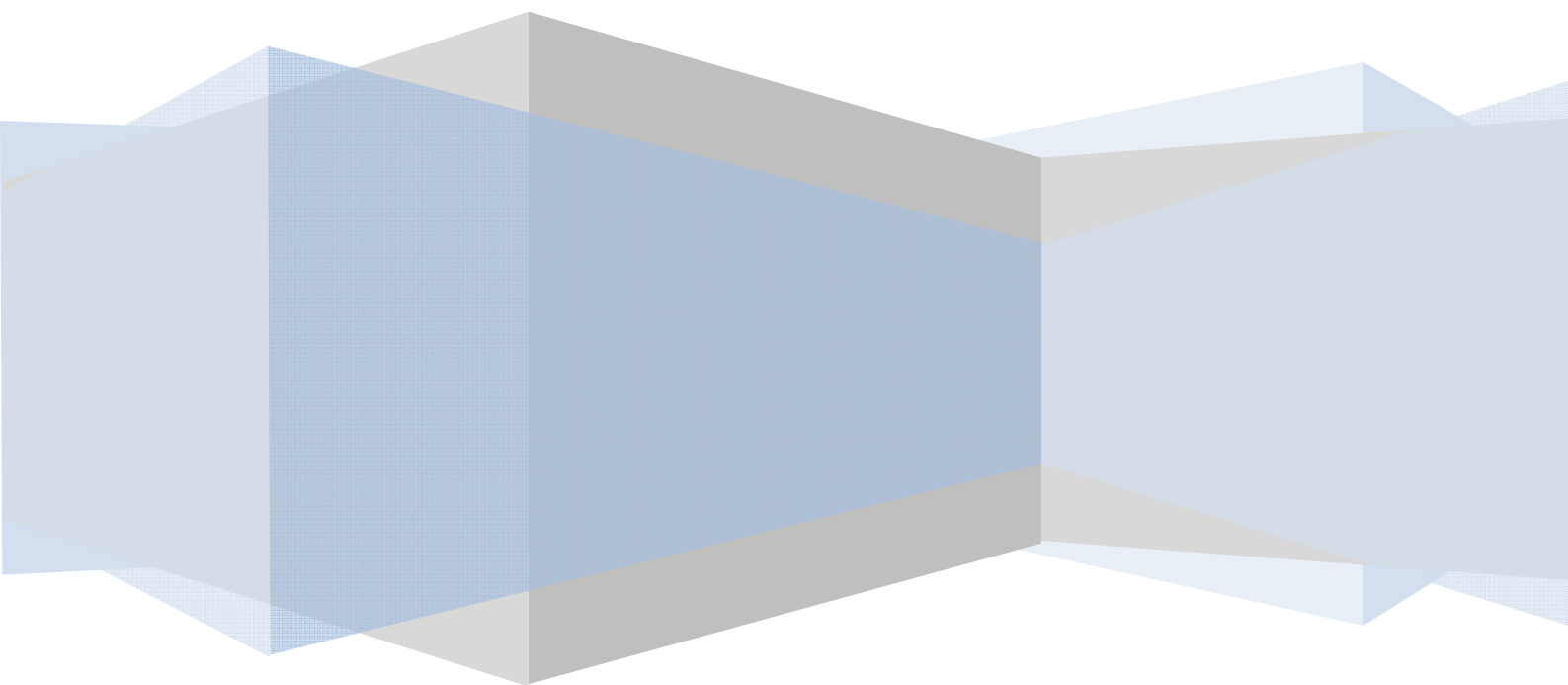


Máster de Estructuras
Universidad de Granada

Modelo Numérico de Defecto No Lineal en Viga Elástica

Ana Luisa Ramírez Márquez

Eduardo Dueñas Ladrón de Guevara



indice

- PROBLEMA DIRECTO
 - INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE LA FRACTURA ELÁSTICA LINEAL (LEFM)
 - MECÁNICA DE LA FRACTURA ELÁSTICA NO LINEAL (NLFM)
- PROBLEMA INVERSO
 - DEFINICIÓN Y LIMITACIONES
 - REGULARIZACIÓN
 - ANÁLISIS DEL PROBLEMA
 - RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA
 - SOLUCIONES AL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN: APLICACIÓN DE REDES NEURONALES

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, las grietas en los elementos estructurales suscitan cierta inquietud al observador no experto. Sin embargo, la importancia de las grietas radica en su función como alarma previa al posible colapso de una estructura.

En el presente trabajo se ha querido abordar un estudio general de la dinámica de la grieta, abordado desde el punto de vista del problema directo, y posteriormente el inverso.

Por problema directo entendemos el análisis del comportamiento de una grieta, desde su posible aparición y mientras esta se propaga por el material hasta que provoca la rotura del mismo. Para ello, se explicarán conceptos relacionados con la Mecánica de Fractura, analizando dicho fenómeno mediante modelos lineales y no lineales.

El problema inverso, por su parte, se encarga de la identificación de grietas ya existentes mediante diferentes métodos con el objeto de especificar acciones correctoras a tomar, o para analizar las causas de una fractura acontecida.

A continuación se exponen ambas versiones del ensayo, comenzando por el problema directo.

PROBLEMA DIRECTO

MECÁNICA DE LA FRACTURA LINEAL ELÁSTICA

En el estudio que a continuación se presenta, los autores han querido acercar al lector el comportamiento de ciertos materiales durante los procesos de fractura. Estos procesos de rotura son los analizados por la Mecánica de Fractura.

La Mecánica de Fractura y más concretamente la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (de aquí en adelante LEFM, del inglés *Linear Elastic Fracture Mechanics*) es una ciencia que estudia los mecanismos y procesos de aparición y propagación de grietas en sólidos cuando éstos se encuentran sometidos a unas cargas externas, así como la distribución de tensiones y deformaciones que ocurren durante el fenómeno de rotura.

El concepto de fractura elástica se aplica para dar a entender un comportamiento de fractura en el cual tensiones y deformaciones se relacionan de manera lineal. Como se expondrá más adelante, todo material está sujeto a un modelo lineal de fractura mientras se mantengan unas condiciones geométricas y mecánicas. Fuera de estas condiciones, el comportamiento deja de establecerse como lineal, y es necesario recurrir a modelos no lineales o elastoplásticos para predecir el comportamiento de dicho material. Hormigón, arenas, arcillas, acero o aleaciones industriales son algunos de los tipos de materiales sujetos a estos modelos de comportamiento.

La LEFM surgió con los trabajos de Griffith (1921, 1924) sobre criterios de propagación de grietas en sólidos, basados en balances de energía elástica que se transforma en energía superficial, razón por la cual se induce una inestabilidad local superficial que da lugar a la aparición de la grieta.

A nivel microscópico puede considerarse que todos los materiales compuestos están sujetos a discontinuidades locales. Dichas discontinuidades representan pequeñas entallas sobre la superficie de las muestras a ensayar. Es por ello que en adelante se hablará únicamente de propagación de la grieta, en lugar de aparición y propagación de la misma.

Grosso modo, la formulación energética de la mecánica de la fractura consiste en comparar la energía disponible para la propagación de una grieta en una estructura con la energía necesaria para su agrietamiento. La energía disponible para el avance de la grieta por unidad de área se denomina Tasa de Liberación de Energía (G) y la energía necesaria para el agrietamiento se denomina Tasa Crítica de Liberación de Energía o Energía de Agrietamiento (G_{IC}).

Este primer acercamiento a la fractura de un material cuasi-frágil se ha realizado mediante balances energéticos. Irwin (1957) planteó dicho análisis en términos de tensiones, lo cual era novedoso, ya que hasta entonces se había supuesto que las

tensiones en la punta de la grieta, por donde ésta profundiza en el material, tendían a infinito independientemente de la magnitud de la carga externa aplicada. Para su formulación Irwin supone que el proceso de fractura no puede concentrarse en un solo punto, como se deduciría de un análisis completamente elástico, si no que se produce en una zona muy pequeña denominada zona plástica, donde las tensiones dejan de ser infinitas porque parte de la energía elástica se consume en la deformación plástica del material próximo a la punta. Es en este momento donde se introduce el factor de intensidad de tensiones (K). Este factor K (función de tensiones) se encuentra relacionado con G (función de energías) mediante las propiedades elásticas del material. Para la condición de inicio de grieta se considera que K adquiere un valor crítico, por lo que se denomina factor de intensidad de tensiones crítico o tenacidad a la fractura K_{IC} .

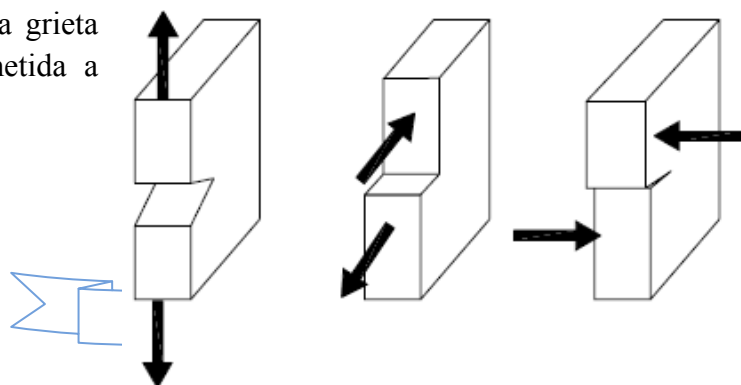
Es importante matizar la diferencia existente en el análisis de rotura de un material usando el análisis convencional de Elasticidad y Resistencia de Materiales y el estudio propio de la Mecánica de la Fractura. La diferencia principal es que la primera forma de estudio asume una independencia entre la resistencia o tensión de rotura y el tamaño de la estructura sometida a carga, mientras que la Mecánica de Fractura establece una relación entre ambas características. Este último tipo de comportamiento se estudia mediante el denominado efecto de tamaño (Bazant, 1984) y permite conocer si un determinado material se ajusta o no a los criterios de la LEFM, es decir, si es necesario introducir correcciones por efecto de tamaño a los factores G_{IC} y K_{IC} para que puedan considerarse verdaderas constantes del material, independientes de su tamaño.

Este trabajo se va a dividir en dos grandes bloques de aquí en adelante. En el primero de ellos se van a analizar los parámetros G_{IC} y K_{IC} que definen un comportamiento elástico lineal de la fractura de un material. En el segundo bloque se expandirá en concepto de efecto de tamaño, atendiendo a las distintas variables de las que depende y relacionando dicho efecto con un comportamiento lineal o no lineal en la propagación de una grieta en un material.

PARÁMETROS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA LINEAL ELÁSTICA (LEFM).

Antes de entrar directamente a definir los parámetros G_{IC} y K_{IC} que condicionan el comportamiento elástico lineal en la rotura, es necesario ver las formas o modos en los que un material puede romper, en función de la dirección de las cargas externas aplicadas y las deformaciones provocadas.

Según Broek (1986), una grieta en un sólido puede verse sometida a tensión en tres modos diferentes:



- MODO I o modo de apertura, en el cual la grieta se abre debido a la aplicación de tensiones normales en el plano de fractura.
- MODO II o modo deslizante, en el que debido a la aplicación de tensión cortante en el plano de fractura, se producen desplazamientos longitudinales en las superficies de dicho plano.
- MODO III o modo de rotura transversal que corresponde al desplazamiento de las superficies de fractura en sentidos opuestos, debido a la aplicación de tensión cortante en planos diferentes al plano de fractura.

Evidentemente la situación más compleja corresponde con una combinación de los tres modos de agrietamiento, sin embargo la mayoría de casos prácticos, sobre todo para elementos estructurales, sean vigas o pilares, de acero u hormigón, se considera predominante el modo de fractura I o modo de apertura. Es por ello que en adelante todos los parámetros analizados se estudiarán únicamente para este modo de fallo.

Como ya se introdujo, todo material se encuentra más o menos agrietado a nivel microscópico debido a las discontinuidades superficiales de la estructura. Es por ello, que el aspecto fundamental de la mecánica de fractura es poder definir si una grieta existente permanecerá estable o si por el contrario se prolongará bajo ciertas condiciones de tensión. Para poder predecir este comportamiento hay dos enfoques, el primero en términos de balance energético (con G y G_{IC}) y el segundo en términos del campo de tensiones (K y K_{IC}).

El criterio energético de propagación de grietas constituye la base de la mecánica de fractura y fue planteado por Griffith (1921) a partir de la solución del problema elástico de tensiones en el vértice de una cavidad elipsoidal en un medio semi-infinito. Se matiza que la cavidad elipsoidal es un modelo que representa la geometría de la grieta, cuyos laterales se corresponden con los arcos de dicha elipse, y que la naturaleza semi-infinita de la muestra donde se encuentra la grieta es necesaria para representar la independencia del comportamiento de la fractura con respecto al tamaño de la estructura ensayada. Griffith concluyó que a medida que los vértices de la elipse se van haciendo más agudos, las tensiones en ese punto tienden a infinito, independientemente de que el valor de la carga aplicada sea muy bajo. Es entonces cuando se decide que es imposible a priori establecer una descripción del comportamiento de una grieta en términos de tensiones (debido a la inoperabilidad del término infinito), por lo que dicho fenómeno había de plantearse en términos de balance de energía.

Para analizar la formulación de Griffith se considera como se ha dicho una placa semi-infinita, homogénea e isotrópica, de módulo elástico E , con una grieta central de forma elíptica de longitud $2a$, que es deformada elásticamente por tensiones de tracción σ como se muestra en la figura adjunta. En este caso, a partir de la solución de

Inglis (1913), Griffith encontró que la energía elástica (U) almacenada en la placa por unidad de espesor es:

$$U = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E}$$

Y definió la energía por unidad de superficie (W) como:

$$W = 4a\gamma_s$$

Donde γ_s es la energía específica de superficie y $4a$ corresponde al área de la superficie de agrietamiento (en este caso se considera un espesor unitario de longitud $2a$ y se multiplica por dos debido a que es el número de caras que tiene la grieta).

Las cargas externas aplicadas transmiten energía de la zona no fracturada a la fractura, a través de un proceso de conversión de energía elástica en energía de superficie. Esta equivalencia se puede expresar matemáticamente como:

$$\frac{dU}{da} = \frac{dW}{da}$$

Derivando las fórmulas anteriores con respecto a la longitud de la grieta, se obtiene:

$$\frac{dU}{da} = \frac{2\pi\sigma^2 a}{E} \qquad \frac{dW}{da} = 4\gamma_s$$

Igualando, se puede despejar la tensión, que en este caso corresponde con la tensión para la cual se inicia la propagación de la grieta (elástica y elástica) y se conoce como tensión de fractura de Griffith σ_c :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}}$$

Esta es la tensión por unidad de longitud de grieta (por ello se deriva con respecto a da) para la cual se produce la propagación de la grieta en un material cuasi-frágil de comportamiento elástico.

Para el caso de una sola punta de grieta se tendría la mitad de la placa y por tanto las ecuaciones anteriores quedarían modificadas a:

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \qquad \frac{dW}{da} = 2\gamma_s$$

La tensión de fractura no se vería alterada puesto que por simetría es igual analizar la placa completa o la mitad de ella.

Las investigaciones de Griffith dieron lugar a dos conclusiones claves de la mecánica de fractura: en primer lugar fue presentar un modelo de avance de la grieta en el material, y cómo éste resultaba de un proceso de conversión de energía que no sólo dependía de la tensión aplicada sino también del tamaño de la grieta, y en segundo lugar (González 1998) estableció una ecuación que relacionaba la tensión de fractura y el tamaño de la grieta, ecuación que por otro lado ha sido verificada en multitud de materiales frágiles.

Sin embargo, la LEFM no tuvo mucha aceptación en sus inicios debido a sus limitaciones. Para materiales muy frágiles como el vidrio sí era sencilla de aplicar, pero para el resto de materiales, es difícil calcular la distribución de energía superficial cuando existen tensiones aplicadas, debido a que las grietas no son según el modelo presentado, sino que resultan rugosas, curvilíneas, acompañadas de microagrietamientos, desplazamientos relativos y plasticidad en la zona próxima a la punta. Estos comportamientos no ideales son los que se estimarán más adelante como antesala del comportamiento no lineal.

BALANCE ENERGÉTICO: TASA DE LIBERACIÓN DE ENERGÍA Y ENERGÍA DE FRACTURA.

La energía disponible para la extensión de la grieta usualmente se denomina tasa de liberación de energía (G) y como estableció Griffith, es igual a dU/da , de tal manera que la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} = G$$

Por otro lado, la energía requerida dW/da , también conocida como energía de fractura o tasa crítica de liberación de energía (G_{IC}) es una propiedad del material que se puede considerar constante en comportamiento elástico. Sus unidades son de fuerza por unidad de extensión de la grieta, por lo que también se la denomina fuerza resistente de agrietamiento (R).

La condición G_{IC} se presenta cuando la tensión aplicada σ alcanza en valor crítico σ_c para el cual $dU/da = dW/da$, y por lo tanto existe propagación de la grieta:

$$\frac{dW}{da} = R = G_{IC} = \frac{\pi \sigma_c^2 a}{E} \quad \text{ó} \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{G_{IC} E}{\pi a}}$$

Esta es una forma más general de expresar la tensión de agrietamiento de Griffith, con la ventaja de que no involucra la energía específica de superficie (γ_s).

Así el criterio de fractura es el siguiente:

Si $G < G_{IC}$ entonces $da=0$, no hay extensión de la grieta (situación estable).

Si $G = G_{IC}$ entonces $da \geq 0$, posible extensión cuasi-estática de la grieta.

Si $G > G_{IC}$ entonces $da > 0$, crecimiento dinámico de la grieta (inestable).

ESTADO TENSIONAL DE FRACTURA. FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES.

Como se mencionó anteriormente, Griffith planteó el criterio de extensión de la grieta basado en el análisis energético para evitar la singularidad de las tensiones que tienden a infinito en la punta.

Irwin (1957) desarrolló uno de los más importantes avances en la LEFM al formular el problema de propagación de grietas en términos del estado de tensiones del material cerca de la punta y probó que este enfoque es esencialmente igual al enfoque energético y que existe una relación entre uno y otro.

Irwin dedujo que el proceso de rotura no podía concentrarse en un solo punto como plantea la teoría elástica, sino que se presenta en una zona pequeña próxima a la punta que denominó zona plástica o zona de proceso de fractura (ZPF), la cual, por efecto de la deformación, absorbe gran cantidad de energía y mantiene las tensiones dentro de un valor finito.

Como se verá con posterioridad, es la relevancia de esta zona con respecto al tamaño global de la estructura ensayada la que justifica un comportamiento lineal o no lineal en la propagación de la grieta.

Con el fin de determinar la distribución de tensiones alrededor de la punta de la grieta en una placa, Irwin acudió a la función de tensión de Airy (ψ), que es una función especial que debe satisfacer simultáneamente las condiciones particulares de tensiones, deformaciones y de compatibilidad de tensión-deformación que se presentan en ese sector (González 1998).

Para la solución de la función de tensión de Airy se pueden usar diferentes funciones complejas dependientes del modo de fractura predominante del material. Si el agrietamiento es de Modo I, resulta conveniente usar la solución propuesta por Westergaard, en cuyo caso el campo de tensiones alrededor de la punta de la grieta está dado por:

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

O de forma general:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

Donde $f_{ij}(\theta)$ es una función conocida de θ y K_I es el factor de intensidad de tensiones (FIT) para el modo I de agrietamiento y se puede expresar como:

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{a}$$

Donde a es la longitud de la grieta inicial o entalla inicial y β es un factor adimensional, que para una placa infinita corresponde a $\sqrt{\pi}$, mientras que para un elemento de tamaño finito depende de la longitud de la grieta y de la geometría del cuerpo sometido a tensión, que de manera simplificada se expresa como la longitud (L) de una de sus directrices principales. Por lo general, los FIT de estos elementos se expresan como funciones del FIT de una placa infinita, por lo que de β se extrae el valor $\sqrt{\pi}$ y la ecuación se expresa como:

$$K_I = \beta_{(a/L)} \sigma \sqrt{\pi a}$$

La importancia del factor de intensidad de tensiones radica en que al conocerse este dato puede calcularse el campo de tensiones alrededor de una grieta. Además, KI constituye un parámetro de similitud muy útil, ya que permite comparar las características de agrietamiento de elementos de un mismo material pero con diferente geometría y/o diferente longitud de grieta, y de dos materiales distintos con igual tamaño y longitud de grieta.

De esta forma se establece que la grieta avanzará cuando el factor de intensidad de tensiones alcance un valor crítico, denominado factor de intensidad de tensión crítico o tenacidad a la fractura (K_{IC}), en el cual la tensión de la expresión anterior se corresponde con la tensión crítica:

$$K_{IC} = \beta_{(a/L)} \sigma_c \sqrt{\pi a}$$

Análogamente al enfoque para balance energético con tasa de liberación de energía, en términos del campo de tensiones se tiene que:

Si $K_I < K_{IC}$ entonces no hay extensión de la grieta (situación estable).

Si $K_I = K_{IC}$ entonces existe una posible extensión cuasi-estática de la grieta.

Si $K_I > K_{IC}$ entonces se presenta un crecimiento dinámico de la grieta (inestable).

Igualando la expresión de la tensión crítica desde el punto de vista del balance energético y desde el punto de vista del factor de intensidad de tensiones crítico, se obtiene una relación entre estos dos términos, función de las características elásticas del material. Para el caso de tensión plana:

$$G_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E}$$

Mientras que para el caso de deformación plana se expresa como:

$$G_{IC} = (1 - \nu^2) \frac{K_{IC}^2}{E}$$

Donde ν es el coeficiente de Poisson. Las relaciones antes descritas se conocen como ecuaciones de Irwin y se cumplen para cualquier estado tensional igual o por debajo de la situación crítica.

El factor de intensidad de tensiones tiene la ventaja de que es aditivo, es decir, que se pueden calcular valores de K_I para diferentes partes de una geometría compleja y luego sumar tales valores para obtener un K_I global de la estructura, mientras que en el método energético no es posible. Por el contrario, según indican Bazant y Planas (1998), la desventaja radica en que su aplicabilidad está limitada a la elasticidad lineal mientras que el concepto de tasa de liberación de energía no tiene esta limitación.

Una vez definidos los dos factores fundamentales que modelan el comportamiento de propagación de una grieta según la mecánica de fractura lineal elástica, es necesario establecer los límites de su aplicación, es decir, hasta dónde resulta apropiada su aplicación, y partir de dónde o en qué condiciones es necesario recurrir a otros modelos no lineales que describan el comportamiento real de la grieta.

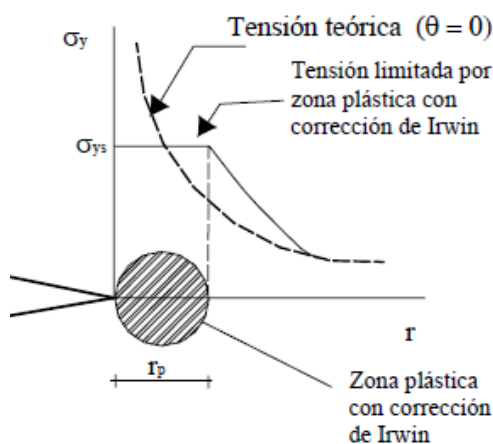
Como ya se introdujo anteriormente, la grieta no avanza en el material únicamente por su punta, sino que existe un área de actuación alrededor de la misma en la cual puede producirse la propagación de la fractura. Esta área se conoce como zona

plástica o zona de proceso de fractura, y según sea su tamaño con respecto al tamaño de la pieza ensayada, la grieta avanzará según una ley lineal elástica o por el contrario será regida por un modelo no lineal o elastoplástico.

A continuación se establecen los parámetros que determinan el tamaño de dicho área y las consecuencias sobre la mecánica de la fractura que éstos conllevan.

ZONA PLÁSTICA O ZONA DE PROCESO DE FRACTURA (ZPF)

Tal y como se ha planteado en las ecuaciones anteriores, las tensiones dependen de la distancia r que separa la punta de la grieta y el punto donde se quieren calcular las tensiones. Según r tiende a cero, las tensiones tienden a infinito. A la inversa, según r aumenta, es decir, se aleja de la punta, las tensiones van disminuyendo. Evidentemente, el valor de la tensión no puede llegar a infinito, ya que el material al alcanzar su límite de fluencia sufre deformaciones plásticas que impiden que la tensión siga aumentando. La distancia desde la punta hasta la cual se producen las deformaciones plásticas, corresponden a un círculo de radio r_p^* tal y como se muestra en la figura:



$$r_p^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

Donde K_I es el factor de intensidad de tensiones para el modo de rotura I y σ_{ys} es el límite de fluencia de dicho material.

Experimentalmente se ha encontrado que el tamaño de la zona plástica es en realidad mayor al teórico. Esta corrección realizada por Irwin estableció un radio de zona plástica real aproximadamente igual al doble de su valor teórico.

$$r_p = 2r_p^* = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

El coeficiente inicial ($1/\pi$) fue obtenido experimentalmente para metales. Para materiales cuasi-frágiles como el hormigón, cuya fractura presenta microagrietamientos, avances curvilíneos, reblandecimiento por deformación o anisotropía, este coeficiente puede variar entre 2 y 5 (Bazant y Planas 1998), es decir, que la zona plástica en esos materiales es muy superior a la de los metales.

Es ahora cuando el comportamiento de la grieta se puede catalogar como lineal o no lineal, en función de la importancia de la ZPF en la estructura. Cuando la zona de

proceso de fractura es despreciable en comparación con el tamaño de la grieta, el problema es elástico lineal. Cuando esto no ocurre, es decir, cuando el tamaño de la zona plástica es considerable respecto al tamaño de la pieza ensayada, el comportamiento de la fractura del material se torna elástico no lineal o elastoplástico.

De acuerdo con Gettu y Shah (citado en García 1997), existen dos modos generales para caracterizar la importancia de la ZPF, de forma implícita o explícita:

-Implícita: Modelos efectivos o de fractura efectiva. Aplicables cuando la ZPF no es muy grande comparada con el espécimen analizado. En este caso la ZPF se simula de forma implícita al evaluar la respuesta de la muestra lejos de la punta de la grieta mediante una grieta elástica equivalente cuya punta se localiza en algún lugar dentro de la zona de fractura, en lo que se conoce como la equivalencia de campos lejanos (Bazant y Planas 1998). Dentro de esta categoría, se pueden considerar el modelo de la curva R, el modelo de los dos parámetros (TPFM) y el método de efecto de tamaño (ZEM), el cual se describirá con detalle más adelante.

-Explícita: Modelos cohesivos. Aplicables cuando la ZPF es grande comparada con la longitud de la grieta. Existen dos aproximaciones para estos modelos. La primera considera que la ZPF se ubica en una línea y se caracteriza por una ley de tensión-deformación que exhibe reblandecimiento. La segunda supone que las deformaciones inelásticas en la ZPF se distribuyen en una banda de cierto ancho, que imaginariamente existe al frente de la grieta principal, en lo que se conoce como modelo de banda de agrietamiento (CBM, Bazant y Cedolin 1983).

MECÁNICA DE LA FRACTURA NO LINEAL ELÁSTICA

EFEECTO DE TAMAÑO

En 1984, Bazant introdujo el denominado efecto de tamaño a través de su estudio “*Size Effect in blunt fracture: Concrete, Rock & Metal*”. Este efecto tiene en cuenta que en materiales cuasi-frágiles, como los mencionados arriba, la resistencia a la fractura depende del tamaño de la estructura o de la muestra sometida a carga.

Debido a este efecto, si se comparan dos estructuras geoméricamente semejantes (por ejemplo vigas con la misma relación sección transversal-longitud), la resistencia nominal de la estructura grande es diferente, y generalmente menor, que la resistencia nominal de la pequeña.

Se establece el efecto de tamaño como una transición de cálculo desde la resistencia de materiales (apta para piezas de pequeño tamaño en comparación con el tamaño de la grieta) hacia la mecánica de fractura lineal elástica para piezas de mayor tamaño. De acuerdo con el Comité ACI-446 (American Concrete Institute), el efecto de

tamaño es una de las razones para emplear la Mecánica de Fractura para determinar el comportamiento de las estructuras en lugar de emplear los criterios de Resistencia de Materiales.

Para evaluar el efecto de tamaño es necesario introducir el concepto de tensión nominal σ_N , que corresponde a la carga dividida por la sección transversal típica:

$$\sigma_N = c_N \frac{P}{bD} \quad (\text{similitud bidimensional}) \quad \sigma_N = c_N \frac{P}{D^2} \quad (\text{similitud tridimensional})$$

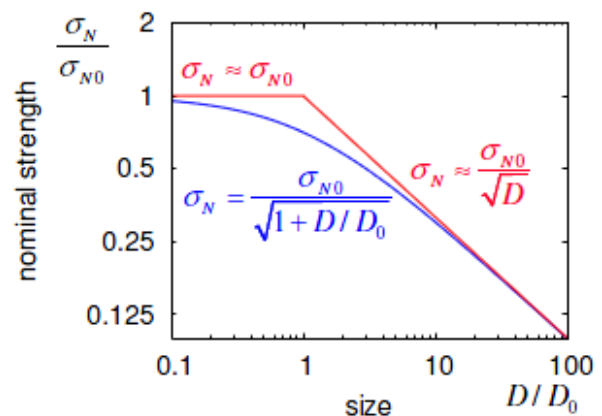
Donde P es la carga, b el espesor de la estructura y c_N un coeficiente que varía según el caso de estudio, pero que en general toma valor unitario. Por último D es la dimensión característica estructural, la cual como se observa, es inversamente proporcional a la resistencia nominal.

Bazant y Planas (1998) indican que el efecto de tamaño en estructuras de hormigón puede tener hasta cuatro causas diferentes, como son:

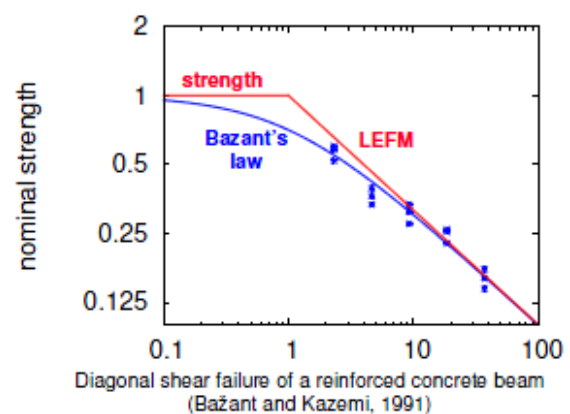
Efecto de capa de borde o de pared. Se debe a que en las paredes de la estructura se concentran partículas de menor tamaño relativo y también allí es mayor el contenido de cemento y de mortero, por lo que se puede decir que la estructura cuenta con materiales donde la distribución de tensiones variará al traspasar las tensiones internas los límites entre uno y otro.

Además existe otro efecto por el cual, bajo tensión normal paralela a la superficie, ocurre un desajuste entre las propiedades elásticas del agregado y las de la matriz de mortero, lo que genera tensiones transversales en el interior mientras que en la superficie tales tensiones son cero.

Por último se expone el efecto de Poisson, por el que la capa superficial se encuentre en condición de tensión plana, mientras que en la parte interior está próxima a una condición de deformación plana.



Examples of size effect: experimental evidence



Fenómeno de difusión. Los tiempos medios de los procesos de difusión, como es el secado, son proporcionales al cuadrado del tamaño de la estructura. Por ello, los agrietamientos que tienden a presentarse en la superficie de las estructuras de hormigón debidos al secado, pueden tener patrones de orientación y densidad muy diferentes dependiendo del tamaño de la estructura.

Calor de hidratación. Relacionado directamente con las reacciones químicas durante el fraguado. Su efecto es similar al de difusión puesto que el tiempo medio de disipación de calor de hidratación en una estructura es proporcional al cuadrado de su tamaño.

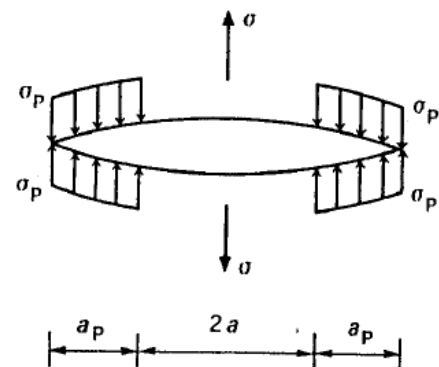
Efecto estadístico. Debido a la propia aleatoriedad de la resistencia del material conformado por los diferentes compuestos.

MODELOS NO LINEALES APLICADOS A DIFERENTES TIPOS DE MATERIAL

1. Modelo de DUGDALE para MATERIALES DÚCTILES

Este método de fractura elasto-plástica parte de ciertas suposiciones:

- Modo I de fractura en una lámina infinita bajo tensión uniforme.
- El material es dúctil y las deformaciones plásticas se localizan en una zona estrecha coplanaria a la grieta.
- Esta zona plástica se modela mediante una grieta ficticia (de longitud desconocida) y bajo una distribución uniforme de tracciones cohesivas σ_p .



La longitud de la zona de cohesión a_p se calcula imponiendo la condición de cierre suavizado en las caras de la grieta:

$$K_I = K_{I\sigma} + K_{I\sigma_p} = 0$$

$$K_{I\sigma} = \sigma \sqrt{\pi(a + a_p)}$$

que desarrollada empleando las condiciones mencionadas y mediante una serie de Taylor se llega a:

$$a_p = \frac{\pi K_{I\sigma}^2}{8 \sigma_p^2}$$

Siguiendo la aproximación de Irwin:

$$a_{PC} = \frac{\pi K_{IC}^2}{8 \sigma_P^2}$$

$$K_{IC} = \sqrt{G_{IC} E}$$

$$\int_0^{\delta_a} \sigma_P d\delta = \sigma_P \delta_a = G_{IC}$$

Con lo que finalmente se tiene:

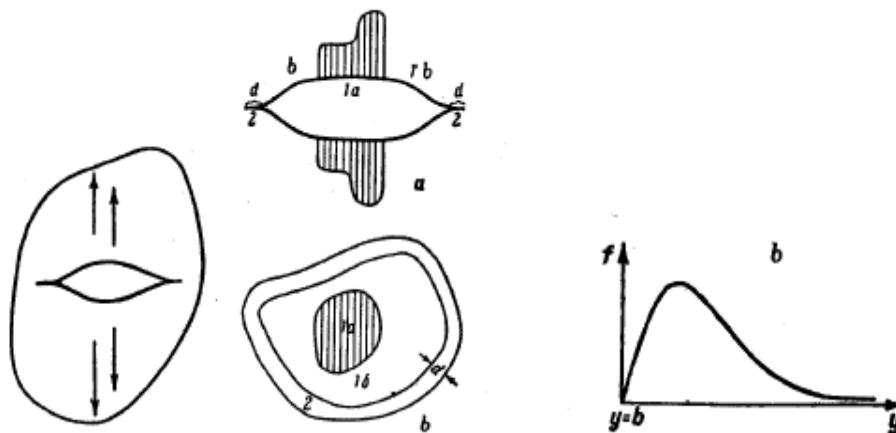
$$\delta_a = \frac{8 \sigma_P a}{\pi E} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_P} \right) \right] \quad \text{or} \quad \delta_a = \frac{K_I^2}{\sigma_P E} \quad (\text{if } \sigma \ll \sigma_P)$$

La cual se puede resolver empleando el método de Castigliano.

2. Modelo de BARENBLATT para MATERIALES PURAMENTE FRÁGILES.

En este caso, se parte de considerar:

- Modo I de rotura en un medio lineal elástico, homogéneo, isótropo e infinito bajo carga uniforme.



Este método representa los enlaces atómicos que mantienen unidas ambas partes del cuerpo separadas por la grieta en forma de fuerzas cohesivas que actúan a lo largo de las regiones de la grieta, y atrayendo una parte de la misma hacia la otra.

La intensidad máxima en este caso:

$$\sigma_c \approx \frac{E}{\pi} \approx \sqrt{\frac{E\gamma_s}{b}}$$

Por otro lado, la determinación de las fuerzas cohesivas es bastante compleja, por lo que se tienen que asumir nuevas condiciones:

- La dimensión de la región del borde de la grieta es pequeña en comparación al tamaño global de la grieta.
- Los desplazamientos en la zona del borde, para un material en condiciones dadas, es siempre el mismo para cualquier carga actuante. Durante la propagación de la grieta, el borde de la misma simplemente se traslada hacia adelante.

Combinar las dos condiciones anteriores es lo mismo que decir que existe una zona de plastificación pequeña en comparación con el tamaño de la grieta.

- Además, los lados opuestos de la grieta se unen de forma suavizada, o lo que es lo mismo, que la tensión en la punta de la grieta es finita. ($K=0$).



Estas consideraciones llevaron a la definición del estado crítico de equilibrio dinámico, el cual depende del módulo de cohesión del material, dependiente a su vez de la integral de las fuerzas cohesivas de tracción a lo largo del borde de la región.

Una vez establecidas las condiciones que dieron lugar al modelo, Willis (mediante el método de la variable compleja) y Rice (mediante la integral J) probaron que existe una semejanza entre el modelo de Barenblatt aplicado a las fuerzas de cohesión y el modelo de Griffith de balance energético.

$$\text{Willis} \rightarrow \int_0^{y^*} f \, dy = G_{IC} \quad \text{Método de la variable compleja}$$

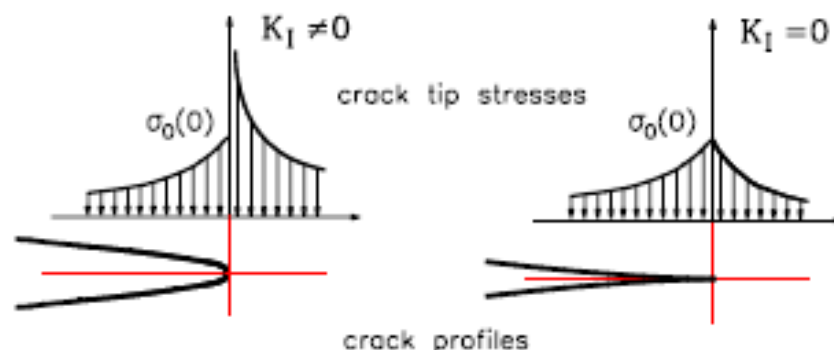
$$\text{Rice} \rightarrow \int_0^{\delta^*} \sigma(\delta) \, d\delta = G_{IC} \quad \text{Método de la integral J}$$

3. Modelos COHESIVOS y DISCONTINUOS para MATERIALES CUASI-FRÁGILES Y DE MATRIZ FRÁGIL O CUASI-FRÁGIL

Dentro de esta gran familia de materiales se encuentran el hormigón armado, las cerámicas o los materiales fibrosos.

Las consideraciones a tener en cuenta en el planteamiento de este problema fueron:

- El proceso de fractura de estos materiales se asocia a la formación de una estrecha banda donde ocurre la deformación no lineal.
- El modelo reemplaza la zona donde ocurre la deformación por una grieta ficticia con distribución de tensiones de cierre $\sigma_0(w)$ (tensiones en dirección perpendicular a la grieta y sentidos opuestos, como intentando juntar de nuevo el material).
- Se desconocen tanto el tamaño de la zona de cohesión como su evolución durante el crecimiento de la grieta.
- Las tracciones de cohesión dependen de la deformación inicial que provoca la grieta $\sigma_0(w)$, el cual también es desconocido.
- El campo de tensiones en la punta de la grieta puede ser:
 - Finito $\rightarrow K=0$ (fractura cohesiva)
 - Singularidad $\rightarrow K \neq 0$ (fractura discontinua)



Se tiene por lo tanto un sistema no lineal indeterminado. Analíticamente no existe solución, pero ésta se puede evaluar de manera aproximada empleando algoritmos de optimización o herramientas tales como elementos de contorno, elementos finitos o aproximaciones mediante ecuaciones integrales. A continuación se exponen los resultados conseguidos con la aproximación mediante integrales. Los otros métodos mencionados serán tratados más adelante en el apartado dedicado al problema inverso.

Aproximación Integral:

El factor de intensidad de tensiones en la punta de la grieta puede valer:

$$K_I(a) = K_{load}(a) - K_{I\sigma}(a) = K_{IC} \quad \text{Bridged-crack model}$$

$$K_I(a) = K_{load}(a) - K_{I\sigma}(a) = 0 \quad \text{Cohesive-crack model}$$

Donde:

$$K_{I\sigma}(a) = \int_{a_f}^a G(a, x) \sigma_0[w(x)] dx$$

$G(a, x)$ es la función de Green para la geometría específica considerada, dado un factor de intensidad de tensiones debido a un par de fuerzas unitarias normales a las superficies de la grieta aplicadas en el punto x .

$a - a_f = a_f$ = longitud de la zona cohesión

El desplazamiento durante la propagación de la grieta:

$$w(x_i) = w_{load}(x_i) + w_{\sigma}(x_i) = \sum_j^{n_L} \lambda_{ij}(P) P_j - \int_{a_f}^a \lambda_{ik}(F_k) \sigma_0[w(x_k)] dx_k$$

Donde:

$\lambda_{ij}(P)$ = apertura de la grieta en x_i , debido a una carga externa unitaria P_j .

$\lambda_{ik}(F_k)$ = apertura de la grieta en x_i debido a un par de fuerzas ficticias unitarias F_k , normales a las superficies aplicadas en x_k .

Se desconocen: a_f , $w(x)$, $\sigma_0(w)$ y la carga de equilibrio de crecimiento de la grieta.

Este planteamiento integral se resuelve de forma iterativa hasta obtener una solución consistente.

PROBLEMA INVERSO

1. Introducción

La necesidad de identificación de parámetros físicos y geométricos usando datos experimentales es un problema que ocupa a todas las ramas de la ciencia. Esta es la motivación para el desarrollo del problema inverso que es altamente aplicado en el campo de la detección de grietas.

El problema inverso, aplicado a la ingeniería, consiste en a partir de unos datos medidos experimentalmente, definir un modelo de comportamiento que ha podido seguir la estructura hasta llegar a este estado.

La primera dificultad o causa de error que encontramos en el problema inverso consiste en la toma de medidas. Puesto que el modelo que vamos a definir finalmente es obtenido en función de estas medidas, errores en las mediciones debidos a la instrumentación utilizada o a fallos humanos hace que se genere una serie de datos de partida que no es suficiente para garantizar que del sistema de ecuaciones generado obtengamos una única solución. Para este tipo de análisis el principal problema es por tanto la **cantidad y la calidad de los datos**. En este aspecto los avances en los últimos años son muy importantes en áreas de métodos de inspección no destructiva, técnicas de correlación, tomografía computacional y ultrasonidos, se han desarrollado en estos campos las herramientas necesarias para que los datos tomados se correspondan con los datos reales lo máximo posible.

La segunda complicación a solventar es el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones a resolver a partir de estos datos tomados experimentalmente. Dada la naturaleza del problema, el sistema de ecuaciones a estudiar para la representación del problema está mal condicionado y son necesarias la aplicación de **técnicas de regularización**. Estas técnicas funcionan reemplazando el sistema de ecuaciones por uno más estable y encontramos por ejemplo las siguientes: Método de los mínimos cuadrados, Descomposición de valores singulares (SVD), Regularización de Tikhonov.

Finalmente el procedimiento a seguir es la **resolución del problema inverso**. En este aspecto el objetivo es minimizar una función error u objeto, normalmente $\phi(\lambda_i)$, donde λ_i simboliza los parámetros que se estiman sobre el comportamiento de la

estructura. La función ϕ es una diferencia de los valores calculados de manera teórica y los obtenidos experimentalmente. Los primeros vendrán en función de unos parámetros λ_i . Tras este proceso obtendremos los valores de λ que aseguran que el modelo que describela grieta teórica es el más similar a la realidad.

Nos centramos a continuación en el desarrollo de las técnicas de resolución, tanto en aquellas para la regularización de los datos como la resolución del problema inverso por varias vías. No entramos pues en la descripción de las herramientas a utilizar sino simplemente en su funcionamiento para cada caso de los considerados.

2. Técnicas de regularización

2.a Método de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados es un procedimiento matemático utilizado para encontrar la curva que mejor ajusta una serie de datos obtenidos experimentalmente. Este método consiste en minimizar la distancia entre los datos obtenidos y la curva que se desea aproximar, elevando la diferencia al cuadrado para obtener valores positivos. Para un sistema de ecuaciones en el que el número de ecuaciones es mayor al número de incógnitas, la solución obtenida en el caso de un sistema de fuerzas viene dada por:

$$x^* \rightarrow \min \left\{ \|k \cdot x - f\| \right\} \text{ para } x \text{ perteneciente a } \mathbb{R}^n$$

minimizando el error en la ecuación anterior se obtiene el procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones como sigue:

$$[k^T][k]\{x\}=[k^T]\{f\}$$

Haciendo

$$[k^T][k]=k^*$$

$$[k^T]\{f\}=f^*$$

Nos queda

$$[k^*]\{x^*\}=\{f^*\} \leftrightarrow k^* \cdot x^*=f^*$$

2.b Descomposición de valores singulares (SVD)

La descomposición de valores singulares es otro método de regularización muy utilizado para la regulación de soluciones del problema inverso. Se trata de una técnica alternativa muy interesante en la búsqueda de soluciones estables de sistemas de ecuaciones mayormente singulares y sin ninguna otra información adicional.

Utilizamos el mismo sistema de ecuaciones que en el caso anterior. El método de la descomposición en valores singulares se utiliza para la descomposición en valores singulares de la matriz $[k]$, factorizando la matriz como se muestra a continuación:

$$[k]=[U][S][V]^T=USV^T$$

Donde tenemos que:

$[U]$ es una matriz cuyas columnas están formadas por los valores propios de $[k][k]^T$

$[V]$ es una matriz cuyas columnas son los valores propios de $[k]^T[k]$

$[S]$ es una matriz diagonal cuyos coeficientes vienen dados por los valores propios ordenados ($w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_m$) de la matriz $[k]^T[k]$.

El resto de filas y columnas, dependiendo de la relación entre m y n , se constituyen por coeficientes iguales a cero,

$$[S] = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}, & m > n \\ \{\Sigma | 0\}, & m < n \end{cases}$$

Por tanto, el nuevo sistema de ecuaciones tras aplicar la descomposición en valores singulares sería:

$$[k] = [U][S][V]^T = USV^T$$

$$[U][S][V]^T x = \{f\}$$

Haciendo

$$[U][S][V]^T = k^*$$

$$x = x^*$$

$$\{f\} = f^*$$

Nos queda a resolver:

$$K^* x^* = f^*$$

La solución regularizada de la ecuación anterior viene dada por:

$$K^{*-1} = [V] \begin{bmatrix} inv[\Sigma] \\ 0 \end{bmatrix} [U]^T = VS^{-1}U^T \rightarrow \{x^*\} = \{k^*\}^{-1} \{f\} \leftrightarrow x^* = k^{*-1} f^*$$

2.c Regularización de Tikhonov

Se trata de uno de los métodos más populares utilizados para la regularización de soluciones de problemas mal condicionados. Poniendo el mismo ejemplo que en los casos anteriores, la ecuación $kx = f$ representa matemáticamente el comportamiento en un problema inverso general, a partir de aquí la regularización de Tikhonov consiste en remplazar este sistema por el problema de minimización que se muestra a continuación:

$$x^* \rightarrow \min \{ \|kx - f\|^2 + \alpha \|x\|^2 \} \text{ para } x \text{ perteneciente a } R^n$$

donde $\alpha \geq 0$ es el parámetro de regularización, y el símbolo $\|\cdot\|$ denota la norma Euclídea.

Usando la notación matricial, el proceso de regularización de Tikhonov puede escribirse como:

$$([k]^T_{n \times m} [k]_{m \times n} + \alpha [I]_{n \times n}) \{x\}_{n \times 1} = [k]^T_{n \times m} \{f\}_{m \times 1}$$

$$(kk^T + \alpha I) x = k^T f$$

Siendo

$$kk^T + \alpha I = [k_\alpha]_{n \times n}$$

$$x = \{x_\alpha\}_{n \times 1}$$

$$k^T f = \{f_\alpha\}_{n \times 1}$$

Nos queda a resolver: $k_\alpha x_\alpha = f_\alpha$

La solución regularizada x_α puede obtenerse utilizando cualquier solver o simplemente invirtiendo la matriz $[k_\alpha]$ como sigue:

$$[k_\alpha] = ([k]^T [k] + \alpha [I])^{-1} \rightarrow \{u_\alpha\} = [k_\alpha]^{-1} \{f_\alpha\} \rightarrow u_\alpha = k^{-1}_\alpha f_\alpha$$

3. El problema inverso

El problema inverso lo abordamos haciendo diferenciación entre los datos con los que vamos a trabajar. Se puede resolver desde dos puntos de vista según la herramienta de medida que haya sido utilizada, bien por un sistema de ecuaciones o bien por un mapeado de imágenes.

Los datos experimentales pues, pueden ser tomados por imágenes de alta resolución (Digital Image Correlation DIC). En ellos a partir de la resolución de la imagen obtenida (mm/pixel), de la resolución (DIC resolution, en pixeles), se calcula el error máximo absoluto en mm (Image Resolution x DIC Resolution). Igualmente se calcula la desviación estándar de los errores y finalmente se hace una evaluación cualitativa del error, diferenciando entre Ideal, Adecuado, Moderado y Excesivo, todo ello para una misma resolución de imagen.

Por otro lado el resultado puede obtenerse resolviendo un problema de elementos de contorno, en el que el comportamiento de la estructura se determina según los valores de las condiciones de contorno para determinados nodos. En este caso el problema inverso se resuelve teóricamente suponiendo que hay una grieta, en el caso que nos ocupa. La existencia de la grieta provocará una variación en la respuesta del campo de desplazamientos, de la rigidez de la estructura, o de la frecuencia inducida para el análisis en los nodos de estudio si se está resolviendo el problema por el método de los elementos de contorno. Esta variación es calculada teóricamente y dependerá de los valores de unos parámetros λ_i . El valor obtenido será uno de los elementos de la función a minimizar. Por otra parte se lleva a cabo la obtención de datos o medidas del laboratorio, que serán, según cada caso, de un campo de desplazamientos o cualquier otro mencionado anteriormente. Se tomará este dato como el otro componente de la función a minimizar. Finalmente el procedimiento se lleva a cabo minimizando la función $\phi(\lambda_i)$, que será la diferencia de la función teórica menos la obtenida experimentalmente. A partir del valor óptimo de ϕ obtenemos los parámetros λ_i que definen la grieta. Esta grieta, según el planteamiento del problema, es la más parecida a la real que podemos obtener con las herramientas de las que disponemos. Igual que en el caso anterior, en este caso y a partir de la función ϕ , podemos conocer el error y evaluarlo.

3.1 Análisis inverso de la estructura

El tipo de análisis que se efectúe en la estructura depende de los datos que podamos tomar con la herramienta de medida. Así serán diferentes los valores observados con una cámara fotográfica con respecto a los que se impongan al problema para que satisfaga las ecuaciones de contorno, e igualmente, la dispersión de los datos es considerada en casos en que sea de vital importancia. Conociendo el experimento que

vamos a realizar, estableceremos la herramienta para la obtención de los datos y como consecuencia podemos establecer el comportamiento de la estructura en función de una variable adecuada. Presentamos a continuación varios casos de análisis del problema inverso.

3.1.1 Método de los elementos de contorno

Para evaluar el problema inverso con el método de los elementos de contorno necesitamos conocer unas restricciones que pueden ser impuestas a la estructura así como su comportamiento interno.

Caso para una viga elástica con fractura cohesiva:

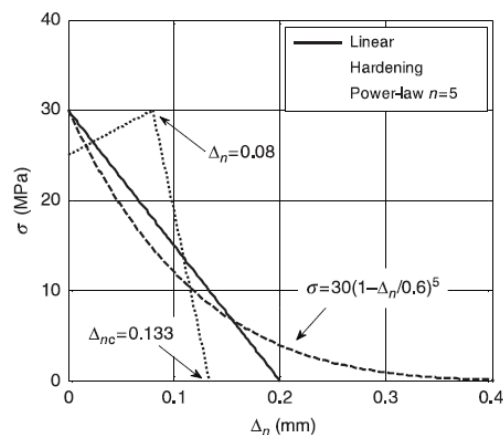
Comportamiento de la estructura regido por la ley:

$$(\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}))\mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

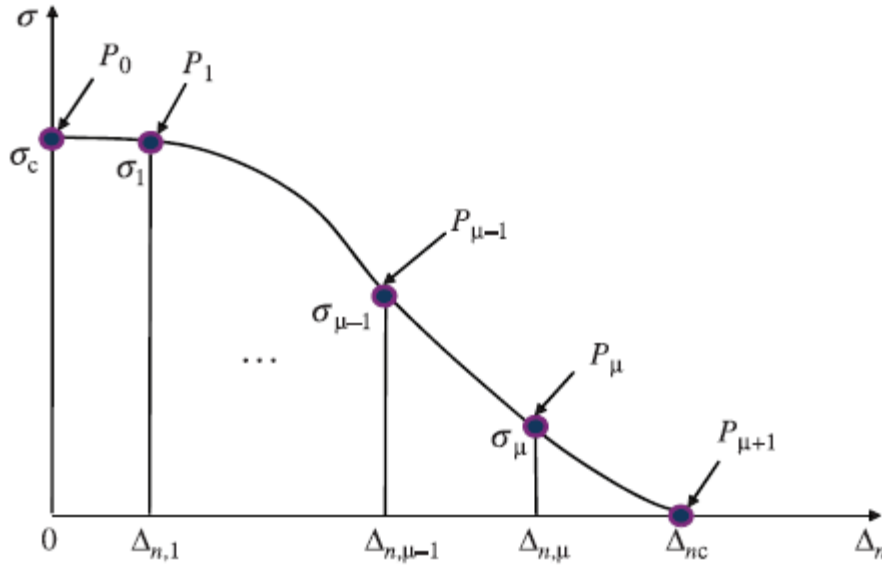
Se trata de un proceso iterativo en el que el valor \mathbf{u} en cada caso se calcula en función del obtenido anteriormente:

$$(\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}^{(n),m}))\mathbf{u}^{(n),m+1} = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

La relación entre la tensión normal aplicada y la apertura de grieta se puede representar según tres leyes diferentes para una grieta con elementos cohesivos: la primera con comportamiento “linear softening”, otra con un comportamiento de endurecimiento (HD) seguido de comportamiento “linear softening” y una tercera con comportamiento “power-law softening” (PL). Estos tres comportamientos se muestran a continuación:



El uso de splines como funciones de forma de la grieta basada en un número arbitrario de nodos de control como se muestra en la figura:



Con lo que las coordenadas de estos nodos se pueden escribir como:

$$\begin{cases} \Delta_n = \{0, \Delta_{n,1}, \dots, \Delta_{n,\mu}, \Delta_{nc}\} \\ \sigma = \{\sigma_c, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu, 0\} \end{cases}$$

Lo que permite parametrizar la grieta con las variables:

$$\lambda = \{\sigma_c, \Delta_{nc}, \sigma_1, \Delta_{n,1}, \dots, \sigma_\mu, \Delta_{n,\mu}\}$$

Independientemente de la forma de la grieta, tanto el problema directo como inverso para este caso se puede escribir como:

$$(\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}, \lambda))\mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

En el problema inverso, la incógnita a resolver es el vector de parámetros λ que describe la zona de fractura cohesiva. Considerando ahora el campo de desplazamientos aún posible, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$\bar{\mathbf{u}}$ Campo de desplazamientos disponible para el método directo o inverso

$$\mathbf{K}_b \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}(\bar{\mathbf{u}}; \lambda),$$

Donde se ha utilizado la notación:

$$\hat{\mathbf{F}}^{\text{ext}}(\bar{\mathbf{u}}; \lambda) = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{K}_c(\bar{\mathbf{u}}; \lambda)\bar{\mathbf{u}}.$$

Así la tensión debida a la cohesión entre partículas se expresa como otro elemento de contorno y se encuentra dentro del último vector definido. Un camino a seguir para el problema es a partir de la minimización de los residuos:

$$\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{K}_b \bar{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{F}}^{\text{ext}}(\bar{\mathbf{u}}; \lambda)$$

Donde \mathbf{k}_b es un operador que, aplicado al este campo de desplazamientos, evita movimientos de sólido rígido y magnifica el error en el campo de desplazamientos. Por ello se propone como función a optimizar:

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}^M} \Phi(\lambda) = \left\| (\mathbf{u}^*(\lambda) - \bar{\mathbf{u}})^T \cdot \mathbf{w}_u \right\|_2, \text{ subject to } c_i(\lambda) \geq 0, i = 1 \dots L,$$

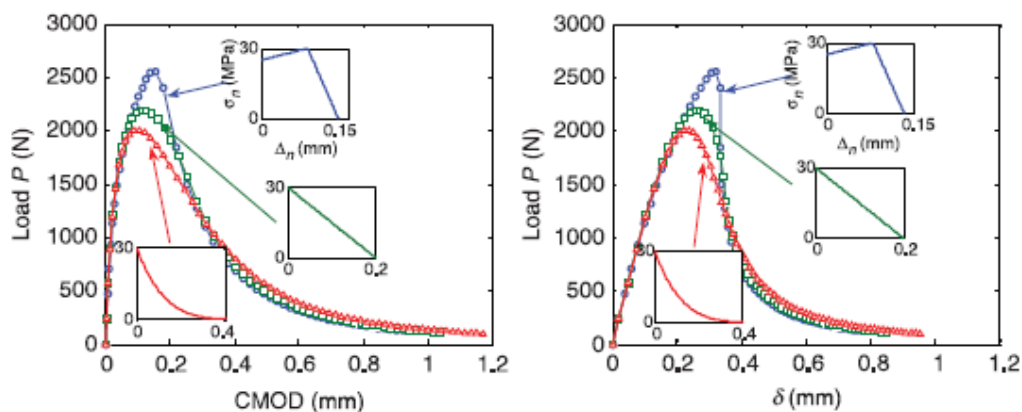
Donde M es el número de datos de entrada, c_i las restricciones aplicadas, L es el número de restricciones aplicadas y \mathbf{w}_u es el vector de pesos. $\mathbf{u}^*(\lambda)$ puede obtenerse como:

$$\mathbf{u}^*(\lambda) = \mathbf{K}_b^{-1} \widehat{\mathbf{F}}^{\text{ext}}(\bar{\mathbf{u}}; \lambda).$$

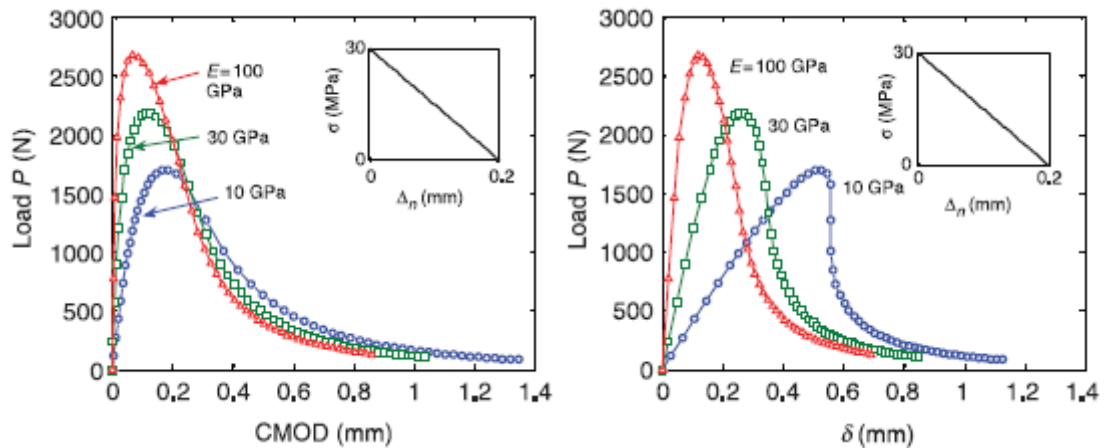
Para este caso en que los datos son obtenidos a partir de una cámara fotográfica, los errores admisibles se recogen en la siguiente tabla:

Image resolution (mm pixel ⁻¹)	DIC resolution (pixel)	Maximum absolute error (mm)	Estimated standard deviation or errors (mm)	Comments on the errors
0.0255	×	No error	= 0	Ideal
0.0255	×	0.005	= 1.28×10^{-4}	Accurate
0.0255	×	0.05	= 1.28×10^{-3}	Moderate
0.0255	×	0.2	= 5.1×10^{-3}	Coarse

Y una representación de los resultados, en función de la relación que exista entre tensiones normales y crecimiento de grieta, y des módulo de Young:



Load, P, versus load-line displacements, λ , and P versus CMOD curves for different (linear, PL and HD) CZM's, but the same bulk elastic modulus $E=30$ GPa

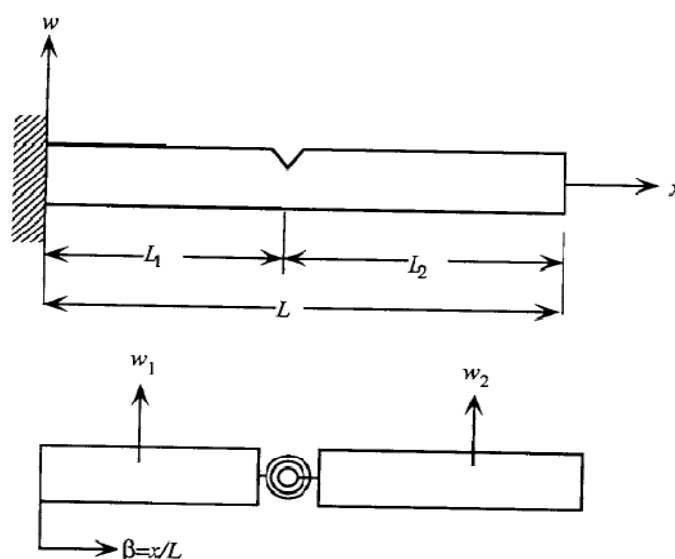


Load, P , versus load-line displacements, λ , and P versus CMOD curves for different bulk elastic moduli ($E=10, 30$ and 100 GPa), but the same linear CZM

3.1.2 Método de la variación de frecuencias naturales

El método de variación de las frecuencias naturales de una estructura está basado en el principio de que, ante la existencia de un defecto en un elemento estructural, se produce una variación de las frecuencias naturales de vibración de la estructura con respecto a sus frecuencias naturales cuando no está dañada, que está relacionada con la variación de la rigidez de la estructura. Así pues, si analizamos la variación de una frecuencia se puede afirmar que existe daño, mientras que si escogemos varias frecuencias, se puede además detectar su posición.

Se describe a continuación el caso de una viga en voladizo, como se muestra en la figura:



La longitud de la viga es L y se asume que el defecto está situado a una distancia L_1 del extremo fijo. El defecto está representado por un resorte. La ecuación que rige el movimiento de la viga en flexión es:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \omega^2 \rho A w = 0 \quad (1)$$

Donde ω es la frecuencia natural, A la sección transversal, ρ es la densidad y EI es la rigidez en flexión. Los dos segmentos de viga pueden estudiarse de manera separada. La ecuación adimensional del movimiento para los dos segmentos toma la forma.

$$\frac{d^4 w_j}{d\beta_j^4} - \alpha^4 w_j = 0, \quad j=1, 2 \quad (2)$$

Donde

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI}, \quad \beta_j = \frac{x_j}{L} \quad (3)$$

Para obtener las ecuaciones integrales del contorno, se multiplica la expresión por la solución fundamental w_j^* y se integra en la longitud de la viga, siendo $\gamma_j = L_j/L$.

$$\int_0^{\gamma_j} \frac{d^4 w_j}{d\beta_j^4} w_j^* d\beta_j - \alpha^4 \int_0^{\gamma_j} w_j w_j^* d\beta_j \quad (4)$$

E integrando cuatro veces por partes respecto de β_j , llegamos a la siguiente relación integral de reciprocidad

$$\begin{aligned} w_j(\zeta_j) = & -V_j^*(\gamma_j, \zeta_j) w_j(\gamma_j) + V_j^*(0, \zeta_j) w_j(0) + M_j^*(\gamma_j, \zeta_j) \theta_j(\gamma_j) - M_j^*(0, \zeta_j) \theta_j(0) \\ & - \theta_j^*(\gamma_j, \zeta_j) M_j(\gamma_j) + \theta_j^*(0, \zeta_j) M_j(0) + w_j^*(\gamma_j, \zeta_j) V_j(\gamma_j) - w_j^*(0, \zeta_j) V_j(0) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde:

$$\theta_j(\beta_j) = \frac{dw_j(\beta_j)}{d\beta_j}, \quad V_j(\beta_j) = \frac{d^3 w_j(\beta_j)}{d\beta_j^3}, \quad M_j(\beta_j) = \frac{d^2 w_j(\beta_j)}{d\beta_j^2} \quad (6)$$

Y la solución fundamental viene dada por:

$$w_j^*(\beta_j, \zeta_j) = \frac{1}{4\alpha^3} \left(\frac{\sin(\alpha(\gamma_j - r))}{\cos(\alpha\gamma_j)} - \frac{\sinh(\alpha(\gamma_j - r))}{\cosh(\alpha\gamma_j)} \right) \quad (7)$$

Para la que r responde a la expresión:

$$r = |\beta_j - \zeta_j| \quad (8)$$

Las condiciones de contorno necesarias y suficientes son:

- Extremo fijo: $w_1(0) = 0, \theta_1(0) = 0$
- Extremo libre: $M_2(\gamma_2) = 0, V_2(\gamma_2) = 0$

Y las condiciones de continuidad y compatibilidad en la posición de la grieta:

$$w_1(\gamma_1) = w_2(0), \quad M_1(\gamma_1) = M_2(0), \quad V_1(\gamma_1) = V_2(0), \quad \theta_1(\gamma_1) + KM_1(\gamma_1) - \theta_2(0) = 0 \quad (10)$$

Donde k es la flexibilidad adimensional de la grieta.

La ecuación (5) muestra los desplazamientos transversales, las pendientes debidas a la flexión en todo punto interior ζ debido a los valores en el contorno de las fuerzas de cortante y los momentos de flexión. Considerando dos extremos y el punto de rotura de la viga, el número de incógnitas asciende a 16, cuatro de las cuales pueden ser determinadas por las condiciones de contorno en los extremos de la viga. Usando las cuatro condiciones de compatibilidad y continuidad de la ecuación (10), y tomando la variable ζ en la ecuación (5) en los contornos 0 y γ_j se pueden obtener cuatro ecuaciones más. Por tanto solo se necesitan cuatro ecuaciones más para igualar el número de incógnitas al número de ecuaciones. Para ello la ecuación (5) es derivada con respecto a la variable ζ obteniendo una nueva ecuación, con $d/d\zeta = -d/d\beta$

$$\begin{aligned} \theta_j(\zeta_j) = & \frac{dV_j^*(\gamma_j, \zeta_j)}{d\beta} w_j(\gamma_j) - \frac{dV_j^*(0, \zeta_j)}{d\beta} w_j(0) - V_j^*(\gamma_j, \zeta_j) \theta_j(\gamma_j) + V_j^*(0, \zeta_j) \theta_j(0) \\ & + \frac{d\theta_j^*(\gamma_j, \zeta_j)}{d\beta} M_j(\gamma_j) - \frac{d\theta_j^*(0, \zeta_j)}{d\beta} M_j(0) - \theta_j^*(\gamma_j, \zeta_j) V_j(\gamma_j) + \theta_j^*(0, \zeta_j) V_j(0) \end{aligned} \quad (11)$$

Utilizando el mismo proceso de límite, se obtienen cuatro expresiones adicionales de la ecuación (11). Las integrales en el contorno se pueden escribir de la forma:

$$\mathbf{B}(w)\mathbf{q} = 0 \quad (12)$$

Y a partir de ésta, las frecuencias naturales se obtienen buscando los valores de w que satisfacen la condición a continuación:

$$\det[\mathbf{B}(w)] = 0 \quad (13)$$

Problema inverso: Determinación de la localización de la grieta

La formulación del problema inverso consiste en determinar la localización de la grieta una vez sea conocida la respuesta de la estructura.

La solución de los dos tramos se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 \cosh \alpha \beta + A_2 \sinh \alpha \beta + A_3 \cos \alpha \beta + A_4 \sin \alpha \beta, \\ w_2 &= A_5 \cosh \alpha \beta + A_6 \sinh \alpha \beta + A_7 \cos \alpha \beta + A_8 \sin \alpha \beta \end{aligned} \quad (14)$$

Aplicando las condiciones de contorno y forzando la compatibilidad en el emplazamiento de la grieta se obtienen las ecuaciones algebraicas homogéneas que pueden reducirse a las siguientes:

$$\begin{aligned} -4 - 4 \cos \alpha \cosh \alpha + \alpha K \{ \sin \alpha (\cosh \alpha + \cosh(\alpha - \alpha \beta)) - 2 \cosh \alpha \beta \sin \alpha \beta \\ + 2 \cosh(\alpha - \alpha \beta) \sin(\alpha - \alpha \beta) - \cos \alpha \sinh \alpha - \cos(\alpha - 2\alpha \beta) \sinh \alpha \\ + 2 \cos \alpha \beta + \sinh \alpha \beta - 2 \cos(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) \} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Tomando la derivada parcial respecto a K se obtiene

$$\begin{aligned} 4(\cosh \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial K} \\ + \alpha \{ (\cosh(\alpha - 2\alpha \beta) + \cosh \alpha) \sin \alpha - 2 \cosh \alpha \beta \sin \alpha \beta + 2 \cosh(\alpha - \alpha \beta) \sin(\alpha - \alpha \beta) \\ - (\cos(\alpha - 2\alpha \beta) + \cos \alpha) \sinh \alpha + 2 \cos \alpha \beta \sinh \alpha \beta - 2 \cos(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) \} \\ + K \{ (\cosh(\alpha - 2\alpha \beta) + \cosh \alpha) \sin \alpha - 2 \cosh \alpha \beta \sin \alpha \beta + 2 \cosh(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) \\ - (\cos(\alpha - 2\alpha \beta) + \cos \alpha) \sinh \alpha + 2 \cos \alpha \beta \sinh \alpha \beta - 2 \cos(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) \} \frac{\partial \alpha}{\partial K} \\ - \alpha K \{ \cos(\alpha - \alpha \beta) \cosh \alpha - \cos \alpha \cosh(\alpha - 2\alpha \beta) - 2 \sin \alpha \sinh \alpha - \sin(\alpha - 2\alpha \beta) \sinh \alpha \\ + 2 \beta \sin(\alpha - 2\alpha \beta) \sinh \alpha + 4 \beta \sin \alpha \beta \sinh \alpha \beta - \sin \alpha \sinh(\alpha - 2\alpha \beta) + 2 \beta \sin \alpha \sinh(\alpha - 2\alpha \beta) \\ - 4 \sin(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) + 4 \beta \sin(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) \} \frac{\partial \alpha}{\partial K} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Para una viga intacta $K=0$, la ecuación anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} 4(\cosh \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \alpha \{ (\cosh(\alpha - 2\alpha \beta) + \cosh \alpha) \sin \alpha \\ - 2 \cosh \alpha \beta \sin \alpha \beta + 2 \cosh(\alpha - \alpha \beta) \sin(\alpha - \alpha \beta) - (\cos(\alpha - 2\alpha \beta) + \cos \alpha) \sinh \alpha \\ + 2 \cos \alpha \beta \sinh \alpha \beta - 2 \cos(\alpha - \alpha \beta) \sinh(\alpha - \alpha \beta) \} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Usando la relación:

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (18)$$

La ecuación (17) puede escribirse como una ecuación incremental de la forma:

$$\frac{1}{\Delta K} = \frac{\omega}{\Delta \omega} \left\{ (\cosh(\alpha - 2\alpha\beta) + \cosh \alpha) \sin \alpha - 2 \cosh \alpha \beta \sin \alpha \beta + 2 \cosh(\alpha - \alpha\beta) \sin(\alpha - \alpha\beta) - (\cos(\alpha - 2\alpha\beta) + \cos \alpha) \sinh \alpha + 2 \cos \alpha \beta \sinh \alpha \beta - 2 \cos(\alpha - \alpha\beta) \sinh(\alpha - \alpha\beta) \right\} / 2(\cos \alpha \sinh \alpha - \cosh \alpha \sin \alpha) \quad (19)$$

Para una viga en voladizo el parámetro adimensional α para los tres modos más bajos viene dado por:

$$\alpha_1 = 1.875; \alpha_2 = 4.694; \alpha_3 = 7.855 \quad (20)$$

La ecuación (19) para los tres primeros modos de vibración puede escribirse entonces como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta K_1} = & -\frac{0.242\omega_1}{\Delta \omega_1} [2.069 - 1.592 \cos(1.875 - 3.75\beta) + 0.477 \cosh(1.875 - 3.75\beta) \\ & + 3.337 \cosh(1.875\beta) \sin(1.875(1 - \beta)) - \cosh(1.875\beta) \sin(1.875\beta) \\ & - \cos(1.875(1 - \beta)) \sinh(1.875(1 - \beta)) + \cos(1.875\beta) \sinh(1.875\beta) \\ & + 3.184 \sin(1.875(1 - \beta)) \sinh(1.875\beta) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta K_2} = & -\frac{0.019\omega_2}{\Delta \omega_2} [26.818 - 27.32 \cos(4.694(1 - 2\beta)) + 0.5 \cosh(4.694(1 - 2\beta)) \\ & - 54.65 \cosh(4.694\beta) \sin(4.694(1 - \beta)) + \cosh(4.694\beta) \sin(4.694\beta) \\ & + \cos(4.694(1 - \beta)) \sinh(4.694(1 - \beta)) - \cos(4.694\beta) \sinh(4.694\beta) \\ & + 54.64 \sin(4.694(1 - \beta)) \sinh(4.694\beta) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta K_3} = & -\frac{7.748 \times 10^{-4} \omega_3}{\Delta \omega_3} [645.31 - 644.65 \cos(7.855(1 - 2\beta)) + 0.5 \cosh(7.855(1 - 2\beta)) \\ & + 1289.3 \cosh(7.855\beta) \sin(7.855(1 - \beta)) - \cosh(7.855\beta) \sin(7.855\beta) \\ & - \cos(7.855(1 - \beta)) \sinh(7.855(1 - \beta)) + \cos(7.855\beta) \sinh(7.855\beta) \\ & - 1289.3 \sin(7.855(1 - \beta)) \sinh(7.855\beta) \end{aligned} \quad (23)$$

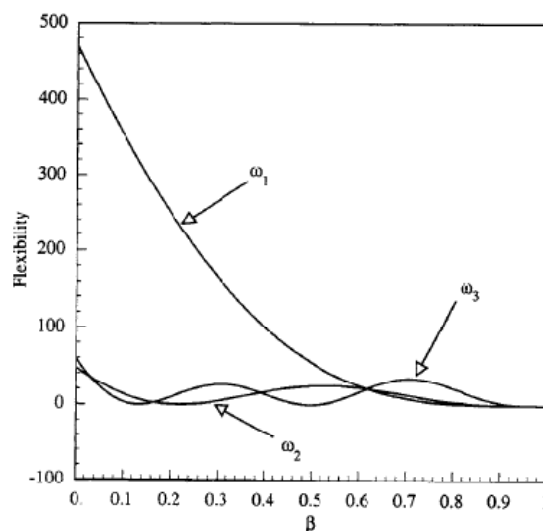
Para la detección de la grieta, se utilizan los tres primeras frecuencias naturales, midiéndolas antes de la puesta en servicio de la viga y en el momento deseado de comprobación. Usando las ecuaciones (21)-(23) y asumiendo un valor de β dentro del rango $0 \leq \beta \leq 1$, se representa la variación ΔK con respecto a β . En el momento que exista una grieta en la viga, el valor de β para el cual las tres curvas intersecan representa la localización de la grieta.

Ejemplo de aplicación:

En este apartado se aplica el procedimiento anterior a un problema de ejemplo. Se considera una viga que tiene una grieta a 0.62. Las frecuencias naturales para la viga intacta y dañada se calculan utilizando la ecuación integral de contorno obteniendo:

	Intacta	Dañada
Modo 1	39.631	39.464
Modo 2	247.11	237.175
Modo 3	687.662	665.463

Suponemos que la localización de la grieta es desconocida. Sin embargo sí se conocen los valores de las tres frecuencias naturales para la viga intacta y dañada. De las ecuaciones (35)-(37), se representa la variación de la flexibilidad con respecto a la localización de la grieta. Como se observa en la curva a continuación, la intersección de las tres grietas nos da la posición exacta de la grieta:



3.1.3 Aplicación de la corriente de Eddy

El último método que vamos a comentar consiste en la aplicación de la corriente de Eddy. Este caso es de menos utilidad para el caso de una viga elástica que, generalmente y según el enfoque que hemos querido darle, será de hormigón.

El proceso consiste en hacer pasar una corriente por la estructura. La presencia de defectos y su forma puede ser obtenida en función de las variaciones de impedancia en la bobina.

3.2 Función ϕ , parametrización de la grieta y aplicación del método de los elementos de contorno

3.2.1 La función ϕ

La función ϕ es utilizada para minimizar la diferencia entre los datos medidos experimentalmente y los datos predichos teóricamente. Para ello se define en el modelo teórico una variable que a su vez dependerá de los distintos parámetros de la grieta.

3.1.2 Parametrización

Supongamos una estructura que contiene una grieta desconocida. Esta grieta está caracterizada por una serie de parámetros $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m]^T$. Los parámetros que se utilizan dependen del tipo de grieta y de la herramienta que utilicemos para la evaluación de la estructura. Para una grieta recta, no necesariamente horizontal se utilizan en general las coordenadas de la grieta, parámetros relacionados con los efectos de contacto en el centro de la grieta como por ejemplo el coeficiente de fricción, la longitud de la grieta o su inclinación. En otras ocasiones, cuando por ejemplo el elemento estructural está sometido a un ensayo de corriente de Eddy, se utilizan para definir los parámetros de la grieta funciones spline que representan la forma de la grieta. En cualquier caso se puede utilizar también la frecuencia propia de vibración de la estructura para la localización de la grieta. En función de la herramienta de entrada de datos que utilicemos, el problema que apliquemos para la solución (elementos de contorno, variación en las frecuencias propias, etc) se determinarán los parámetros que caracterizan la función \mathbf{z} .

3.1.3 Planteamiento de la función ϕ a partir de la parametrización de la grieta

Consideremos para este apartado el caso de la grieta \mathbf{z} y los parámetros definidos en el caso de una grieta recta.

La respuesta del sistema estructural para una carga dada \mathbf{p}^l , $l = 1, \dots, l_1$ y para una grieta dada \mathbf{z} viene definida por el vector $\mathbf{r}^*(\mathbf{z}, \mathbf{p}^l) = [r^*_{1,1}, r^*_{1,2}, \dots, r^*_{m,1}]^T$ donde m es el número de grados de libertad asumidos, por ejemplo, desplazamientos de nodos del contorno según diferentes direcciones o componentes determinadas del tensor de tensiones. Por otra parte, la respuesta de la misma estructura, con una grieta conocida, sometida al mismo estado de cargas \mathbf{p}^l , se denota como $\mathbf{r}_o(\mathbf{p}^l)$. Destacar en este apartado que no se han considerado estados dinámicos de carga (para un estado de cargas armónico elastodinámico, habría que considerar también el caso de excitación en todas las frecuencias ω . Para respuestas dependientes del tiempo, necesarias para evaluar los problemas de contacto dinámico, habría que llevar a cabo la suma en cualquier intervalo de tiempo considerado).

En el caso del problema elastoestático, el problema inverso queda formulado como la función de error

$$\Phi(z) = \sum_{l=1}^{l_1} (||r^*(z, p^l) - r_0(p^l)||)$$

$||\cdot||$ indica la norma adoptada, en este caso la identificación de mínimos cuadrados

Considérese el mapeado estructural $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{r}^*(\mathbf{z})$, que representa el mapa de los parámetros de rotura en la respuesta mecánica del sistema con una grieta, para una carga dada. La solución obtenida por cualquier método teórico para una grieta z dada es la imagen del mapeado. En él, los parámetros geométricos de la grieta, como las coordenadas de los nodos que modelizan la grieta, están intrínsecos en las matrices que definen el problema H y G . Este mapeado es obviamente no lineal y, en la presencia de efectos de contacto unilateral, no diferenciable en el sentido clásico. De acuerdo con esto, el error de la función de mínimos cuadrados es no convexo y probablemente no diferenciable.

4. Soluciones al problema de optimización: Aplicación de redes neuronales

El problema de optimización de la función puede resolverse por distintos métodos, entre los que nos gustaría destacar la aplicación de redes neuronales para la obtención de una solución óptima al problema inverso.

Este tipo de análisis es jerárquico y de avance (o feed-forward). El procedimiento consiste en una serie de unidades de proceso muy interconectadas (nodos de la configuración de la red) que son asignadas a unas determinadas leyes consecutivas (jerarquía) de las cuales la primera (input layer) recibe una señal y la última (output layer) transmite una respuesta. Entre la señal de entrada y la respuesta ocurren una serie de pasos internos. Una señal interna es transmitida (feed-forwarded) de una ley a la siguiente en la jerarquía y es transformada según la siguiente regla: cada unidad de proceso suma las entradas de las unidades de la ley anterior a la que está conectada, aumentada por peso parecido a la fuerza sináptica que caracteriza las conexiones entre neuronas, y después pasa por una función de activación (función de respuesta), tras esto se transmite el resultado a las unidades de proceso de la siguiente ley. Se trata de un sistema altamente no lineal pero que es capaz de reproducir (curve fit) cualquier mapeado entre valores de entrada y salida, siempre que su dimensión sea lo suficientemente grande y que los valores de peso sinápticos asignados sean apropiados. La dimensión de la red comprende el número de leyes, de nodos, y de conexiones que tiene que ser suficiente para permitir la implantación de una red neuronal adecuada. La configuración de la red y su dimensionamiento se lleva a cabo actualmente como un procedimiento de ensayo-error. Una serie de ejemplos (datos de entrada y salida) se presentan a la red y se construyen algoritmos para ajustar los pesos (training phase) con el fin de minimizar cualquier error de medida con respecto a los datos elegidos para enseñar a la red neuronal.

Así pues, se introducen en la red neuronal una serie de casos reales, datos de entrada y salida que deben enseñar a la red neuronal la conexión entre los datos. Remarcar que la idea principal en el proceso de retropropagación de la red neuronal es que, una norma específica entre los datos de salida de la red y' para unos datos de entrada determinados $r(x,y)$, y los datos de salida conocidos y , es minimizada de manera iterativa durante la fase de aprendizaje. En este sentido la identificación del procedimiento de una red neuronal se clasifica como un método de identificación estructural no paramétrico, ya que no hay cantidades ingenieriles (valores propios, vectores propios) que se utilicen para la solución del problema de identificación propiamente dicho. Más tarde, en el modo de producción, las variables de la red no lineal, tienen valores fijos que son aquellos determinados en la fase de aprendizaje. Estos son utilizados para reproducir la relación $f(x,y) \rightarrow y$, es decir, para una serie dada de medidas f de la red, ésta da una predicción para las variables que caracterizan la rotura interna.

LECTURAS RECOMENDADAS:

Problema directo

- CARPINTERI, A. 1999. *Non linear crack models for non metallic materials*, Kluwer Academic Publishers.
- MAIER, G. BOCCIARELLI, M., BOLZON, G., FEDELE, R. 2006. *On inverse analysis in fracture mechanics*.
- BROCKS, W. SCHEIDER, I., SCHOEDEL, M. 2006. *Simulation of crack extension in shell structures and prediction of residual stress*.
- XIAO, Q. Z., KARIHALOO, B. L. 2006. *Asymptotic fields at frictionless and frictional cohesive crack tips in quasi-brittle materials*.
- REMMERS, J. J. C., DE BORST, R., NEEDLEMAN, A. 2003. *A cohesive segments method for the simulation of crack growth*.
- BAZANT, Z.P. Y PLANAS, JAIME. 1998. *Fracture and Size effect in concrete and other quasi-brittle materials*.
- PARA AMPLIAR, BUSCAR ARTÍCULOS DE LOS SIGUIENTES AUTORES: Bazant, Z.P., Cedolin, Irwin, Griffith, Westergard, Airy ó Carpinteri.

Problema inverso

- G.E. Stavroulakis, H. Antes. *Crack detection in elastostatics and elastodynamics. A beam modelling – neural network approach*
- H. Fukotomi, T. Takagi, h. Huang, J. Tani. *Fast inversion method for crack identification in Eddy current testing*
- Bin Shen, Ilinca Stanciulescu, Glaucio H. Paulino. *Inverse computatuion of cohesive fracture proprieties from displacements fields*
- Shiro Kubo, Takahide Sakagami, Hiroyuki Kitaoca. *Applicability if the electric potential CT Method to identification if interface internal cracks in bonded dissimilar materials*
- M.C.D. Ferreira. *Inverse analysis FOR two-dimensional structures using the boundary element method*
- J.K. Langenmberg. *Introduction to the special issue on inverse problems*
- Maryna V. Menshykova, Oleksander V. Menshykov, Igor Aguz. *An iterativa BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems*
- Masa Tanaka, A.N. Bercin. *Determination of crack location from changes in natural frequencies*
- Inverse Problems in engineering mechanics I and II. M Tanaka, G. S. Dulikravich (Eds) 1998 Elsevier science

Otra documentación consultada

- Simone Capetta, Roberto Tovo, David Taylor, Paolo Livieri. *Numerical evaluation of fatigue strength on mechanical notched components under multiaxial loadings*
- Chien-Yuan Hou. *Simulation on surface crack shape evolution using the finite element technique and considering the crack closure effects*
- S. Mikhnevskiy, G. Glinka. *Elastic-plastic fatigue crack growth analysys under variable amplitude loading spectra*
- P.F.P de Matos, D. Nowell. *Experimental and numerical investigation of thickness effects in plasticity-induced fatigue crack closure*
- V.V. Zozulya, P.I. González-Chi. *Dynamic fracture mechanics with contact interaction at the crack edges*
- Alexander Khludnev, Atusi Tani. *Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies*