

# Resistencia de Materiales

## Tema 6: Cortante

Lucía Comino, Juan Melchor y Guillermo Rus

Universidad de Granada

11/2013



ugr

Universidad  
de Granada

LABORATORIO  
EVALUACIÓN NO DESTRUCTIVA



# Índice

- 1 Introducción
- 2 Esfuerzo cortante en flexión simple
  - Tensiones por esfuerzo cortante en flexión simple
  - Deformaciones por cortante
  - Tensiones cortantes en perfiles delgados abiertos
- 3 Centro de cortantes
  - Cálculo del centro de cortantes
  - Propiedades del centro de cortantes

# Recordatorio

Fuerzas ( $q_x, q_y, m, F_x, F_y, M$ )

↕ *Equilibrio*  
Esfuerzos ( $N, Q, M$ )

↔  
*Comportamiento*

Desplazamientos

↕ *Compatibilidad*  
Deformaciones

Equilibrio global (En 2D)

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M = 0$$

Equilibrio de la rebanada

Carga distribuida

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q_y$$

$$\frac{dM}{dx} = Q - m$$

Carga puntual

$$\Delta N = -F_x$$

$$\Delta Q = -F_y$$

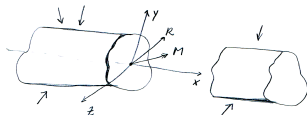
$$\Delta M = -W$$

Relación esfuerzos-tensiones

$$N = \int_{\Omega} \sigma_x d\Omega \quad Q = \int_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega \quad M = - \int_{\Omega} y \sigma_x d\Omega$$

## Introducción

Recordamos el prima mecánico y sus esfuerzos:



### Cortante

$$R = (N, Q_y, Q_z) = (0, Q_y, Q_z) \quad (1)$$

$$M = (T, M_y, M_z) = (0, 0, 0) \quad (2)$$

En el caso 2D,  $M = 0$ ,  $N = 0$ ,  $Q = Q_y \neq 0$  y  $Q_z = 0$ . se dice que es un caso de **cortante puro**. Pero si esto ocurre en una sección, en otra sección próxima habrá  $M \neq 0$ , ya que  $Q$  es la variación de Momento,  $Q = \frac{dM}{dx}$ . Por lo tanto, el cortante puro sólo ocurre en secciones puntuales, y generalmente habrá Flexión Simple:  $M + Q$

# Introducción

Recordamos la definición de cortante en función de las tensiones tangenciales:

Para cortante

$$Q_y = \int_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega \quad Q_z = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega \quad (3)$$

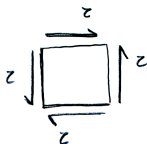
Partimos del principio de Navier Bernouilli, por lo que las tensiones normales  $\sigma_n$  siguen la ley de Navier:

$$\sigma_n = \frac{-My}{I_z} \quad (4)$$

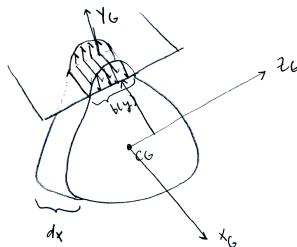
## Tensiones por esfuerzo cortante en flexión simple

Ahora tendremos que calcular la distribución de  $\tau$  a partir del esfuerzo cortante  $Q$  a lo largo y ancho de la sección.

Nos basamos en el **teorema de reciprocidad de tensiones tangenciales**: Si existe una tensión tangencial  $\tau(y)$  en un punto de una sección recta, existe otra tensión igual  $\tau(y)$  en la fibra longitudinal que pasa por el punto.



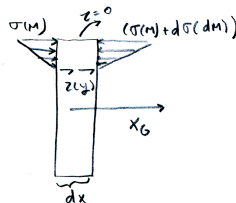
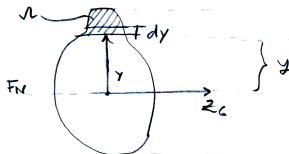
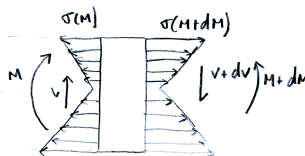
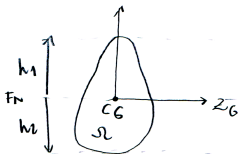
## Tensiones por esfuerzo cortante en flexión simple



Hipótesis asumida: la distribución de  $\tau(y)$  en la anchura  $b(y)$  es uniforme.

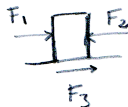
# Tensiones por esfuerzo cortante en flexión simple

Quitamos una parte de la rebanada, cortando por un plano a distancia  $y$  de la fibra neutra.



## Tensiones por esfuerzo cortante en flexión simple

Por equilibrio horizontal del trozo de la rebanada  $F_1 + F_3 - F_2 = 0$ :



$$F_1 = \int_{\Omega} \sigma d\Omega \quad F_2 = \int_{\Omega} (\sigma d\Omega + \int_{\Omega} d\sigma d\Omega) \quad (5)$$

$$F_2 - F_1 = \int_{\Omega} d\sigma d\Omega = \int_{\Omega} \frac{dM y}{I_z} d\Omega \quad (6)$$

$$F_3 = \tau(y) b(y) dx \quad (7)$$

$$\tau(y) = \frac{dM}{dx I_z b(y)} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{QS(y)}{I_z b(y)} \Omega \quad (8)$$

## Tensiones por esfuerzo cortante en flexión simple

$$\tau(y) = \frac{QS(y)}{I_z b(y)} \quad (9)$$

Deducimos la Fórmula de Colignon o del Cortante.

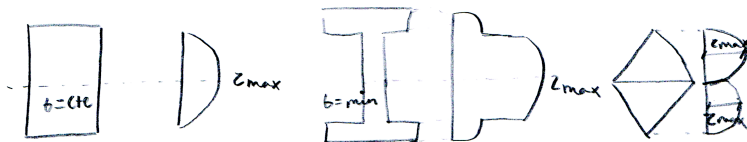
$\tau(u)$ : tensión tangencial a una distancia  $y$  de la fibra neutra.

$S(y) = \int_{\Omega^*(y)} y d\Omega$ : 1<sup>er</sup> momento estático de  $\Omega^*(y)$  sobre  $y$ .

$I_z$ : 2<sup>o</sup> momento de inercia de sección completa.

Se deduce que  $\tau = 0$  en los extremos ya que  $S(y) = 0$ .

Ejemplos de distribuciones de  $\tau$  para diferentes secciones:



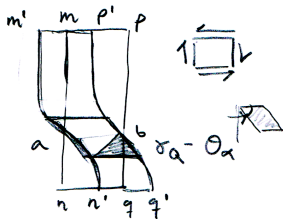
## Deformaciones por cortante

La deformación angular  $\gamma$  se deduce directamente de la Ley de Hooke a cortante:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{QS(y)}{I_z b(y) G} \quad (10)$$

por lo que también variará parabólicamente con  $y$ .

Como consecuencia, la sección alabea, como se deduce de la figura:



## Deformaciones por cortante

Definimos el giro por cortante:

$$\theta_Q = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}(y=0)}{G} = \frac{S(y=0)Q}{Gb(y=0)I_z} = \frac{Qf_c}{GA} \quad (11)$$

donde hemos definido  $f_c = \frac{S(y=0)A}{b(y=0)} I_z$  llamado factor de cortadura.

Recordando que teníamos que la curvatura  $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$  debida a la flexión era  $\kappa_M = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$ .

La curvatura total se define como:

$$\kappa_{TOT} = \kappa_M + \kappa_Q \quad (12)$$

$$\kappa_Q = \frac{d\theta_Q}{dx} = \frac{dQ}{dx} \frac{f_c}{AG} = \frac{q_y f_c}{GA} \quad (13)$$

$$v'' = \kappa_{TOT} = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{q_y f_c}{GA} \quad (14)$$

## Deformaciones por cortante

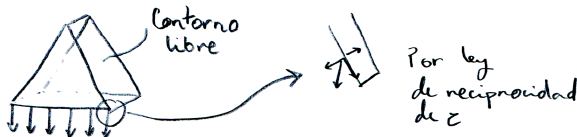
$$v'' = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{q_y f_c}{GA} \quad (15)$$

Si el cortante  $Q$  es constante a lo largo de la barra, el alabeo será igual en cada sección, y por tanto la deformación angular debida al cortante no influye en el alargamiento o acortamiento de las fibras. Se comprueba en la fórmula que cuando  $q_y = 0$  no se aporta  $\kappa_Q$ . El alabeo calculado contradice la hipótesis de Navier-Bernouilli. Si el efecto de cortante es significativo, no debemos asumirla. En su lugar, esta nueva teoría se llama **viga de Timoshenko**. Si el cortante es despreciable, podemos adoptar el modelo anterior de **viga de Euler-Bernouilli**:

$$v'' = \frac{M_z}{EI_z} \quad (16)$$

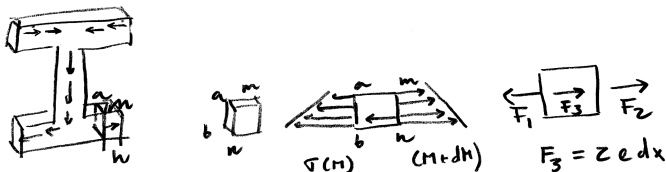
## Tensiones cortantes en perfiles delgados abiertos

La hipótesis de que  $\tau$  era uniforme a lo largo de la anchura de la pieza no es válida en el caso de perfiles delgados de pared abierta. Los definimos como aquellos cuya sección recta está formada por dos líneas muy próximas y separadas una distancia o espesor  $e$ . Como contraejemplo, la componente de  $\tau$  perpendicular a un borde debe ser cero, por la ley de reciprocidad de  $\tau$ :



## Tensiones cortantes en perfiles delgados abiertos

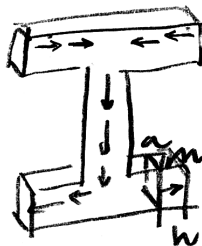
El procedimiento para calcular  $\tau$  es análogo al que usamos para obtener la fórmula de Colignon, pero recortando trozo de rebanada perpendicularmente al espesor  $e$  que será la dirección predominante de  $\tau$  debido a que no puede salirse del perfil por la ley de reciprocidad de  $\tau$ :



$$\tau = \frac{Q_y S(y)}{e I_z} \quad (17)$$

Suponemos que si el espesor es pequeño  $\tau$  es constante en  $e$ .

## Tensiones cortantes en perfiles delgados abiertos



**Módulo** :  $\tau = \frac{Q_y S(y)}{e I_z}$ .

**Dirección** : Paralela a las paredes delgadas.

**Sentido** : Nos lo da el teorema de reciprocidad.

## Flujo de cortante

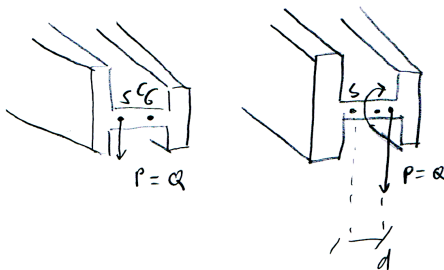
El flujo de cortante es la tensión  $\tau$  por unidad de longitud y se define como:

Flujo de cortante

$$q = \tau e = \frac{QS(y)}{I_z} \quad (18)$$

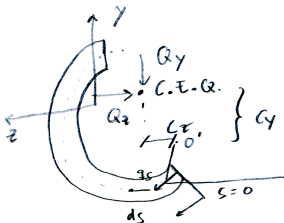
## Centro de cortantes

Los cortantes puros deben estar aplicados en un punto tal que no generen resultante de momentos torsores, por definición de sistema resultante. Dicho punto se llama centro de cortantes, y no tiene porqué coincidir con el centroide o con la fibra neutra. Si aplicáramos una fuerza transversal que no pasase por el centro de cortantes, aparecerá un momento resultante torsor, como se muestra en la figura:



## Centro de cortantes

Para calcularlo igualamos el momento producido por  $\tau$  al momento producido por  $Q$ , respecto a  $O'$ :



$$M(Q)_{O'} = M(Q_y)_{O'} + M(Q_z)_{O'} = Q_y c_z - Q_z c_y$$

$$M(\tau) = \int_{S(0)}^{S(TOT)} -rqds \quad q = e\tau = \frac{Q_y S(y)}{el_z} + \frac{Q_z S(z)}{el_y} \Rightarrow$$

$$c_y = \frac{1}{I_z} \int_{S(0)}^{S(TOT)} rS(z)ds \quad c_z = \frac{1}{I_y} \int_{S(0)}^{S(TOT)} rS(y)ds \quad (19)$$

## Propiedades del centro de cortantes

Siempre está en el eje de simetría si lo hubiera.

Si hay dos ejes de simetría  $\rightarrow$  donde se cortan ( $C. Q. \equiv C. G.$ )

Si el perfil o sección tiene curvatura de un mismo signo  $\rightarrow$  el  $C. Q.$  estará en el lado convexo.



Si el  $Q$  no estuviera aplicado en el  $C. Q.$ , aparecerá un momento torsor  $T = Qd$ , donde  $d$  es la excentricidad entre el  $C. Q.$  hasta el punto de aplicación de  $Q$ .