJ_1(\xi r)$  y se integra respecto a  $r$  entre 0 y  $\infty$  [13]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} r J_1(\xi r) dr + \int_0^\infty \frac{\partial U_\theta}{\partial r} J_1(\xi r) dr + \frac{\rho \omega^2}{\mu} \int_0^\infty r U_\theta J_1(\xi r) dr \\ - \int_0^\infty \frac{U_\theta}{r} J_1(\xi r) dr + \int_0^\infty \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} r J_1(\xi r) dr \end{aligned} \quad (2.25)$$

operando y haciendo uso de algunas propiedades de las funciones de Bessel, expresiones A.1 y A.2 (ver Apéndice A), se obtiene la ecuación diferencial:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - \xi^2 \right) \bar{U}_\theta = 0 \quad (2.26)$$

con  $k$  como número de onda angular:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (2.27)$$

La solución de esta ecuación diferencial viene dada por:

$$\bar{U}_\theta(\xi, z) = A(\xi) e^{\beta z} + B(\xi) e^{-\beta z} \quad (2.28)$$

donde  $\beta$  se define como:

$$\beta^2 = \xi^2 - k^2 \quad (2.29)$$

Por lo tanto, sustituyendo la expresión 2.28 dentro de 2.23 conseguimos la expresión que define la ley de desplazamientos. A partir de ahora y con motivo de simplificar la escritura usaremos  $u_\theta(r, z)$  en lugar de  $U_\theta(r, z)$ .

Si escribimos las expresiones de la ley de desplazamientos para cada medio:

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{(1)}(r, z) &= \int_0^{\infty} (A_1 e^{\beta_1 z} + B_1 e^{-\beta_1 z}) \xi J_1(\xi r) d\xi, & 0 \leq z \leq h_1 \\
 u_{\theta}^{(2)}(r, z) &= \int_0^{\infty} (A_2 e^{\beta_2 z} + B_2 e^{-\beta_2 z}) \xi J_1(\xi r) d\xi, & h_1 \leq z \leq h_2 \\
 &\vdots \\
 u_{\theta}^{(M)}(r, z) &= \int_0^{\infty} (A_M e^{\beta_M z} + B_M e^{-\beta_M z}) \xi J_1(\xi r) d\xi, & z \geq h_{M-1}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde  $A_i$  y  $B_i$  con  $i = 1, 2, \dots, M$  son las funciones coeficientes incógnita  $A_i(\xi)$  y  $B_i(\xi)$  que deberán ser resueltas a través de la imposición de las condiciones de contorno del problema.

## 2.3 Resolución de las funciones incógnita

Antes de exponer las condiciones de contorno propias del problema introducimos las expresiones de las tensiones necesarias posteriormente. Sustituyendo la expresión 2.9 en la expresión 2.14 tenemos:

$$\sigma_{z\theta}(r, z) = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.31}$$

Por lo que las expresiones de las tensiones  $\sigma_{z\theta}$  para cada medio son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z\theta}^{(1)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \mu_1 \beta_1 (A_1 e^{\beta_1 z} - B_1 e^{-\beta_1 z}) \xi J_1(\xi r) d\xi, & 0 \leq z \leq h_1 \\
 \sigma_{z\theta}^{(2)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \mu_2 \beta_2 (A_2 e^{\beta_2 z} - B_2 e^{-\beta_2 z}) \xi J_1(\xi r) d\xi, & h_1 \leq z \leq h_2 \\
 &\vdots \\
 \sigma_{z\theta}^{(M)}(r, z) &= \int_0^{\infty} \mu_M \beta_M (A_M e^{\beta_M z} - B_M e^{-\beta_M z}) \xi J_1(\xi r) d\xi, & z \geq h_{M-1}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

### 2.3.1 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno del problema son las siguientes:

1. Valor del desplazamiento angular en la superficie:

$$u_{\theta}^{(1)}(r, 0) = r\phi, \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.33)$$

2. Valor de la tensión  $\sigma_{z\theta}$  en la superficie:

$$\sigma_{z\theta}^{(1)}(r, 0) = 0, \quad r \geq a \quad (2.34)$$

3. Continuidad de la ley de desplazamientos en los límites entre capas:

$$u_{\theta}^{(m)}(r, h_m) = u_{\theta}^{(m+1)}(r, h_m), \quad m = 1, 2, \dots, M-2 \quad (2.35)$$

4. Continuidad de la ley de tensiones  $\sigma_{z\theta}$  en los límites entre capas:

$$\sigma_{z\theta}^{(m)}(r, h_m) = \sigma_{z\theta}^{(m+1)}(r, h_m), \quad m = 1, 2, \dots, M-2 \quad (2.36)$$

5. Valor de la tensión  $\sigma_{z\theta}$  cuando  $z$  se aproxima a infinito:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \sigma_{z\theta}^{(M)}(r, z) = 0 \quad (2.37)$$

6. La onda debe comportarse como saliente cuando  $r$  tiende a infinito. En propagación radial de ondas significa que no pueden existir ondas que viajen de nuevo hacia la fuente de partida.

En un primer lugar usaremos la condición de contorno 5 que simplifica la expresión del desplazamiento angular para el medio seminfinito  $M$ . Dado que dicha

condición indica que el valor de la tensión  $\sigma_{z\theta}^{(M)}(r, z)$  debe ser nulo en el infinito, sustituyendo la expresión correspondiente de 2.32 en 2.37 tenemos que  $A_M(\xi) = 0$ , por lo tanto la expresión del desplazamiento en el medio seminfinito tiene una única función coeficiente incógnita  $B_M(\xi)$ :

$$u_{\theta}^{(M)}(r, z) = \int_0^{\infty} B_M e^{-\beta_M z} \xi J_1(\xi r) d\xi, \quad z \geq h_{M-1} \quad (2.38)$$

### 2.3.2 Sistema de ecuaciones integrales

Se plantean el resto de condiciones de contorno llegando a un sistema de ecuaciones integrales de gran complejidad formado por  $2M$  ecuaciones y  $2M - 1$  funciones coeficiente incógnita. Utilizaremos el método planteado por Sneddon [13] el cual consiste en llegar a un sistema de dos ecuaciones integrales que degeneran en una única ecuación integral de Fredholm de segunda especie. Sneddon [13] resuelve el problema para un único medio seminfinito, por lo que el método que a continuación se plantea es novedoso si bien es un aporte sencillo. Yu [18] crea una función  $Z(\xi)$  con significado físico que le ayuda a la resolución del sistema, su esquema contiene el disco oscilatorio a cierta profundidad. En su trabajo expresa que se ha de resolver el sistema de ecuaciones integrales pero no dice cómo.

El método propuesto consiste en la simplificación del sistema total, concretamente en la transformación del sistema de  $2M$  ecuaciones a uno de 2 ecuaciones proporcionado por las condiciones de contorno de la superficie 1 y 2. Para conseguir esto se resuelve el sistema creado por el cumplimiento de las condiciones de



contorno pertenecientes a los límites entre capas en función de la última de las funciones coeficiente incógnita  $B_M(\xi)$ , es decir, se fija esta última función coeficiente como si fuera conocida. Finalmente se utiliza las 2 restantes ecuaciones integrales de la superficie para conseguir el valor de  $B_M(\xi)$  siguiendo el método de Sneddon [13].

### 2.3.2.1 Simplificación del sistema

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones integrales utilizando para ellos las condiciones de contorno 3 y 4 pertenecientes a los límites entre capas. Sustituyendo las correspondientes expresiones de 2.30, 2.32 y 2.38 en las condiciones de contorno con expresiones 2.35 y 2.36 tenemos:

$$\left. \begin{aligned} A_1 e^{\beta_1 h_1} + B_1 e^{-\beta_1 h_1} &= A_2 e^{\beta_2 h_1} + B_2 e^{-\beta_2 h_1} \\ A_2 e^{\beta_2 h_2} + B_2 e^{-\beta_2 h_2} &= A_3 e^{\beta_3 h_2} + B_3 e^{-\beta_3 h_2} \\ \mu_1 \beta_1 (A_1 e^{\beta_1 h_1} - B_1 e^{-\beta_1 h_1}) &= \mu_2 \beta_2 (A_2 e^{\beta_2 h_1} - B_2 e^{-\beta_2 h_1}) \\ \mu_2 \beta_2 (A_2 e^{\beta_2 h_2} - B_2 e^{-\beta_2 h_2}) &= \mu_3 \beta_3 (A_3 e^{\beta_3 h_2} - B_3 e^{-\beta_3 h_2}) \\ &\vdots \\ A_{M-1} e^{\beta_{M-1} h_{M-1}} + B_{M-1} e^{-\beta_{M-1} h_{M-1}} &= B_M e^{-\beta_M h_{M-1}} \\ \mu_{M-1} \beta_{M-1} (A_{M-1} e^{\beta_{M-1} h_{M-1}} - B_{M-1} e^{-\beta_{M-1} h_{M-1}}) &= -\mu_3 \beta_3 B_M e^{-\beta_M h_{M-1}} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Construyendo el sistema 2.39 de forma matricial:

$$\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B} \cdot B_M \quad (2.40)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & C_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} & C_{3,4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & C_{M-3,M-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{M-2,M-2} & C_{M-2,M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{M-1,M-1} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Cada submatriz  $C_{i,j}$  con  $i, j = 1, 2, \dots, M-1$  tiene la siguiente estructura:

$$\text{Para } j = i : \quad C_{i,j} = \begin{pmatrix} e^{\beta_i h_i} & e^{-\beta_i h_i} \\ \mu_i \beta_i e^{\beta_i h_i} & -\mu_i \beta_i e^{-\beta_i h_i} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$\text{Para } j = i + 1 : \quad C_{i,j} = \begin{pmatrix} -e^{\beta_j h_i} & -e^{-\beta_j h_i} \\ -\mu_j \beta_j e^{\beta_j h_i} & \mu_j \beta_j e^{-\beta_j h_i} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Para el resto de casos  $C_{i,j}$  será una matriz de ceros  $4 \times 4$ .

El vector de funciones coeficiente incógnita es:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} A_1^* \\ B_1^* \\ A_2^* \\ B_2^* \\ \vdots \\ A_{M-1}^* \\ B_{M-1}^* \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

El vector de coeficientes independientes es:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\beta_M h_{M-1}} \\ -\mu_M \beta_M e^{-\beta_M h_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Resolviendo el sistema 2.40 se obtendrán las expresiones para cada función coeficiente  $A_m$  y  $B_m$  con  $m = 1, 2, \dots, M-1$  en función de la función coeficiente del último medio  $B_M$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^* \cdot B_M \\ B_1 &= B_1^* \cdot B_M \\ A_2 &= A_2^* \cdot B_M \\ B_2 &= B_2^* \cdot B_M \\ &\vdots \\ A_{M-1} &= A_{M-1}^* \cdot B_M \\ B_{M-1} &= B_{M-1}^* \cdot B_M \end{aligned} \quad (2.46)$$

Las nuevas expresiones para la ley de desplazamientos son:

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{(1)}(r, z) &= \int_0^{\infty} (A_1^* e^{\beta_1 z} + B_1^* e^{-\beta_1 z}) B_M \xi J_1(\xi r) d\xi, & 0 \leq z \leq h_1 \\
 u_{\theta}^{(2)}(r, z) &= \int_0^{\infty} (A_2^* e^{\beta_2 z} + B_2^* e^{-\beta_2 z}) B_M \xi J_1(\xi r) d\xi, & h_1 \leq z \leq h_2 \\
 &\vdots & \vdots \\
 u_{\theta}^{(M-1)}(r, z) &= \int_0^{\infty} (A_{M-1}^* e^{\beta_{M-1} z} + B_{M-1}^* e^{-\beta_{M-1} z}) B_M \xi J_1(\xi r) d\xi, & h_{M-2} \leq z \leq h_{M-1} \\
 u_{\theta}^{(M)}(r, z) &= \int_0^{\infty} e^{-\beta_M z} B_M \xi J_1(\xi r) d\xi, & z \geq h_{M-1}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

## 2.4 Sistema dual de ecuaciones integrales

Tras la simplificación del sistema anterior 2.39 en el cual entraban en juego las condiciones de contorno propias de los límites entre medios retomamos las que provienen de la superficie. Las condiciones 1 2.33 y 2 2.34 proporcionan las dos siguientes ecuaciones integrales, Sneddon [13] las denominó como sistema dual de ecuaciones integrales.

$$\int_0^{\infty} \frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1 f(\xi)} D(\xi) J_1(\xi r) d\xi = r\phi, \quad 0 \leq r \leq a \tag{2.48}$$

$$\int_0^{\infty} D(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0, \quad r \geq a \tag{2.49}$$

donde:

$$D(\xi) = \mu_1 \beta_1 (A_1^* + B_1^*) B_M \xi \tag{2.50}$$

$$g(\xi) = A_1^* + B_1^* \tag{2.51}$$

$$f(\xi) = A_1^* - B_1^* \tag{2.52}$$

### 2.4.1 Condición de onda saliente en el infinito

De acuerdo con Gladwell [7] para que la expresión matemática del movimiento resultante se comporte como una onda saliente cuando  $r$  tiende a infinito está se debe asemejar a las funciones de Hankel de segunda especie  $H_1^{(1)}(\xi r)$  y  $H_1^{(2)}(\xi r)$ .

Las funciones de Hankel se utilizan para representar el comportamiento de ondas salientes o entrantes y provienen de la extensión de las funciones de Bessel al campo complejo.

$$H_1^{(1)}(x) = J_1(x) + iY_1(x) \quad (2.53)$$

$$H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x) \quad (2.54)$$

Cuando el sentido de avance de la onda es de izquierda a derecha se emplea la función  $H_1^{(2)}(\xi r)$ , mientras que si el sentido es contrario se emplea la función  $H_1^{(1)}(\xi r)$ . En el caso de estudio el sentido de avance de la onda en la dimensión radial es positivo, de izquierda a derecha, por lo que la función de referencia es la  $H_1^{(2)}(\xi r)$ .

Para saber si se cumple esta condición es necesario estudiar el comportamiento de la onda cuando  $r$  toma valores muy grandes, lo que se traduce en calcular el límite de la expresión del desplazamiento cuando  $r$  tiende a infinito y comparar el resultado con la función de Hankel  $H_1^{(2)}(\xi r)$ . Únicamente se estudia el desplazamiento para el medio 1 ya que el propósito de este trabajo es el de obtener parámetros mecánicos del interior del sólido desde la superficie.

El cálculo de dicho límite no es sencillo. Gladwell [7] utiliza varios pasos intermedios propuestos por Lamb [8] para resolver el valor principal de la integral

utilizando para ello el Teorema de los Residuos. Ver Apéndice B.

Cuando se compara la expresión resultante del desplazamiento con  $r$  tomando valores muy grandes se desprende que hay que añadir un término adicional a la expresión para que ésta se comporte como la función de Hankel  $H_1^{(2)}(\xi r)$ . Este término adicional tiene la siguiente expresión:

$$- \pi i \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n)}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} D(\xi_n) J_1(\xi_n r) \quad (2.55)$$

donde  $\xi_n$  son las raíces de la función  $f(\xi)$ ,  $q$  es el número de raíces enteras dentro de la solución de la ecuación  $f(\xi_n) = 0$ ,  $k_2 < \xi_n < k_1$ , y  $f'(\xi_n)$  es  $df/d\xi$  evaluada en  $\xi = \xi_n$ .

El término extra 2.55 debe ser añadido a la expresión 2.48, quedando el sistema dual de la siguiente forma [5]:

$$\int_0^\infty \frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1 f(\xi)} D(\xi) J_1(\xi r) d\xi - \pi i \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n)}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} D(\xi_n) J_1(\xi_n r) = r\phi, \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.56)$$

$$\int_0^\infty D(\xi) J_1(\xi r) d\xi = 0, \quad r \geq a \quad (2.57)$$

### 2.4.2 Reducción a ecuación integral de Fredholm

Partiendo del sistema dual de ecuaciones integrales 2.56 y 2.57 se construye una ecuación integral de Fredholm de segunda especie. Siguiendo a Gladwell [7] y Noble [9] si la función  $D(\xi)$  es de la forma:

$$D(\xi) = \frac{2\xi}{\pi} \int_0^a \theta(x) \sin(\xi x) dx, \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.58)$$

satisface la ecuación 2.57. La ecuación auxiliar  $\theta(x)$  utilizada se obtiene a través de la siguiente ecuación integral de Fredholm.

Sustituyendo la expresión 2.58 en la primera ecuación del sistema dual 2.56, se llega a la siguiente ecuación integral de Fredholm de segunda especie [7, 9] en la cual la función  $\theta(x)$  es la incógnita:

$$\theta(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a M^*(x, \xi) \theta(\xi) d\xi = 2\phi x, \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.59)$$

donde el núcleo de la ecuación es:

$$M^*(x, \xi) = M(x, \xi) - 2\pi i \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n) \xi_n}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} \sin(\xi_n x) \sin(\xi_n \xi) \quad (2.60)$$

donde

$$M(x, \xi) = 2 \int_0^\infty H(\eta) \sin(x\eta) \sin(\xi\eta) d\eta \quad (2.61)$$

con

$$H(\eta) = \frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1 f(\xi)} \xi - 1 \quad (2.62)$$

## 2.5 Resolución numérica de la ecuación integral de Fredholm

La dificultad en la resolución de la ecuación integral de Fredholm 2.59 viene dada en función de la complejidad de su núcleo 2.60, 2.61. Para los casos más sencillos de un único medio varios autores han conseguido soluciones analíticas aproximadas [9, 7, 1].

En este trabajo se estudia el caso de  $M$  medios apilados por lo que la complejidad de la expresión del núcleo es alta. Es por ello que se presenta un método numérico para la resolución de la misma.

El método propone aproximar la función solución  $\theta(x)$  con la siguiente estructura:

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^N \theta_i N_i(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.63)$$

donde  $\theta_i$  son los  $N$  pesos que van asociados a las funciones de forma  $N_i(x)$ . Estas funciones de forma son definidas del siguiente modo (ver figura 2.3):

$$N_i(x) = \begin{cases} 1 - |x - x_i| / \Delta x, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.64)$$

donde  $\Delta x$  es el paso entre puntos de evaluación. Las funciones en los extremos del intervalo de validez están definidas sólo en la parte que entra dentro del propio intervalo general  $0 \leq x \leq a$ .

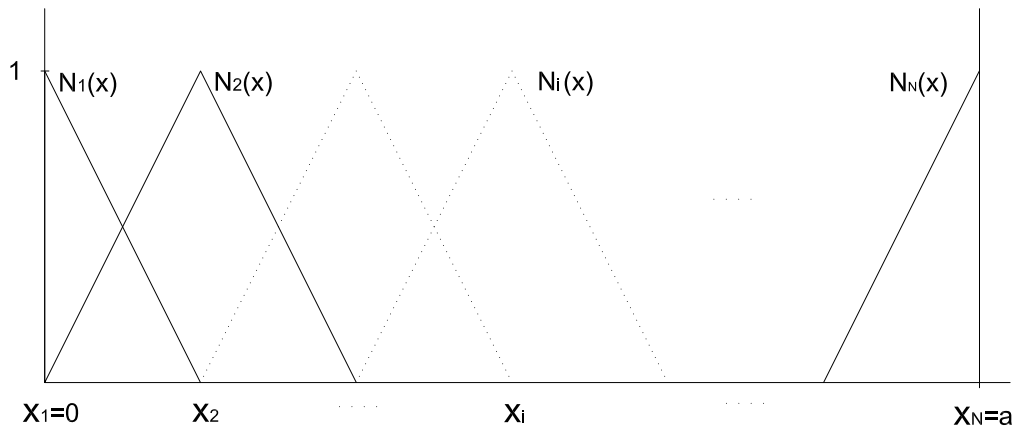


Figura 2.3: Tipología de las funciones de forma  $N_i(x)$  utilizadas.



Sustituyendo la expresión 2.63 en la ecuación integral de Fredholm de segunda especie 2.59 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integrales:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \theta_j \int_0^a M^*(x_1, \xi) N_j(\xi) d\xi &= 2\phi x_1 \\ \theta_2 + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \theta_j \int_0^a M^*(x_2, \xi) N_j(\xi) d\xi &= 2\phi x_2 \\ \theta_3 + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \theta_j \int_0^a M^*(x_3, \xi) N_j(\xi) d\xi &= 2\phi x_3 \\ &\vdots \\ \theta_N + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \theta_j \int_0^a M^*(x_N, \xi) N_j(\xi) d\xi &= 2\phi x_N \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

Construyendo el sistema 2.65 de forma matricial:

$$\mathbb{L} \Theta = \mathbb{E} \quad (2.66)$$

La matriz  $\mathbb{L}$ :

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \pi + L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & \dots & L_{1,N} \\ L_{2,1} & \pi + L_{2,2} & L_{2,3} & \dots & L_{2,N} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \pi + L_{3,3} & \dots & L_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N,1} & L_{N,2} & L_{N,3} & \dots & \pi + L_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

donde

$$L_{i,j} = \int_0^a M^*(x_i, \xi) N_j(\xi) d\xi \quad (2.68)$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

El vector incógnita de pesos:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Y el vector de términos independientes:

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2\pi\phi_{x_1} \\ 2\pi\phi_{x_2} \\ 2\pi\phi_{x_3} \\ \vdots \\ 2\pi\phi_{x_N} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Resolviendo el sistema se reconstruye la solución aproximada 2.63 de la ecuación integral de Fredholm 2.59.

## 2.6 Construcción de la solución

Tras obtener la solución a la ecuación integral de Fredholm de segunda especie 2.59 como aproximación numérica 2.63 se está en situación de completar las expresiones de las leyes de desplazamientos 2.47.

La expresión 2.63 debe ser sustituida en la ecuación 2.58, de esta forma se consigue la expresión de la función  $D(\xi)$ . Tras lo cual se puede obtener la función

incógnita  $B_M(\xi)$ :

$$B_M(\xi) = \frac{D(\xi)}{\mu_1 \beta_1 (A_1^* + B_1^*) \xi} \quad (2.71)$$

que era la última función coeficiente por conocer. Con lo cual, el problema queda resuelto a falta de componer todas las expresiones de los desplazamientos angulares en cada medio 2.47

Como ejemplo se muestra la expresión de los desplazamientos para el medio 1 recordando el término extra a añadir 2.55 referente a la condición de onda saliente para grandes valores de  $r$ .

$$u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} (A_1^* e^{\beta_1 z} + B_1^* e^{-\beta_1 z}) B_M \xi J_1(\xi r) d\xi \\ - \pi i \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n)}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} D(\xi_n) J_1(\xi_n r), \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (2.72)$$

## Resultados

Se presentan una serie de resultados obtenidos a través de la simulación mediante el software MATLAB los cuales serán discutidos para obtener una serie de conclusiones.

### 3.1 Datos de los modelos

Los modelos considerados varían en el número de medios, comenzando por 2 medios (1 capa + 1 seminfinita), 3 (2 capas + 1 seminfinita) y 4 medios (3 capas + 1 seminfinita).

Los modelos cumplen las hipótesis de partida: elasticidad lineal, medios homogéneos e isotrópicos, y unión perfecta en la frontera de ambos materiales.

Los datos de los modelos usados son los siguientes:

Espesores verticales			
	2 medios	3 medios	4 medios
Capa 1	1 mm	1 mm	1 mm
Capa 2		6 mm	6 mm
Capa 3			6 mm
Seminfinita	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Tabla 3.1: Espesores verticales para los modelos de ejemplo.

Densidad			
	2 medios	3 medios	4 medios
Capa 1	1000 Kg/m <sup>3</sup>	1000 Kg/m <sup>3</sup>	1000 Kg/m <sup>3</sup>
Capa 2		1000 Kg/m <sup>3</sup>	1000 Kg/m <sup>3</sup>
Capa 3			1000 Kg/m <sup>3</sup>
Seminfinita	1000 Kg/m <sup>3</sup>	1000 Kg/m <sup>3</sup>	1000 Kg/m <sup>3</sup>

Tabla 3.2: Densidades para los modelos de ejemplo.

Módulo de cizalla			
	2 medios	3 medios	4 medios
Capa 1	10 KPa	10 KPa	5 KPa
Capa 2		60 KPa	50 KPa
Capa 3			120 KPa
Seminfinita	20 KPa	120 KPa	200 KPa

Tabla 3.3: Módulos de cizalla para los modelos de ejemplo.

A todos los medios se les asigna un amortiguamiento del 5%.

A continuación se indican los datos referentes al disco giratorio y su movimiento oscilatorio, constantes en los 3 modelos de estudio:

- Radio del disco:  $a = 2 \text{ mm}$ .
- Frecuencia angular de giro:  $\omega = 2\pi \cdot 4 \text{ KHz}$ .
- Amplitud máxima de giro:  $\phi = 10^{-3} \text{ rad}$ .

## 3.2 Onda espacial en la superficie

Se muestran las representación gráfica de las soluciones para los medios propuestos obtenidas mediante el algoritmo implementado en el software MATLAB (ver Apéndice C) como onda espacial atemporal para un valor de  $r$  cualquiera en la superficie ( $z = 0$ ), cuya expresión analítica es la que sigue:

$$u_{\theta}^{(1)}(r,0) = \int_0^{\infty} (A_1^* + B_1^*) B_M \xi J_1(\xi r) d\xi \quad (3.1)$$

El intervalo de representación en la dimensión radial  $r$  va desde 0 a 10 mm.

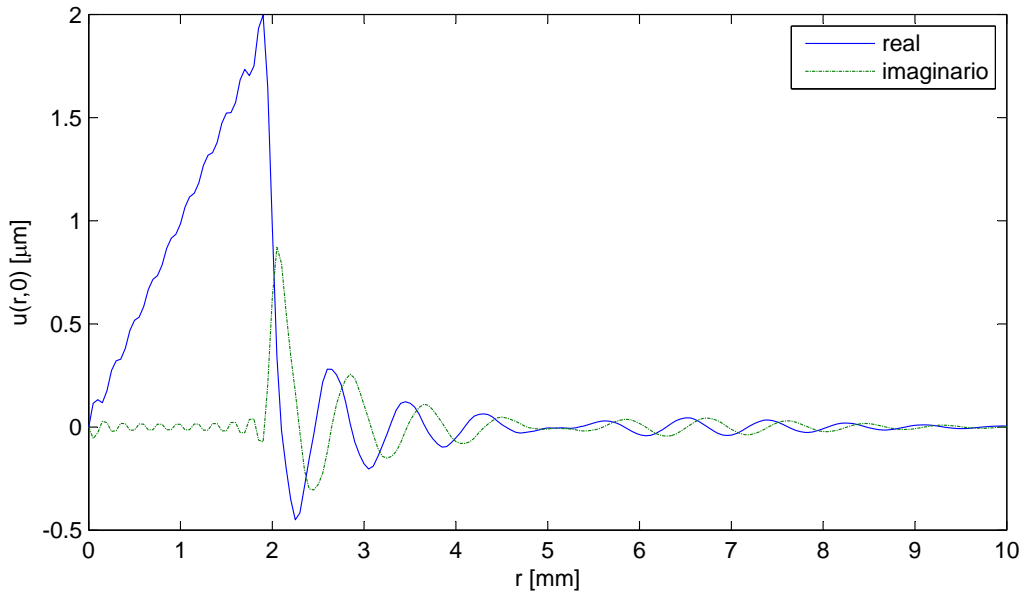


Figura 3.1: Onda atemporal propagándose sobre la superficie del modelo 2 medios.

Las señales obtenidas representan los desplazamientos transversales sobre un radio cualquiera.

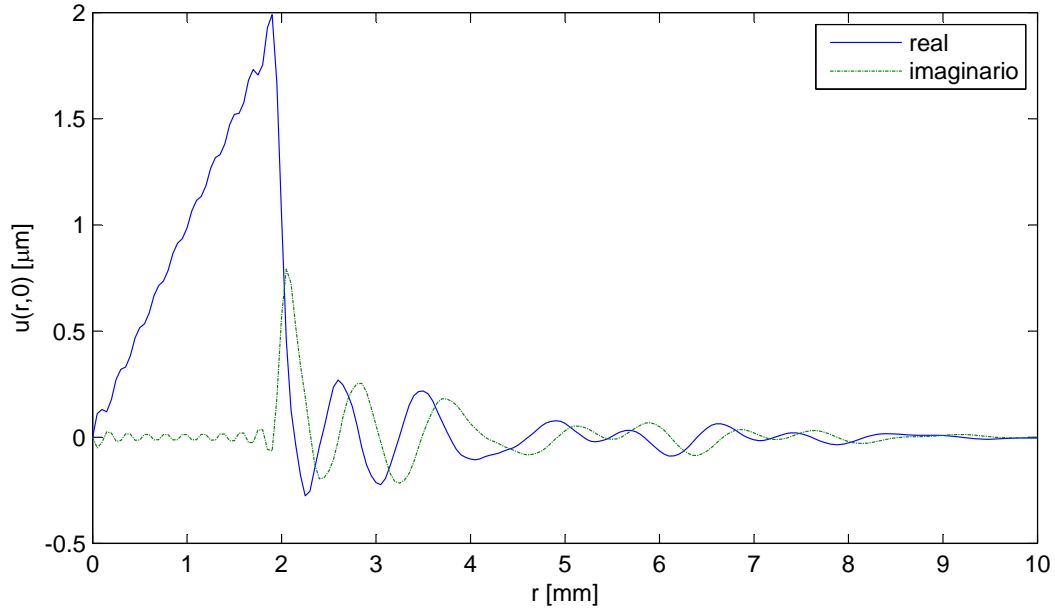


Figura 3.2: Onda atemporal propagándose sobre la superficie del modelo 3 medios.

Presentan un formato adecuado al problema mecánico del cual forman parte. El fenómeno de amortiguación es correcto. Se puede observar la parte lineal del desplazamiento contenida en el intervalo perteneciente al radio  $a$  del disco oscilatorio cuyo valor máximo de desplazamiento es:

$$u_{\theta,max}^{(1)}(r,0) = u_{\theta}^{(1)}(a,0) = a \cdot \phi = 2.00 \text{ mm} \quad (3.2)$$

donde  $\phi$  es la máxima amplitud de giro del disco.

El desarrollo general de las ondas es lógico y en él se puede observar la predominancia de la longitud de onda del medio 1 cuyo valor es, en ambos casos,



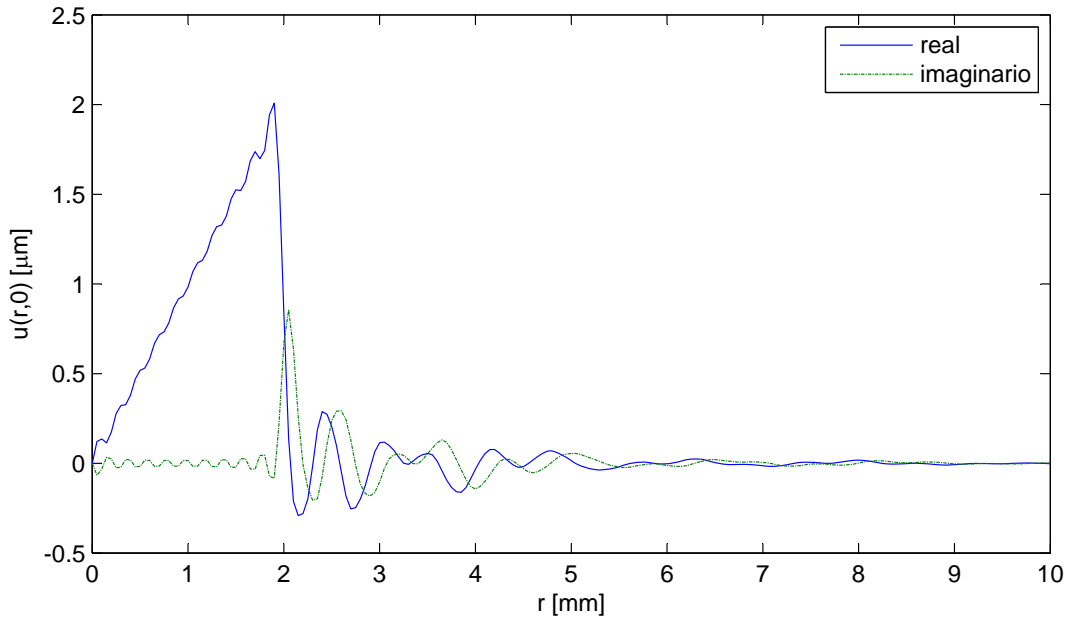


Figura 3.3: Onda atemporal propagándose sobre la superficie del modelo 4 medios.

del orden de  $0.7 - 0.9 \text{ mm}$ :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k} \approx 0.7 - 0.9 \text{ mm} \quad (3.3)$$

En el transcurso de los cálculos se ha visto una correcta tendencia hacia el valor 0 de la parte imaginaria de la señal. Las limitaciones del software empleado y el consumo de memoria del método numérico empleado para la resolución de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie no ha permitido seguir mejorando la solución obtenida en cuanto a precisión de la misma. Los tiempos de computación van creciendo según se va complicando el modelo, por ejemplo para el modelo de 2 medios el tiempo fue de 249 sg, mientras que para el modelo de 4 medios fue de 384 sg.

Es por lo tanto un punto a señalar, para trabajos futuros, la evolución del algoritmo numérico para la resolución de la ecuación tipo Fredholm con motivo de reducir su consumo de memoria y así mejorar la precisión de las soluciones.

Destacar también que, para los modelos propuestos de estudio, el valor de los términos adicionales, como requerimiento según la condición de onda saliente para grandes valores de  $r$ , ha sido 0, debido a que la expresión 3.4 devuelve el valor 0 para todos los puntos ubicados en el intervalo  $k_2 < \xi < k_1$ , el cual es el único que puede contener raíces reales de la función  $f(\xi)$ .

$$\frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1(\xi) f'(\xi)} \quad (3.4)$$

Esta conclusión concuerda con la puntualización que Gladwell [7] hace sobre los resultados obtenidos en su trabajo [6] y el de Robertson [10], donde se obtuvieron soluciones correctas sin el uso de los términos adicionales del método.

El análisis exhaustivo del porqué este comportamiento para nuestro caso de  $k_2 < k_1$ , y el estudio de otros casos y jerarquías diferentes de los números de onda surgen como posible futuro trabajo de interés.

### 3.3 Modelo 2D de propagación vertical-radial

Se muestra la representación gráfica de la solución para el modelo de 2 medios 3.4 obtenida mediante el algoritmo implementado en el software MATLAB (ver Apéndice C) como propagación de la onda espacial atemporal en un plano cualquiera  $rz$ . Los datos de los medios son:

Datos del modelo 2D. 3 medios			
	Capa 1	Capa 2	Seminfinita
Densidad	$1000 \text{ Kg/m}^3$	$1000 \text{ Kg/m}^3$	$1000 \text{ Kg/m}^3$
Espesor	3 mm	5.5 mm	$\infty$
Amortiguamiento	5%	5%	5%
Módulo de cizalla	10 KPa	60 KPa	200 KPa

Tabla 3.4: Datos del modelo 2 medios propagación 2D.

Datos referentes al disco giratorio y su movimiento oscilatorio:

- Radio del disco:  $a = 2 \text{ mm}$ .
- Frecuencia angular de giro:  $\omega = 2\pi \cdot 4 \text{ KHz}$ .
- Amplitud máxima de giro:  $\phi = 10^{-2} \text{ rad}$ .

La amplitud máxima de giro equivale a un desplazamiento angular en el borde del disco de  $20 \mu\text{m}$ .

Se representa la amplitud del desplazamiento transversal de cada uno de los puntos en los que ha sido discretizado el plano.

Se observa un comportamiento correcto de la propagación en el medio. El rango de valores en los desplazamientos transversales es lógico. Se aprecian los cambios de longitud de onda en cada medio, dependientes directamente de la rigidez a cizalla.

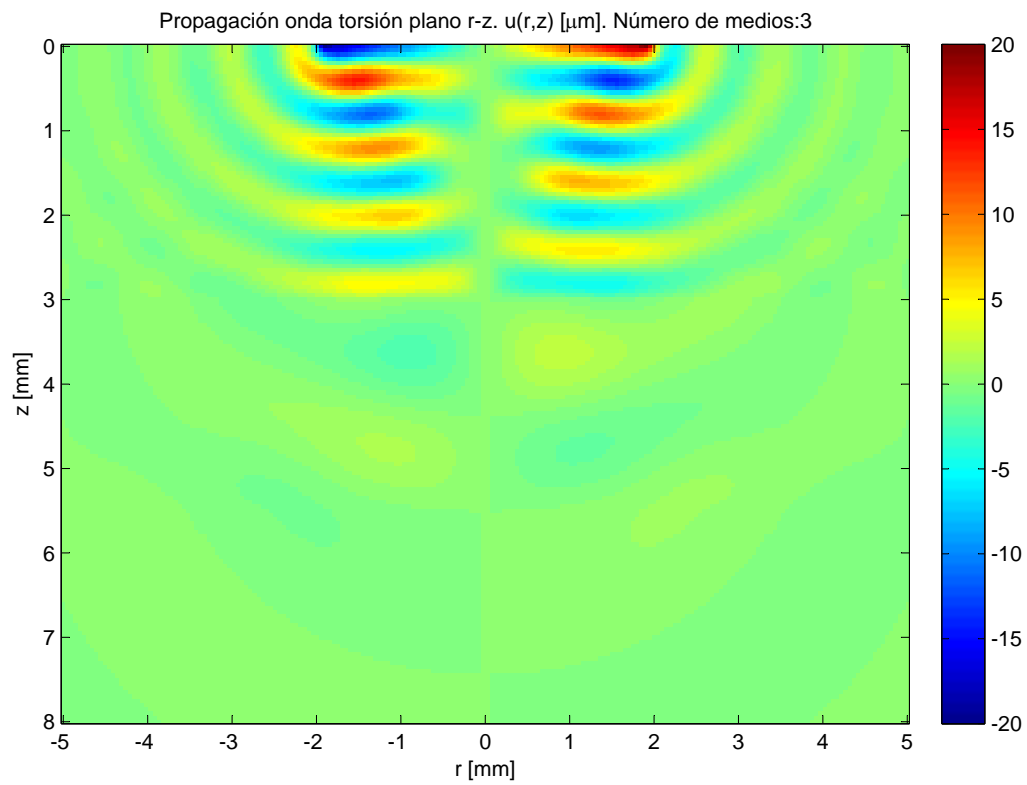


Figura 3.4: Representación 2D de la propagación de la onda en un plano radial vertical cualquiera. Los colores indican la amplitud del desplazamiento transversal al plano.

## Conclusiones y Trabajos futuros

### 4.1 Conclusiones

Tras el desarrollo analítico del problema, la resolución numérica de la ecuación final y la obtención y estudio de los resultados obtenidos pasamos a enumerar y analizar las conclusiones del trabajo.

1. Desarrollo del modelo. Parte analítica:

La fortaleza del modelo proviene, sin lugar a dudas, de toda su parte inicial donde el método analítico predomina. La consistencia del mismo está demostrada a través de todas las publicaciones y trabajos realizados por numerosos autores. El aporte en la resolución del sistema de ecuaciones integrales de las condiciones de contorno crea cierta ventaja resolutiva y simplifica los cálculos de forma complementaria a otros autores como Yu [18].

2. Desarrollo del modelo. Parte numérica:

Quedan de manifiesto las limitaciones del método numérico planteado para la resolución de la ecuación integral de Fredholm y la reconstrucción de la señal. La orientación y convergencia son correctas, sin embargo es requerida una solución con mayor exactitud dentro de los límites actuales de la computación. Por ello, se propone como continuación de los trabajos la construcción de un método de resolución cuya evolución permita simplificar su estructura y ganar en velocidad de convergencia y exactitud de la solución.

3. Efectividad en el uso del término adicional por condición de onda saliente:

Se concluye, tras los cálculos realizados para el caso presentado, que los términos adicional provenientes del cumplimiento de la condición de onda saliente para grandes valores de  $r$  tienen valor 0 en el caso estudiado, donde el medio inferior es más rígido que el superior. No podemos asegurar que este hecho suceda en todos los casos que entren dentro de un formato similar, pero lo obtenido concuerda con la puntualización que Gladwell [7] hace sobre los resultados obtenidos en su trabajo [6] y el de Robertson [10], donde se obtuvieron soluciones correctas sin el uso de los términos adicionales.

4. Aplicación como método de Evaluación No Destructiva:

Desarrollando analíticamente la expresión del desplazamiento angular en la superficie del medio 1 para el caso resuelto de 2 materiales 4.1,

$$u_{\theta}^{(1)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \right) e^{\beta_1 h_1} + \left( 1 - \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \right) e^{-\beta_1 h_1} \right] e^{-\beta_2 h_1} \xi B_2 J_1(\xi r) d\xi \quad (4.1)$$

se puede ver claramente que el parámetro mecánico del medio 2 se encuentra presente en la expresión de la onda en la superficie. Como analíticamente se puede comprender que los parámetros mecánicos de todos los medios aparecen en la expresión final del desplazamiento sobre la superficie se puede concluir que es factible el uso de estos modelos de caracterización mecánica en aplicaciones de Evaluación No Destructiva.

Se puede concluir que el método para la resolución del problema es robusto y adecuado, sobre todo por su dilatado desarrollo analítico, a expensas de la evolución del apartado numérico en la resolución de la ecuación integral de Fredholm, que permitirá mejorar la precisión del mismo, y que su aplicación a métodos de Evaluación No Destructiva es factible y sencilla.

## 4.2 Trabajos futuros

Se enumeran los posibles trabajos y proyectos futuros que se desprenden del análisis del presente Trabajo Fin de Máster desarrollado.

Trabajos en la evolución del modelo y estudios paralelos sobre detalles del mismo:

1. Mejora y evolución en el método numérico y algoritmo de cálculo:

Como trabajo clave siguiente se destaca la mejora y evolución del método numérico para la resolución de la ecuación integral de Fredholm y la reconstrucción de la señal, al igual que su reflejo en el algoritmo de cálculo implantado en el software MATLAB.

2. Ampliación del modelo con parámetros mecánicos dinámicos:

Ampliación del modelo introduciendo factores de amortiguamiento y otros parámetros mecánicos dinámicos que asemejen más la propagación de las ondas al comportamiento real en el medio.

3. Estudio de la señal en superficie y la relación con el modelo:

Se pretende dar un enfoque físico a las señales de salida en la superficie de forma que se puedan concluir relaciones de los parámetros de la onda superficial y los propios del modelo, mecánicos y geométricos. En este apartado se puede estudiar el porqué de la segunda longitud de onda que modula a la predominante presente en los resultados obtenidos.

4. Estudio de los términos adicionales y su relación con el modelo:

Estudio de los términos adicionales propios de la condición de onda saliente para valores próximos a infinito, análisis de su importancia en según que modelos y jerarquía en el valor de los números de onda  $k$ , así como, explicación analítica y física del valor nulo de los mismos en el presente modelo estudiado.

Proyectos como continuidad en las aplicaciones posibles:

1. Simulación mediante MEF:

Realización de una simulación mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) donde se podrá comprobar en parte la validez del modelo semianalítico desarrollado.



### 2. Validación frente a medidas experimentales:

A falta de la optimización final del equipo de torsión ultrasónica del Laboratorio de Evaluación No Destructiva de la Universidad de Granada, se podrá realizar un comparativo entre muestras de medidas experimentales sobre modelos multicapa reales y ver la cercanía y validez de las simulaciones del modelo semianalítico mediante el código computacional desarrollado en el software MATLAB.

### 3. Resolución del PI:

Creación de un algoritmo de resolución para el Problema Inverso (IP) a plantear para la obtención de parámetros mecánicos de modelos multicapa tras el análisis de la señal obtenida tras la propagación de ondas de torsión sobre el modelo. En una primera fase con modelos previamente conocidos y en una segunda con señales experimentales reales.

item Aplicación de la tecnología a sistemas de Evaluación No Destructiva:

Elaboración de software tecnológico para instrumental de medida de Evaluación No Destructiva mediante dispositivos ultrasónicos de torsión.

item Introducción de anisotropía en el modelo:

Creación de un nuevo modelo con anisotropía en las capas. Este sistema podría dar lugar a una tecnología para la Evaluación No Destructiva mediante ultrasonidos de laminados de materiales compuestos.

# **Apéndice**

## Propiedades Funciones de Bessel

Algunas propiedades interesantes de las funciones de Bessel:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{A.1})$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{A.2})$$

$$\xi^{-\gamma-1} J_{\nu+\gamma+1}(x\xi) = \frac{x^{-\nu-\gamma-1}}{2\gamma\Gamma(\gamma+1)} \int_0^\infty J_\nu(r\xi) r^{\nu+1} (x^2 - r^2)^\gamma dr \quad (\text{A.3})$$

valida para  $\nu > -1$  y  $\gamma > -1$ .

$$\xi^{-\eta-1} J_{\nu-\eta-1}(x\xi) = \frac{x^{\nu-\eta-1}}{2\eta\Gamma(\eta+1)} \int_x^\infty J_\nu(r\xi) r^{-\nu+1} (r^2 - x^2)^\eta dr \quad (\text{A.4})$$

valida para  $\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} > \eta > -1$ .

## Desarrollo de la Condición de Onda Saliente

Es necesario obtener la expresión del desplazamiento para grandes valores de  $r$ , para conseguirlo se realizarán una serie de pasos matemáticos que facilitan el cálculo.

Se parte de la expresión del desplazamiento en la superficie:

$$u_{\theta}(r, 0) = \int_0^{\infty} \frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1 f(\xi)} D(\xi) J_1(\xi r) d\xi \quad (\text{B.1})$$

Se extiende la expresión al semiplano complejo positivo ampliando la variable de integración que pasa a ser  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\eta \geq 0$ . Como las funciones del interior de la integral B.1 son pares, y la función de Bessel de segunda especie  $Y_1$  impar se puede escribir:

$$u_{\theta}(r, 0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1 f(\xi)} D(\xi) H_1^{(1)}(\xi r) d\xi \quad (\text{B.2})$$

donde:

$$H_1^{(1)}(x) = J_1(x) + iY_1(x) \quad (\text{B.3})$$

$$H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x) \quad (\text{B.4})$$

Por comodidad se denomina:

$$\frac{g(\xi)}{\mu_1 \beta_1 f(\xi)} D(\xi) = F(\xi) \quad (\text{B.5})$$

Para calcular la integral B.2 se usa la expresión de su valor propio:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) H_1^{(1)}(\xi r) d\xi = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R F(\xi) H_1^{(1)}(\xi r) d\xi \quad (\text{B.6})$$

Para calcular el valor de la integral se utiliza el Teorema de los Residuos. Para ello se toma un dominio acotado por una curva circular de radio  $R$  centrada en el eje de coordenadas y el propio eje real, y con pequeños semicírculos que rodean por abajo los polos reales de la función  $F(\xi)$ .

El Teorema de los Residuos dice lo siguiente: Sea  $f$  una función analítica en un dominio  $\Omega$  y sea  $C$  una curva de Jordan contenida en  $\Omega$  tal que  $f$  es analítica en la region interior a  $C$  salvo en un numero finito de singularidades aisladas. Entonces la integral de  $f$  sobre  $C$  es igual a la suma de los residuos de  $f$  en dichas singularidades multiplicada por el factor  $2\pi i$ .

$$\oint_C f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^q \text{Res}(f, x_n) \quad (\text{B.7})$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_q$  son todas las singularidades aisladas de  $f$  rodeadas por  $C$  y recorriendo  $C$  en sentido positivo.

Tomando  $f$  como cociente de funciones

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (\text{B.8})$$

donde  $h(x)$  es la función que contiene las singularidades de  $f(x)$  a través de sus raíces. El cálculo de los residuos de  $f$ , si todas las singularidades de la misma son polos simples se puede escribir:

$$Res(f, x) = \sum_{n=1}^q \frac{g(x_n)}{h'(x_n)} \quad (B.9)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y aplicándolo al caso que se nos presenta podemos exponer que:

$$\oint_C F(\zeta) H_1^{(1)}(\zeta r) d\zeta = \int_{-R}^R F(\xi) H_1^{(1)}(\xi r) d\xi + \int_{semicirc.} F(\zeta) H_1^{(1)}(\zeta r) d\zeta \quad (B.10)$$

luego para obtener el valor de la integral en el eje real  $\xi$  basta con resolver las integrales de línea de la curva Jordan cerrada y de la semicircunferencia. Para calcular la integral sobre la curva cerrada se usa el Teorema de los Residuos, donde las singularidades de la función  $F(\zeta)$  servirán para calcular los residuos de la misma. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \oint_C F(\zeta) H_1^{(1)}(\zeta r) d\zeta &= 2\pi i \sum_{n=1}^q Res(F, \xi_n) = \\ &= 2\pi i \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n)}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} D(\xi_n) H_1^{(1)}(\xi_n r) \end{aligned} \quad (B.11)$$

observar que sólo se incluyen las singularidades en el eje real  $\xi$ , eso es debido a que el resto de singularidades son siempre imaginarias puras y se puede demostrar que en estos casos el valor de  $u_\theta \sim 1/r$  por lo su límite para  $r$  grandes tiende a 0. Por eso no se tiene en cuenta en estos cálculos.

Se puede comprobar que la integral en la semicircunferencia vale 0, por lo que se puede concretar el valor de la expresión del desplazamiento para grandes valores

de  $r$ :

$$u_{\theta}(r \uparrow \uparrow, 0) = -\pi \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n)}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} D(\xi_n) Y_1(\xi_n r) \quad (\text{B.12})$$

Como la expresión anterior debe comportarse similarmente a  $H_1^{(2)}(\xi r)$  se concluye que el término que hay que añadir para que esto suceda es:

$$-\pi i \sum_{n=1}^q \frac{g(\xi_n)}{\mu_1 \beta_1(\xi_n) f'(\xi_n)} D(\xi_n) J_1(\xi_n r) \quad (\text{B.13})$$

# Apéndice C

## Algoritmo implementado en Matlab

Este apéndice contiene el resumen de los código creados en software MATLAB para la implementación del problema.

```
1  %%%%%%%%% ARCHIVO GENERAL CÓDIGO REISSNER Y SAGOCI MULTICAPA %%%%%%%%%
2  clear;clc;close;
3  t0 = cputime;
4  global lk M mi ro D;
5  global a N xin Δx eta_i xi_i sin2;
6  global theta_sol ABvector betavector ffvector;
7  global h Bm rr zz uu0 rr_double u_double;
8
9  % CARGAR DATOS DE ENTRADA:
10 materiales2; % 2 materiales (1 capa + 1 seminfinito)
```



---

```

11 % materiales3; % 3 materiales (2 capas + 1 seminfinito)
12 % materiales4; % 4 materiales (3 capas + 1 seminfinito)
13 M=length(mi); % número de medios
14 lk=w*sqrt(ro./mi); % números de onda
15
16 % CARGAR ARCHIVOS RESOLUTIVOS:
17 intfredholm; % Resolución numérica de la integral de Fredholm
18 funincogBm; % Resuelve la función incógnita Bm
19 reconstru_sol; %Reconstruye la solución
20
21 t = cputime-t0;

1 %%%%%% DATOS DEL PROBLEMA 2 MATERIALES %%%%%%
2 global ro mi h w a ampli D;
3
4 % DATOS MATERIALES
5 ro=[1000,1000]; % densidad de cada medio (kg/m3)
6 D=5/100; % coeficiente de amortiguamiento
7 mi=[1,2]*1e4*(1+2*i*D); % módulo de cizalla de cada medio (Pa)
8 h=[0.005,1]; % espesores de cada medio [medio1, medio2,...] (m)
9 % no es necesario introducir valor alto a la capa seminfinita.
10
11 % DATOS DEL TRANSDUCTOR
12 w=2*pi*4e3; % frecuencia angular de giro (1/s)
13 a=0.002; % radio del circulo cerámico del transductor (m)
14 ampli=1e-3; % máxima amplitud de giro (rad)

```

```
1  %%%%%%%%% DATOS DEL PROBLEMA 3 MATERIALES %%%%%%%%%
2
3  global ro mi h w a ampli;
4
5  % DATOS MATERIALES
6  ro=[1000,1000,1000]; % densidad de cada medio(kg/m3)
7  D=5/100; % coeficiente de amortiguamiento
8  mi=[1,6,12]*1e4*(1+2*i*D); % módulo de cizalla de cada medio(Pa)
9  h=[0.001,0.006,1]; % espesores de cada medio [medio1, medio2,...](m)
10 % no es necesario introducir valor alto a la capa seminfinita.
11
12 % DATOS DEL TRANSDUCTOR
13 w=2*pi*4e3; % frecuencia angular de giro (1/s)
14 a=0.002; % radio del circulo cerámico del transductor (m)
15 ampli=1e-3; % máxima amplitud de giro (rad)

1  %%%%%%%%% DATOS DEL PROBLEMA 4 MATERIALES %%%%%%%%%
2
3  global ro mi h w a ampli;
4
5  % DATOS MATERIALES
6  ro=[1000,1000,1000,1000]; % densidad de cada medio(kg/m3)
7  D=5/100; % coeficiente de amortiguamiento
8  mi=[0.5,5,12,20]*1e4*(1+2*i*D); % módulo de cizalla de cada medio(Pa)
9  h=[0.001,0.006,0.006,1]; % espesores de cada medio [medio1, medio2,...](m)
10 % no es necesario introducir valor alto a la capa seminfinita.
```

```
11
12 % DATOS DEL TRANSDUCTOR
13 w=2*pi*4e3; % frecuencia angular de giro (1/s)
14 a=0.002; % radio del circulo cerámico del transductor (m)
15 ampli=1e-3; % máxima amplitud de giro (rad)
```

```
1 function betaa=betaa(xi)
2 global lk M;
3
4 betaa=zeros(M,1);
5 for l=1:length(lk);
6     betaa(l,:)=sqrt(xi^2-lk(l)^2);
7 end
8
9 end
```

```
1 function aa=aa(xi)
2 global M h mi;
3
4 % cálculo de la matriz A
5
6 betaxi=betaa(xi);
7 aa=zeros(2*(M-1));
8
9 for l=1:(M-1)
```

---

```

10     aa(2*l-1,2*l-1)=exp(betaxi(l)*h(l));
11     aa(2*l,2*l)=-mi(l)*betaxi(l)*exp(-betaxi(l)*h(l));
12     aa(2*l,2*l-1)=mi(l)*betaxi(l)*exp(betaxi(l)*h(l));
13     aa(2*l-1,2*l)=exp(-betaxi(l)*h(l));
14 end
15 for l=1:(M-2)
16     aa(2*l,2*l+1)=-mi(l+1)*betaxi(l+1)*exp(betaxi(l+1)*h(l));
17     aa(2*l-1,2*l+1)=-exp(betaxi(l+1)*h(l));
18     aa(2*l,2*l+2)=mi(l+1)*betaxi(l+1)*exp(-betaxi(l+1)*h(l));
19     aa(2*l-1,2*l+2)=-exp(-betaxi(l+1)*h(l));
20 end
21
22 end

```

```

1 function bb=bb(xi)
2 global h M mi;
3
4 % cálculo de la matriz b
5 betaxi=betaa(xi);
6
7 bb=zeros(2*(M-1),1);
8 bb(2*(M-1)-1,1)=exp(-betaxi(M)*h(M-1));
9 bb(2*(M-1),1)=-mi(M)*betaxi(M)*exp(-betaxi(M)*h(M-1));
10
11 end

```

```
1 function AB=AB(xi)
2
3 % cálculo de la matriz AB (solución del sistema aa*AB=bb)
4 % son las funciones coeficiente de las expresiones del modelo
5
6 aaxi=aa(xi);
7 bbxi=bb(xi);
8
9 AB=aaxi\bbxi;
10
11 end

1 function ff=ff(xi)
2
3 % cálculo de la función ff (sistema dual)
4 % es función de los dos primeros componentes de la matriz AB (A1 y B1)
5
6 ABxi=AB(xi);
7 ff=ABxi(1)-ABxi(2);
8
9 end

1 function gg=gg(xi)
2
3 % cálculo de la función gg (sistema dual)
```

---

```
4 % es función de los dos primeros componentes de la matriz AB (A1 y B1)
5
6 ABxi=AB(xi);
7 gg=ABxi(1)+ABxi(2);
8
9 end
```

```
1 function GF=GF(xi)
2 global h mi
3 % cálculo de la función GF (sistema dual)
4 % es función de los dos primeros componentes de la matriz AB (A1 y B1)
5
6 ggxi=gg(xi);
7 ffxi=ff(xi);
8 betaxi=betaa(xi);
9 GF=ggxi/(ffxi*betaxi(1)*mi(1));
10
11 end
```

```
1 function HH=HH(xi)
2
3 % cálculo de la función HH, ubicada dentro de la función MM de la ecuación
4 % integral de Fredholm.
5
6 GFxi=GF(xi);
```

---

```
7 HH=GFxi*xi-1;
8
9 end

1 function nform=nform(xi)
2 global N xin Δx;
3
4 % Cálculo de las funciones de forma:
5 nform=zeros(N,1);
6 if xi<xin(2)
7     nform(1,:)=1-abs(xi-xin(1))/Δx;
8 else
9 end
10 if xi>xin(N-1)
11     nform(N,:)=1-abs(xi-xin(N))/Δx;
12 else
13 end
14 for l=2:(N-1);
15     if (xi>xin(l-1))&&(xi<xin(l+1))
16         nform(l,:)=1-abs(xi-xin(l))/Δx;
17     else
18     end
19 end
20
21 end
```

---

```

1  %%%%%%%%% RESOLUCIÓN NUMÉRICA INTEGRAL DE FREDHOLM %%%%%%%%%
2  global a N xin  $\Delta x$  lk eta_i xi_i sin2 theta_sol;
3
4  N=21; % número de puntos de evaluación
5  xin=linspace(0,a,N);
6   $\Delta x$ =a/(N-1); % espaciado entre puntos
7
8  %%% COEFICIENTES DE LA MATRIZ dd:
9  cc=zeros(N,1);
10 for l=1:N;
11     cc(l,:)=2*pi*ampli*xin(l);
12 end
13
14 %%% COEFICIENTES DE LA MATRIZ LL:
15
16 % Puntos de evaluación de las integrales:
17 eta_pu_in=2.1e4+1;
18 xi_pu_in=21;
19 eta_i=linspace(0,pi*1e4,eta_pu_in);
20 xi_i=linspace(0,a,xi_pu_in);
21
22 % Matrices auxiliares:
23 HHeta0=zeros(length(eta_i),1);
24 for l=1:length(eta_i)
25     HHeta0(l)=HH(eta_i(l));
26 end
27 sin2=zeros(length(eta_i),length(xi_i));

```



---

```

28 for l=1:length(eta_i)
29     for s=1:length(xi_i)
30         sin2(l,s)=sin(eta_i(l)*xi_i(s));
31     end
32 end
33 nformxi=zeros(N,length(xi_i));
34 for l=1:length(xi_i)
35     nformxi(:,l)=nform(xi_i(l));
36 end
37
38 % Cálculo de la matriz LL:
39 LL0=zeros(N,N);
40 for j=1:N
41     nformxi_aux=repmat(nformxi(j,:),length(eta_i),1);
42     subintLL=sin2.*nformxi_aux;
43     subLL=trapz(xi_i,subintLL,2);
44     for i=1:N
45         LL0(i,j)=2*trapz(eta_i,(subLL'.*HHeta0'.*sin(xin(i)*eta_i)));
46     end
47 end
48 LL=LL0+eye(N)*pi;
49
50 %%% RESOLUCIÓN DEL SISTEMA LL*Lc=cc:
51 thetaLc=LL\cc;
52
53 %%% MONTAJE DE LA FUNCIÓN THETA SOLUCIÓN DE LA EC. FREDHOLM:
54 theta_sol=thetaLc(1)*nformxi(1,:);

```

---

```

55 for l=2:N
56     theta_sol=theta_sol+thetaLc(l)*nformxi(l,:);
57 end

1  %%%%% CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INCÓGNITA Bm(xi) %%%%%
2  global theta_sol xi_i eta_i mi ABvector betavector ffvector;
3
4  % Obtención de la función D(xi):
5  intDD=repmat(theta_sol',1,length(eta_i)).*sin2';
6  DD=(2/pi)*eta_i.*trapz(xi_i,intDD,1);
7  % Nota: la variable eta integra la expresión del desplazamiento,
8  % donde aparecen las funciones AB, Bm y Jbessel.
9
10 % Vectorización de funciones auxiliares:
11 ffvector=zeros(1,length(eta_i));
12 for t=1:length(eta_i)
13     ffvector(t)=ff(eta_i(t));
14 end
15 ABvector=zeros(2*(M-1),length(eta_i));
16 for t=1:length(eta_i)
17     ABvector(:,t)=AB(eta_i(t));
18 end
19 betavector=zeros(M,length(eta_i));
20 for t=1:length(eta_i)
21     betavector(:,t)=betaa(eta_i(t));
22 end

```

---

```

23
24 % Función incógnita vectorizada Bm(xi):
25 Bm=DD./(mi(1)*betavector(1,:).*ffvector);

1  %%%%%% RECONSTRUCCIÓN DE LAS EXPRESIONES DEL MOVIMIENTO %%%%%%
2  global h eta_i Bm ABvector betavector M rr zz uu0 rr_double u_double;
3
4  % Reconstrucción de la onda superficial:
5  rr=(0:5e-5:0.005);
6  intbess=zeros(length(eta_i),length(rr));
7  for l=1:length(eta_i)
8      for s=1:length(rr)
9          intbess(l,s)=eta_i(l)*rr(s);
10     end
11 end
12 ab_aux=ABvector(1,:)+ABvector(2,:);
13 uu0=trapz(eta_i, repmat((ab_aux.*Bm)',1,length(rr)).*besselj(1,intbess),1);
14 % Creación de la figura 1D superficial
15 figure(2);
16 plot(rr*1e3,real(uu0)*1e6,'-',rr*1e3,imag(uu0)*1e6,'-.');
17 xlabel('r [mm]'); ylabel('u(r,0) [\mum]');
18 title(['Desplazamiento en la superficie para una recta radial cualquiera...
19     ...Número de medios:',num2str(M)]);
20 legend('real','imaginario');
21
22

```

---

```

23 % Reconstrucción de la onda en un plano vertical radial:
24 zz=(0:5e-5:0.007);
25 for c1=1:length(zz)
26     for c2=1:length(rr)
27         bess1=besselj(1,eta_i*rr(c2));
28         if zz(c1) ≤ h(1);
29             int_aux=ABvector(1,:).*exp(betavector(1,:)*zz(c1))+ ...
30                 ABvector(2,:).*exp(-betavector(1,:)*zz(c1));
31         else
32             int_aux=Bm.*exp(-betavector(2,:)*zz(c1));
33         end
34         u(c1,c2)=trapz(eta_i,(int_aux.*Bm.*bess1));
35     end
36 end
37 rr_aux=fliplr(rr);
38 rr_double=[-rr_aux(1:end-1) rr];
39 u_aux=fliplr(real(u));
40 u_double=[-u_aux(:,[1:end-1]) real(u)];
41 % Creación de la figura 2D
42 figure('color', 'white');
43 imagesc(rr_double*1e3, zz*1e3, u_double*1e6);
44 axis image;
45 colorbar;
46 xlabel('r [mm]'); ylabel('z [mm]');
47 title(['Propagación onda torsión plano r-z. u(r,z) [\mum]. ...
48     ... Número de medios:',num2str(M)]);

```

# Bibliografía

- [1] A.O. Awojobi. Torsional vibration of a rigid circular body on an infinite elastic stratum. *International Journal of Solids and Structures*, 5(4):369 – 378, 1969.
- [2] A.O. Awojobi. Determination of the dynamic shear modulus and the depth of the dominant layer of a vibrating elastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 6(3):315 – 322, 1970.
- [3] G.N. Bycroft. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 248(948):327 – 368, 1956.
- [4] W.D. Collins. The forced torsional oscillations of an elastic half-space and an elastic stratum. *Proc. London Math. Soc.*, 12(1).
- [5] L.M. Keer et al. Torsional oscillations of a layer bonded to an elastic half-space. *International Journal of Solids and Structures*, 10(1):1 – 13, 1974.

- 
- [6] G.M.L. Gladwell. Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid. *International Journal of Engineering Science*, 6(10):591 – 607, 1968.
- [7] G.M.L. Gladwell. The forced torsional vibration of an elastic stratum. *International Journal of Engineering Science*, 7(10):1011 – 1024, 1969.
- [8] H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 203:1 – 42, 1904.
- [9] B. Noble. The solution of bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 59(2):351 – 362, 1963.
- [10] Ian Robertson. On a proposed determination of the shear modulus of an isotropic elastic half-space by the forced torsional oscillations of a circular disc. *Applied Scientific Research*, 17:305–312, 1967.
- [11] E. Reissner H.F. Sagoci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space i. *Journal of Applied Physics*, 15:652–654, 1944.
- [12] H.F. Sagoci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space ii. *Journal of Applied Physics*, 15:655–662, 1944.
- [13] I.N. Sneddon. Note on a boundary value problem of reissner and sagoci. *Journal of Applied Physics*, 16:130–132, 1947.

- 
- [14] M.P. Stallybrass. *Proc. 4th U.S. Nat. Cong. appl. Mech*, pages 391 – 400, 1962.
- [15] D.P. Thomas. A note on the torsional oscillations of an elastic half space. *International Journal of Engineering Science*, 6(10):565 – 570, 1968.
- [16] Ia.S Ufliand. On torsional vibrations of half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 25(1):228 – 233, 1961.
- [17] G. Wang and L. Chen. Torsional oscillation of a rigid disc resting on an infinite saturated elastic layer. *Mechanics Research Communications*, 32(4):454 – 462, 2005.
- [18] H.Y. Yu. Forced torsional oscillations of multilayered solids. *International Journal of Engineering Science*, 46(3):250 – 259, 2008.