Resistencia de Materiales

Tema 4: Flexión

Guillermo Rus, Lucía Comino, Juan Melchor

Universidad de Granada

10/2013

Universidad de Granada

Laboratorio Evaluación No Destructiva

Índice

Recordatorio - la barra

$$\begin{array}{ccc} \text{Fuerzas } (q_x, q_y, m, F_x, F_y, M) & & \text{Desplazamientos} \\ \updownarrow \textit{Equilibrio} & & \textit{Compatibilidad} \updownarrow \\ \text{Esfuerzos } (N, Q, M) & \underset{\textit{Comportamiento}}{\longleftrightarrow} & \text{Deformaciones} \end{array}$$

Equilibrio global (En 2D)

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum M = 0$$

Equilibrio de la rebanada

Carga distribuida

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$
$$\frac{dQ}{dx} = -q_y$$
$$\frac{dM}{dx} = Q - m$$

Carga puntual

$$\triangle N = -F_x$$
$$\triangle Q = -F_y$$
$$\triangle M = -W$$

Relación esfuerzos-tensiones

$$N = \int_\Omega \sigma_x d\Omega \qquad Q = \int_\Omega \tau_{xy} d\Omega \qquad M = -\int_\Omega y\sigma_x d\Omega$$

Introducción - Tipos de esfuerzos

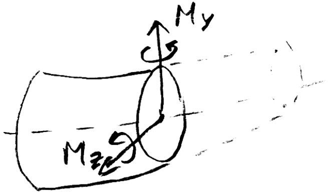
(loading...)

Introducción - Ensayo a flexión

(loading...)

Introducción

Se dice que el sistema está sometido a Flexión Pura cuando $R = 0$ y el M resultante está contenido en dicha sección, es decir, es flector.



En 3D

Flexión Pura

$$R = (N, Q_y, Q_z) = (0, 0, 0)$$
$$M = (T, M_y, M_z) = (0, M_y, M_z)$$

En 2D sólo trabajaremos con $M_z = M$.

Introducción

Si además del M también actúa Q, estamos en Flexión Simple:

Flexión Simple

$$R = (N, Q_y, Q_z) = (0, Q_y, Q_z)$$
$$M = (T, M_y, M_z) = (0, M_y, M_z)$$

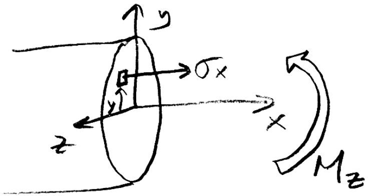
En el caso en que también actúe N se denominará Flexión Compuesta.

Introducción

Recordamos que hemos definido los esfuerzos como el sistema resultante de las tensiones en la sección. Concretamente el esfuerzo momento flector es la resultante de las tensiones normales por el brazo:

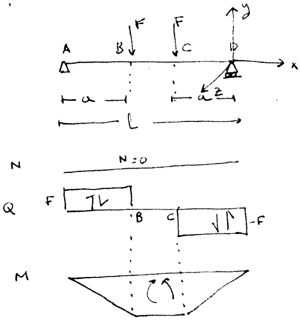
Esfuerzos

$$M_z = -\int y\sigma_x d\Omega \tag{1}$$



Introducción

Suponiendo que estamos en flexión pura: Sabemos por el tema anterior calcular las leyes de esfuerzos.

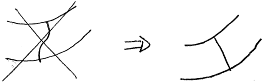


Entre B y C estamos en flexión pura, debido a que no existe ningún otro esfuerzo. Analizaremos cómo se tensiona y deforma una rebanada en estas condiciones.

Deformación en la flexión pura

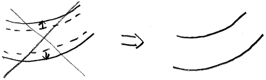
Hipótesis de la Viga de Euler-Bernouilli:

H1 Navier-Bernouilli: sección plana permanece plana.



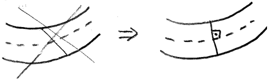
$$u_x(x, y) = \underbrace{u(x) - \theta y}_{\text{recta=origen+pendiente}\cdot y} \qquad (2)$$

H2 Sección inextensible.



$$u_y(x, y) = v(x) \qquad (3)$$

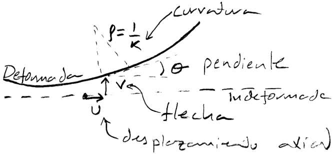
H3 La sección se mantiene perpendicular a la directriz. [1]



$$\theta = \frac{du_y}{dx} \qquad (4)$$

[1] Existe la viga de Timoshenko, que permite que H3 no se cumpla, debido a distorsión de cizalla, pero no lo estudiaremos aquí.

Deformación en la flexión pura



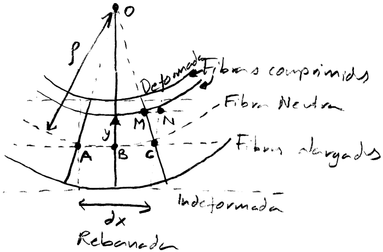
Convertiremos el problema 3D ($u_x(x,y,z)$, $u_y(x,y,z)$, $u_z(x,y,z)$) en 1D ($u(x)$, $v(x)$):

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} \overset{H1}{=} \frac{du}{dx} - y\frac{d\theta}{dx} \overset{H3}{=} \frac{du}{dx} - y\frac{d^2u_y(x,y,z)}{dx^2} \overset{H2}{=} \varepsilon - y\kappa \qquad (5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} \overset{H1}{=} 0 \qquad \gamma_{yx} = \frac{du_y}{dx} \overset{H2}{=} 0 \qquad \varepsilon_y = \frac{du_y}{dy} \overset{H2}{=} 0 \qquad (6)$$

Elongación $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ donde u = desplazamiento axial.
Curvatura $\kappa = \frac{d^2v}{dx^2}$ donde v = desplazamiento vertical o flecha.
Comprobamos que u, v, ε, κ sólo dependen de x.

Deformación en la flexión pura - interpretación geométrica

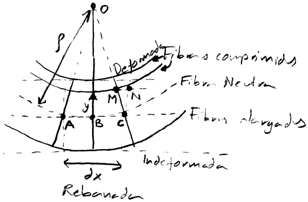


Rebanada: damos secciones infinitamente próximas.

Las fibras superiores se acortan y las inferiores se alargan por lo que habrá una fibra que ni se alarga ni se acorta: la Fibra Neutra. Definimos en esa fibra la directriz (eje x, y por tanto origen de $y = 0$).

Llamamos ρ al radio de curvatura de la directriz, con centro de curvatura O.

Deformación en la flexión pura



Estudiamos cómo se deforma una fibra a una distancia y, que pasa por N antes de deformarse y por M tras deformarse. Por semejanza de triángulos, la razón base/altura se mantiene:

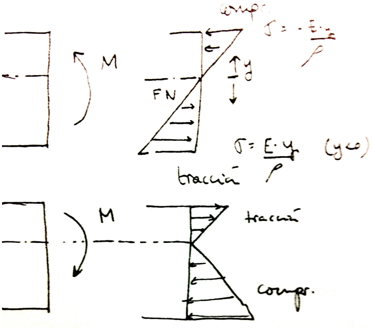
$$\widehat{COB} \simeq \widehat{NBM} \Rightarrow \frac{BC}{BO} = \frac{NM}{NC} \qquad (7)$$

$$\frac{BC}{BO} = \frac{dx/2}{\rho}, \quad \frac{NM}{NC} = \frac{\Delta dx/2}{y} \Rightarrow \qquad (8)$$

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{\Delta dx}{y} \Rightarrow \frac{\Delta dx}{dx} = -\varepsilon = \frac{y}{\rho} = \kappa y \qquad (9)$$

Obsérvese que el último resultado coincide con la ecuación 5 en el caso de que no exista deformación axial u.

Ley de Hooke



Ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (10)$$

$$\varepsilon = -y\kappa \quad \Rightarrow \quad \sigma = -Ey\kappa \qquad (11)$$

Fibra neutra

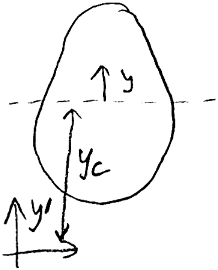
Cómo calcular que fibra neutra (la que se mantiene indeformada):
Por ser flexión pura $N = 0$:

$$N = \int_\Omega \sigma d\Omega = 0 = \int -Ey\kappa d\Omega = -E\kappa \int y d\Omega \qquad (12)$$

Como consecuencia, hay que definir
el origen de y en la fibra neutra. Para calcular la posición de la fibra neutra y_c (también llamado centroide) respecto a un sistema de referencia cualquiera y', definimos $y = y' - y_c$:

$$0 = \int y d\Omega = \int y' - y_c d\Omega \;\Rightarrow$$

$$\int y' d\Omega = y_c \int d\Omega \;\Rightarrow\; y_c = \frac{\int y' d\Omega}{\int d\Omega} \qquad (13)$$



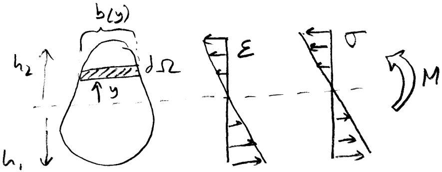
Ley de Navier

Además, el momento flector es:

$$M_z = -\int_\Omega y\sigma d\Omega = -\int_{-h_1}^{h_2} -Ey\kappa y \underbrace{b(y)dy}_{d\Omega} = E\kappa \underbrace{\int_{-h_1}^{h_2} y^2 b(y)dy}_{I_z=\text{Momento inercia}} \quad (14)$$

Momento, Inercia y Tensión

$$M_z = EI_z\kappa \qquad I_z = \int_\Omega y^2 d\Omega \qquad \sigma = -Ey\kappa \qquad (15)$$



Ecuación de la Deformada o Elástica

Partiendo de:

$$\sigma = -E\kappa y; \quad E\kappa = \frac{M}{I_z} \tag{17}$$

y recordando que la curvatura se aproxima[2] por la segunda derivada de la flecha $\kappa \simeq v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$, llegamos a la Ecuación de la Elástica:

Ecuación Diferencial de la Elástica

$$M_z = EI_z v'' \tag{18}$$

Para resolverla se integra dos veces, y las constantes de integración se ajustan imponiendo las condiciones de apoyo:

$$v(x) = \int\int \frac{M_z}{EI_z} dxdx + c_1 x + c_2 \tag{19}$$

[2]Se demuestra al final del capítulo.

Ley de Navier

(loading...)

Módulo resistente

En el caso de secciones simétricas, la tensión máxima se produce en ambos extremos simultáneamente:

$$\sigma^{max} = -\frac{M_z y^{max}}{I_z} \tag{20}$$

Por simplicidad, podemos decir definir en estos casos el módulo resistente W, que es una constante frecuentemente tabulada en vigas comerciales para facilitar su dimensionamiento:

$$W = \frac{I_z}{y^{max}} \quad \Rightarrow \quad \sigma^{max} = -M_z W \tag{21}$$

Deducción del giro y de la curvatura

Comenzamos por analizar un diferencial de recorrido dS de la directriz.

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{dx^2 + dv^2} = \frac{dx}{dx}\sqrt{dx^2 + dv^2} = dx\sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dv^2}{dx^2}} \\ &= dx\sqrt{1 + \frac{dv^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1 + v'^2} \end{aligned} \tag{22}$$

De aquí se deduce el giro o pendiente

$$tan\theta = \frac{dv}{dx} = v' \Rightarrow \theta = arctanv' \simeq v' \tag{23}$$

Y también podemos deducir la curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{d\theta}{dS} = \frac{d\theta}{dv'}\frac{dv'}{dx}\frac{dS}{dS} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} \simeq v''$$

La hipótesis de pequeños desplazamientos permite aproximar la tangente por su argumento, y despreciar y'^2 frente a la unidad.

Resumen

Centroide = altura de la fibra neutra:

$$y_c = \frac{\int y' d\Omega}{\int d\Omega} \tag{24}$$

Momento de inercia:

$$I_z = \int_\Omega y^2 d\Omega \tag{25}$$

Ecuación de la elástica

$$M_z = EI_z v'' \tag{26}$$

Distribución de tensiones:

$$\sigma = -Ey\kappa, \quad \kappa = v'' = \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{27}$$

Resumen

Diagrama de Tonti:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fuerzas } (q_x, q_y, m, F_x, F_y, M) \arrow[d, leftrightarrow, "\textit{Equilibrio}"] & & \text{Desplazamientos } (u, v) \arrow[d, leftrightarrow, "\textit{Compatibilidad}"'] \\
\text{Esfuerzos } (N, Q, M) & \arrow[r, leftrightarrow, "\textit{Comportamiento}"'] & \text{Deformaciones } (\varepsilon, \kappa)
\end{tikzcd}
$$