Resistencia de Materiales

Tema 5: Cálculo de Movimientos

Lucía Comino, Guillermo Rus y Juan Melchor

Universidad de Granada

10/2013

Universidad de Granada

Laboratorio Evaluación No Destructiva

Índice

Recordatorio

Diagrama de Tonti:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fuerzas } (q_x, q_y, m, F_x, F_y, M) & & & & \text{Desplazamientos } (u, v) \\ \updownarrow \textit{Equilibrio} & & & & \textit{Compatibilidad } \updownarrow \\ \text{Esfuerzos } (N, Q, M) & & \underset{\textit{Comportamiento}}{\longleftrightarrow} & & \text{Deformaciones } (\varepsilon, \kappa) \end{array}$$

Recordatorio

Centroide = altura de la fibra neutra:

$$y_c = \frac{\int y' d\Omega}{\int d\Omega} \tag{1}$$

Momento de inercia:

$$I_z = \int_\Omega y^2 d\Omega \tag{2}$$

Ecuación de la elástica

$$M_z = EI_z v'' \quad v'' = \frac{d^2 v}{dx^2} = \kappa \tag{3}$$

Distribución de tensiones:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{4}$$

Flecha

En piezas sometidas
a flexión pura, las deformaciones
se definen mediante
la flecha o mediante el giro:

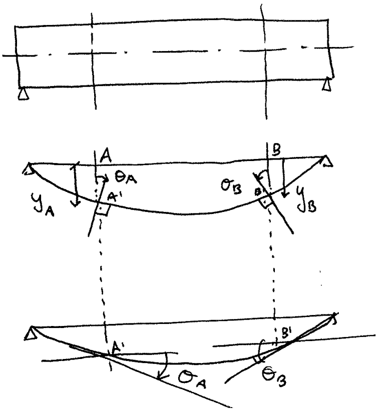
Directriz

$\downarrow$

Deformada: se define mediante:

v flecha: componente vertical del desplazamiento

θ giro o pendiente: $\theta = \frac{dv}{dx}$



Criterio de signos

v: $+\uparrow$ $-\downarrow$

θ: $+\circlearrowleft$ $-\circlearrowright$

Ecuación de la Elástica

Ecuación de la Elástica

$$M_z = EI_z v'' \tag{5}$$

Recordamos que la curvatura se aproxima por la segunda derivada de la flecha $\kappa \simeq v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$. Despejando: $v''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z}$.
Si integramos una vez obtenemos los giros de las secciones.

$$v'(x) = \theta(x) = \int v''(x)dx = \int \frac{M_z(x)}{EI_z}dx + c_1 \tag{6}$$

Si integramos dos veces obtenemos la flecha, y las constantes de integración se ajustan imponiendo las condiciones de apoyo:

$$v(x) = \int v'(x)dx = \int\int \frac{M_z(x)}{EI_z}dxdx + c_1x + c_2 \tag{7}$$

Procedimiento de solución

Calculamos las leyes de esfuerzos $Q(x)$, $M(x)$.

Escribimos de la ecuación de la elástica $v''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z}$.

Integramos: $v'(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + c_1$

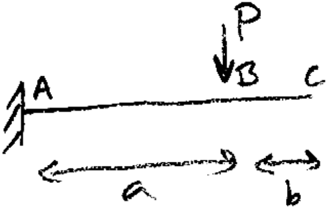
Integramos: $v(x) = \int \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dxdx + c_1 x + c_2$

Para calcular las constantes de integración, aplicamos las condiciones de contorno, es decir la deformada en los apoyos.

Ejemplos: en el caso de la figura superior $v(0) = 0$, $v(L) = 0$ y en el caso inferior $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$.

Ejemplo 1

Considérese la viga en voladizo (empotrado en un extremo y libre en el otro) de la figura, con las cargas y dimensiones dadas.
Dato: $EI = cte$.



Calcular: $\theta_A, \theta_B, \theta_C$

Ejemplo 1

Calculamos la ley de momentos flectores $M(x)$:

Equilibrio global:

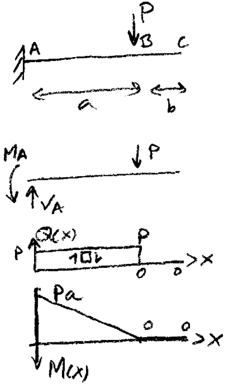
$\sum Y = 0 = V_A - P \;\Rightarrow\; V_A = P$

$\sum M_A = 0 = -P \cdot a + M_A \;\Rightarrow\; M_A = P \cdot a$

Rebanada:

$$Q(x) = \begin{cases} a-b: & P \\ b-c: & 0 \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} a-b: & -P \cdot a + Px \\ b-c: & 0 \end{cases}$$



Ejemplo 1

Integramos:

$$v'(x) = \begin{cases} a-b: & \frac{1}{EI}(-P \cdot a \cdot x + P\frac{x^2}{2}) + c_1 \\ b-c: & c_2 \end{cases}$$

Condición de apoyo: empotramiento no gira:

$$\theta(0) = 0 = v'(0) = c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$

El giro no quiebra en b:

$$v'(b^+) = v'(b^-) \;\Rightarrow\; \frac{1}{EI}(\frac{-Pa^2}{2}) = c_2$$

Integramos:

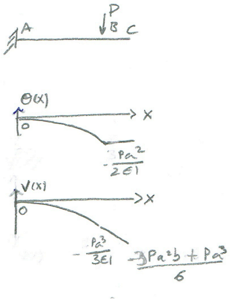
$$v(x) = \begin{cases} a-b: & \frac{1}{EI}(-P \cdot a\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6}) + c_3 \\ b-c: & \frac{1}{EI}(\frac{-Pa^2}{2}x) + c_4 \end{cases}$$

Condición de apoyo: empotramiento no baja:

$$v(0) = 0 = c_3 \;\Rightarrow\; c_3 = 0$$

La flecha no quiebra en b:

$$v(b^+) = v(b^-) \;\Rightarrow\; \frac{1}{EI}(\frac{-2Pa^3}{6}) = \frac{1}{EI}(\frac{-Pa^2}{2}) + c_4 \;\Rightarrow\; c_4 = \frac{1}{EI}(\frac{Pa^3}{6})$$



1er teorema de Mohr

El ángulo θ_A^B entre dos secciones A y B es igual al área encerrada por la ley de momentos flectores $M(x)$ dividido por EI:

$$\theta_A^B = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M(x) dx \tag{8}$$

2o teorema de Mohr

Dadas dos secciones A y B, y dada una recta vertical que pasa por la abscisa A, la distancia vertical entre la flecha en A y la intersección de la tangente a la flecha que pasa por B y la recta vertical anterior es igual al momento estático con respecto a A del área de momentos flectores comprendida entre A y B:

$$\Delta_{B|A} = -\frac{1}{EI}\int_{x_A}^{x_B} M(x)(x - x_A)dx \tag{9}$$

Deducción: desarrollando $v(x_A)$ como una expansión en serie de Taylor centrada en x_B:

$$v(x_A) = v(x_B) + v'(x_B)(x_A - x_B) + \int_{x_A}^{x_B} v''(x)(x_A - x)dx \quad \Rightarrow$$

$$v(x_A) - v(x_B) - \theta(x_B)(x_A - x_B) = -\frac{1}{EI}\int_{x_A}^{x_B} M(x)(x - x_A)dx$$

Sistemas hiperestáticos

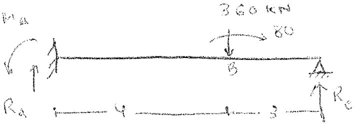
Una estructura hiperestática es aquella en la que hay más reacciones (incógnitas) que ecuaciones de equilibrio para resolverlas. En este caso es necesario añadir las ecuaciones de comportamiento y compatibilidad para resolverlo, es decir, la ecuación de la elástica. Esto se debe a que el reparto de fuerzas depende de cómo se deforma, y no sólo del equilibrio.

Para resolverlas utilizamos el *método de compatibilidad*:

1 - liberar tantos apoyos (condiciones de compatibilidad) como ecuaciones faltan (grados de hiperestatismo), arrastrando las reacciones como parámetros incógnita, y resolver la deformada, que quedará en función de dichos parámetros.

2 - Imponer las condiciones de compatibilidad eliminadas (de allí el nombre de *método de compatibilidad*), con lo cual obtendremos tantas ecuaciones como incógnitas, y podremos resolverlo todo.

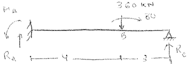
Ejemplo

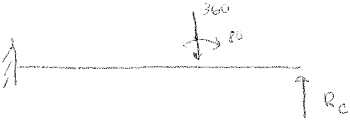


Calcular las reacciones y leyes de esfuerzos.
Como hay 3 ecuaciones de equilibrio y 4 incógnitas en el diagrama de cuerpo libre, se trata de un sistema **hiperestático**. En el dibujo se ha omitido la reacción horizontal, porque es trivial obtenerla del equilibrio horizontal.

Ejemplo

Para resolverlo, se libera uno de los apoyos. De este modo, se permite el movimiento y aparece una fuerza desconocida. En este caso elegimos el apoyo C:

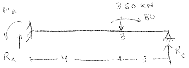


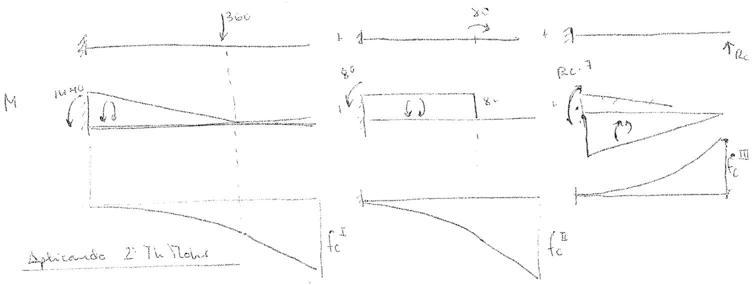


Al haber liberado, no se comportará como la estructura original, sino que a posteriori tenemos que imponer la ecuación de compatibilidad $v(c) = 0$.

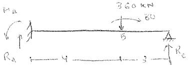
Sistemas hiperestáticos

Para resolverlo fácilmente, separamos
en tres estados, uno con cada carga: $I + II + III$,
y aplicamos el principio de superposición.





Sistemas hiperestáticos



Integrando
la ecuación de la elástica en cada estado:
$v^{I}(c) = \frac{-16320}{EI}$
$v^{II}(c) = \frac{-1600}{EI}$
$v^{III}(c) = \frac{114{,}33 R_c}{EI}$
Finalmente, imponemos la condición de compatibilidad que habíamos liberado: $v(c) = 0 \;\Rightarrow\; R_c = 156,73kN$