

Medida del módulo G de elasticidad transversal de materiales viscoelásticos mediante ensayo dinámico

*Máster Estructuras 2010-2011
Evaluación No Destructiva y Calidad de Estructuras
Profesor: Guillermo Rus Carlborg*

*Rubén Cañadas Gracia
María Laura López Cifuentes
Laura María Peralta Pereira*

Medida del módulo G de elasticidad transversal de materiales viscoelásticos mediante ensayo dinámico

ÍNDICE

1. Resumen
2. Objetivos
3. Definición y montaje de la instrumentación
 - 3.1. Características del dispositivo
 - 3.2. Muestras
4. Desarrollo del modelo teórico
5. Resultados experimentales
6. Validación del modelo teórico
7. Conclusiones

1. Resumen

Se propone la caracterización de materiales viscoelásticos a través de los principios fundamentales de la mecánica-dinámica de sólidos.

Se ha diseñado un dispositivo basado en un modelo teórico de torsión dinámica, con el objetivo de obtener el módulo de cizalla transversal G .

Para llevar a cabo el objeto principal del presente trabajo se han realizado pruebas en distintos materiales, los cuales se describen posteriormente.

2. Objetivos

El objeto del presente trabajo es el diseño y construcción de un instrumento que permita estudiar y caracterizar el comportamiento de materiales viscoelásticos, a partir de un análisis mecánico dinámico. Para ello se busca obtener una estimación del módulo de cizalla (G) para distintos materiales.

El diseño del instrumento utiliza el principio de estímulo-respuesta, es decir, se aplica una fuerza oscilatoria a la muestra y se mide el desplazamiento resultante. Es posible determinar las propiedades de deformación del material de estudio. Para ello se tiene en cuenta la relación que existe entre el esfuerzo torsor y el módulo buscado.

Los materiales viscoelásticos combinan características de los sólidos elásticos y de los fluidos newtonianos. Para expresar el módulo de cizalla G se usan variables complejas:

$$G = G' + jG'' = |G|\cos\varphi + |G|j\sin\varphi$$

Dónde G' es la parte real conocida como storage moduli (módulo de almacenamiento), representa la energía almacenada, es decir la parte elástica del material.

G'' es la parte imaginaria conocida como loss moduli (módulo de pérdidas), y representa la energía disipada como calor, es decir la parte viscosa del material.

3. Definición y montaje de la instrumentación

3.1. Características del dispositivo

Toda la instrumentación utilizada va montada sobre una plataforma de madera que sirve de base y apoyo a todos los componentes.

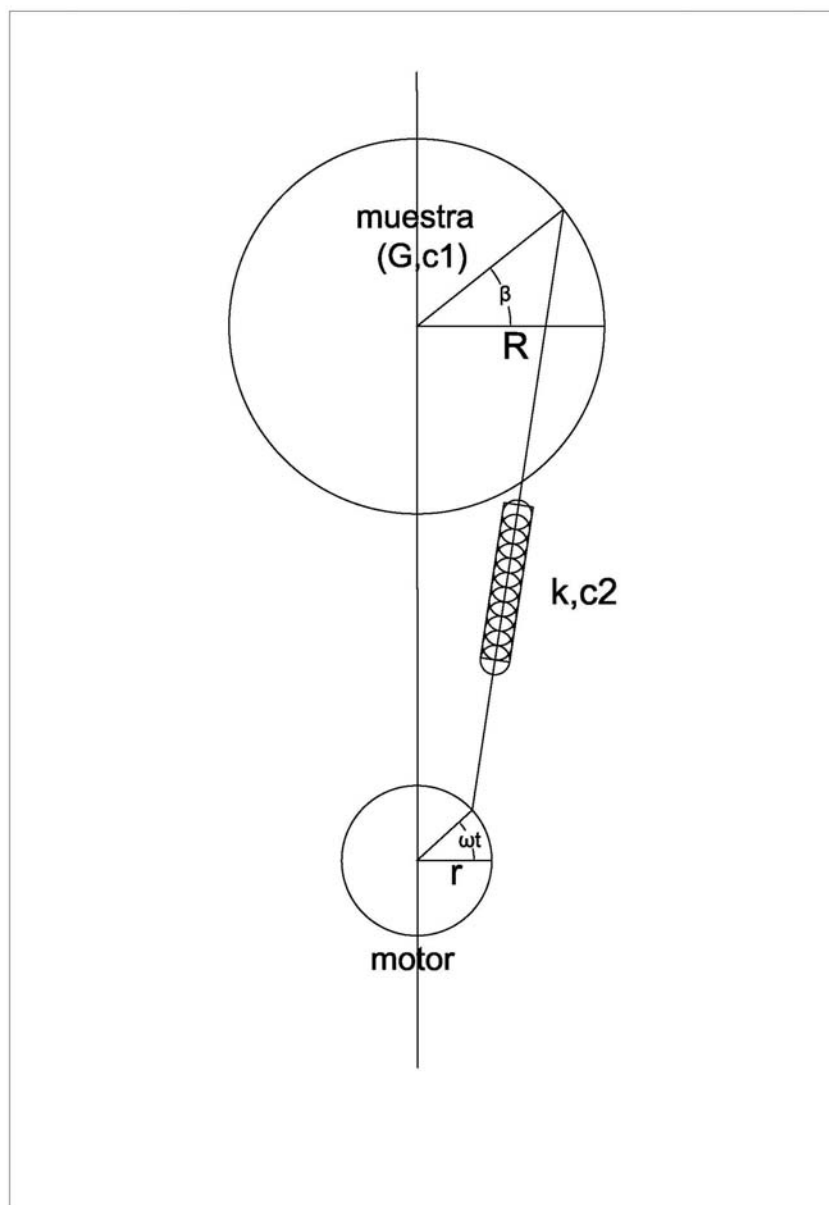
Sobre la base se disponen: un motor (9 V), un potenciómetro (9-19 V), una biela, una plataforma giratoria de madera (diámetro 20 cm) para disponer la

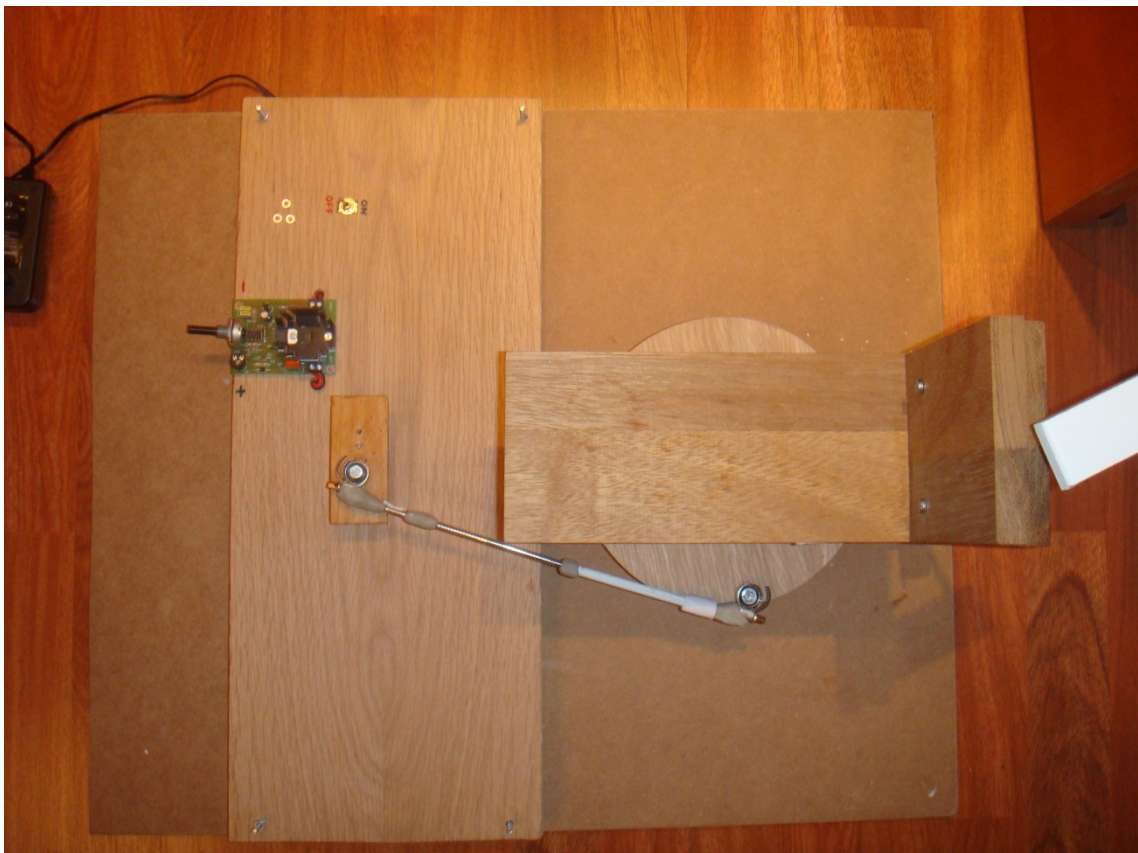
muestra a analizar y un utensilio de sujeción para la parte superior de la muestra.

Con el potenciómetro se consigue regular la velocidad de giro del motor. Variando la distancia de la manivela es posible controlar la amplitud del movimiento. El movimiento del motor se transmite a una plataforma circular giratoria dónde va ubicada la muestra, unidas a través de un resorte que permite obtener un movimiento oscilatorio.

Se han realizado ensayos con resortes diferentes ($k_1 = 150.82$ y $k_2 = 440.5 \text{ N/m}$) y a diferentes velocidades de giro del motor.

El esquema del dispositivo es el que se muestra a continuación:





La obtención de datos se obtiene empleando dos acelerómetros. El primero de ellos se ubica continuo al motor y anterior al resorte, para así registrar la señal

de entrada del sistema. El acelerómetro restante, que registrará la señal de salida, se coloca junto a la plataforma circular de la muestra posteriormente al resorte.

3.2. Muestras

Los ensayos se han realizado sobre “gel balístico”. La gelatina balística es una solución de gelatina y glicerina en agua, su densidad y viscosidad se asemeja mucho a la del tejido muscular.

La composición de las muestras usadas es la que sigue:

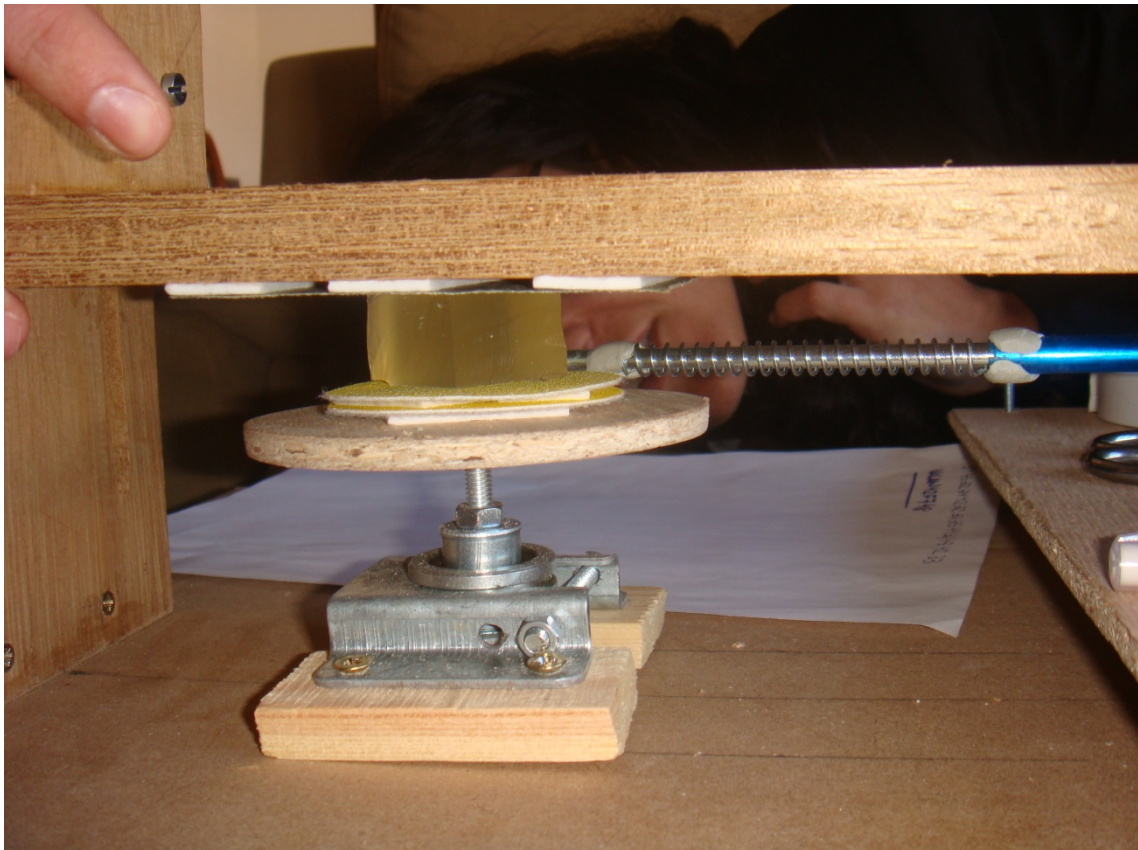
Gel balístico

250 ml agua

40 g gelatina

2.5 ml glicerina

Densidad 1060 Kg/m³



4. Desarrollo del modelo teórico

Según el esquema anterior, las fuerzas que actúan en el sistema son:

- Fuerza elástica del resorte: $F_e = kL$

- Fuerzas de inercia por el movimiento de rotación: $F_I = I \ddot{\beta}$
- Amortiguamiento del resorte: $F_{s2} = c_2 \frac{dL}{dt}$
- Amortiguamiento espécimen: $F_{s1} = c_1 \dot{\beta}$
- Esfuerzo torsor: $F_t = \frac{\beta J}{h} G$

Aplicando equilibrio de fuerzas obtenemos la ecuación que rige el sistema:

$$\sum F_i = 0$$

$$I \ddot{\beta} + \frac{GJ}{h} \beta + k(R\beta - r \sin(\omega t)) + c_1 \dot{\beta} + c_2 (R\dot{\beta} - r\omega \cos(\omega t)) = 0$$

$$I \ddot{\beta} + (c_1 + c_2 R) \dot{\beta} + \left(\frac{GJ}{h} + kR \right) \beta - (c_2 r \omega \cos(\omega t) + k r \sin(\omega t)) = 0$$

Dónde cada uno de los parámetros son:

- Momento polar muestra: $J = \frac{\pi D^4}{32}$
- Momento de inercia (plataforma giratoria + muestra): $I = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{D}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 R^2 \right)$

La inercia del espécimen se considera sólo la mitad, ya que el esfuerzo torsor varía linealmente desde la parte empotrada hasta el extremo dónde se aplica el par, por lo que sólo girará la mitad del espécimen.

- Elongación resorte: $L = R\beta + r(R\beta - r \sin(\omega t))$
- ω velocidad de giro del motor
- h altura de la muestra

La solución de la ecuación homogénea:

$$I \ddot{\beta} + (c_1 + R c_2) \dot{\beta} + \left(\frac{GJ}{h} + Rk \right) \beta = 0$$

$$\beta_h(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

Con:

$$I \lambda^2 + (c_1 + c_2 R) \lambda + \left(\frac{GJ}{h} - kR \right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_1 + c_2 R}{2I} \pm \frac{\sqrt{(c_1 + c_2 R)^2 - 4I \left(\frac{GJ}{h} - kR \right)}}{2I}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_1 + c_2 R}{2I} \pm \sqrt{\frac{(c_1 + c_2 R)^2}{4I^2} - \frac{\left(\frac{GJ}{h} - kR\right)}{I}}$$

Que para el caso de un sistema subamortiguado es:

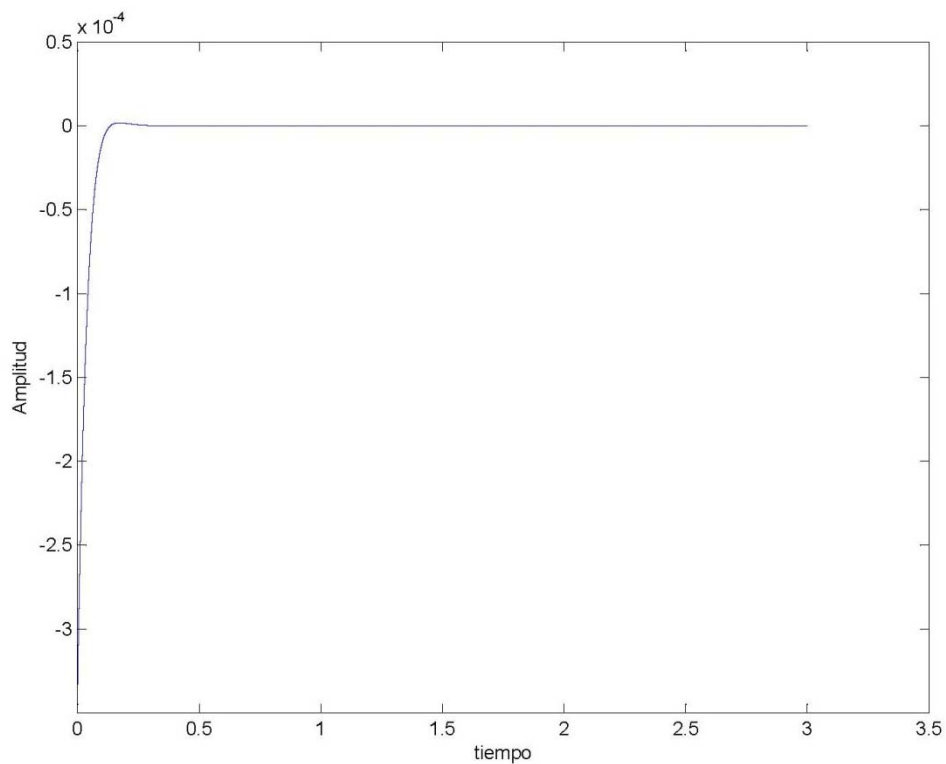
$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_1 + c_2 R}{2I} \pm i \sqrt{\frac{\left(\frac{GJ}{h} - kR\right)}{I} - \frac{(c_1 + c_2 R)^2}{4I^2}}$$

$$\beta_h(t) = e^{-\left(\frac{c_1 + c_2 R}{2I}\right)t} \left(A \cos \left(\sqrt{\frac{\left(\frac{GJ}{h} - kR\right)}{I} - \frac{(c_1 + c_2 R)^2}{4I^2}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{\left(\frac{GJ}{h} - kR\right)}{I} - \frac{(c_1 + c_2 R)^2}{4I^2}} t \right) \right)$$

$$\beta_h(t) = e^{-\left(\frac{c_1 + c_2 R}{2I}\right)t} (A \cos(\bar{\omega}t) + B \sin(\bar{\omega}t))$$

Con

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\left(\frac{GJ}{h} - kR\right)}{I} - \frac{(c_1 + c_2 R)^2}{4I^2}}$$



Cómo era de esperar, debido al amortiguamiento, la solución tiende a cero.

Se trata de encontrar ahora una solución particular para la ecuación:

$$I\ddot{\beta} + (c_1 + c_2 R)\dot{\beta} + \left(\frac{GJ}{h} + kR\right)\beta = (c_2 r \omega \cos(\omega t) + k r \sin(\omega t))$$

Se busca una solución compleja del tipo:

$$\beta_p(t) = D e^{i\omega t}$$

Imponiendo que cumpla la ecuación del sistema se obtiene el valor de la constante D:

$$\left(-ID\omega^2 + c_1 D i\omega + c_2 R D i\omega + \frac{GJ}{h} D + k R D\right) e^{i\omega t} = c_2 r \omega e^{i\omega t} + k r e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$D = \frac{c_2 r \omega + i k r}{\left(-I\omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR\right) + i(c_1 \omega + c_2 R \omega)}$$

Expresado de forma binomio complejo es:

$$D = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i\varphi}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

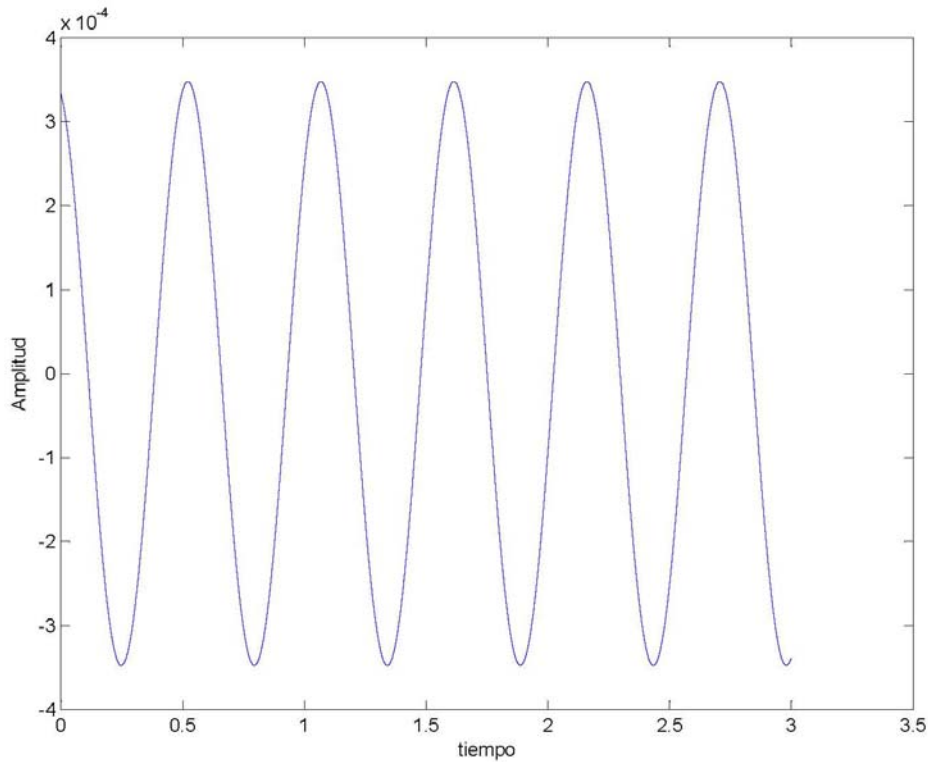
$$x = \frac{c_2 r \omega \left(-I \omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right) + kr(c_1 \omega + c_2 R \omega)}{\left(-I \omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right)^2 + (c_1 \omega + c_2 R \omega)^2}$$

$$y = \frac{kr \left(-I \omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right) - c_2 r \omega (c_1 \omega + c_2 R \omega)}{\left(-I \omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right)^2 + (c_1 \omega + c_2 R \omega)^2}$$

La solución particular es:

$$\beta_p(t) = RE \left(\sqrt{x^2 + y^2} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right) = RE \sqrt{x^2 + y^2} e^{i(\omega t + \varphi)} = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Se tiene una onda de amplitud $\sqrt{x^2 + y^2}$ y desfase $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$



Por tanto, la solución general del problema es:

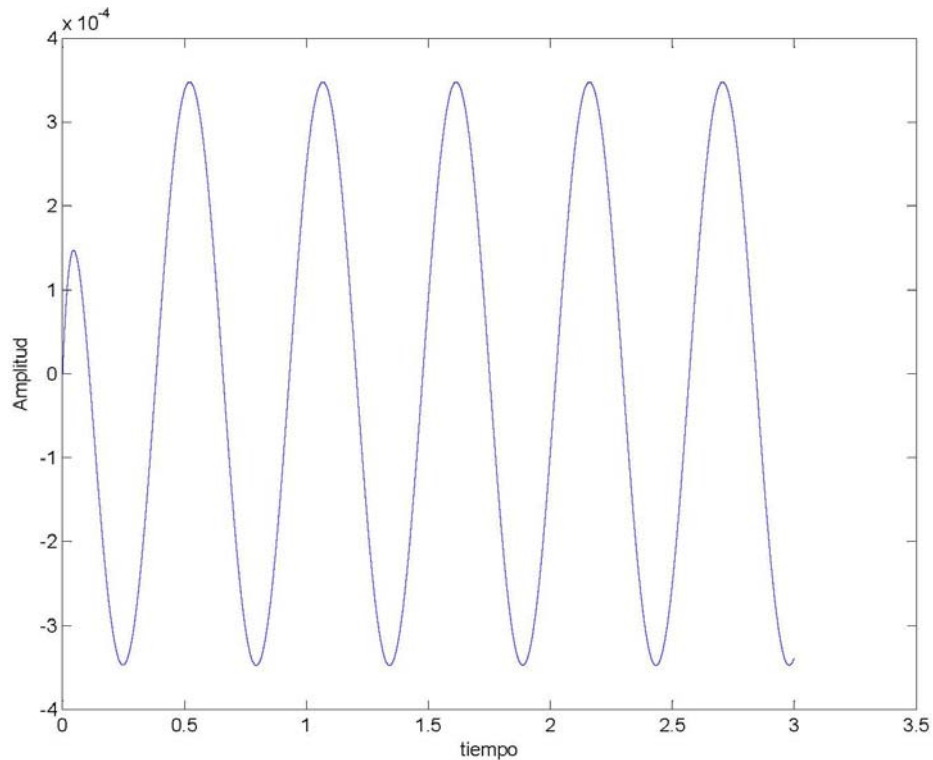
$$\beta(t) = \beta_h(t) + \beta_p(t)$$

$$\beta(t) = e^{-\left(\frac{c_1 + c_2 R}{2I}\right)t} (A \cos(\bar{\omega} t) + B \sin(\bar{\omega} t)) + \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Dónde, imponiendo las condiciones de iniciales del problema (velocidad y desplazamiento iniciales nulas) obtenemos el valor de las constantes:

$$A = -\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\varphi)$$

$$B = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sin(\varphi)}{\frac{c_1 + c_2 R}{2I}}$$

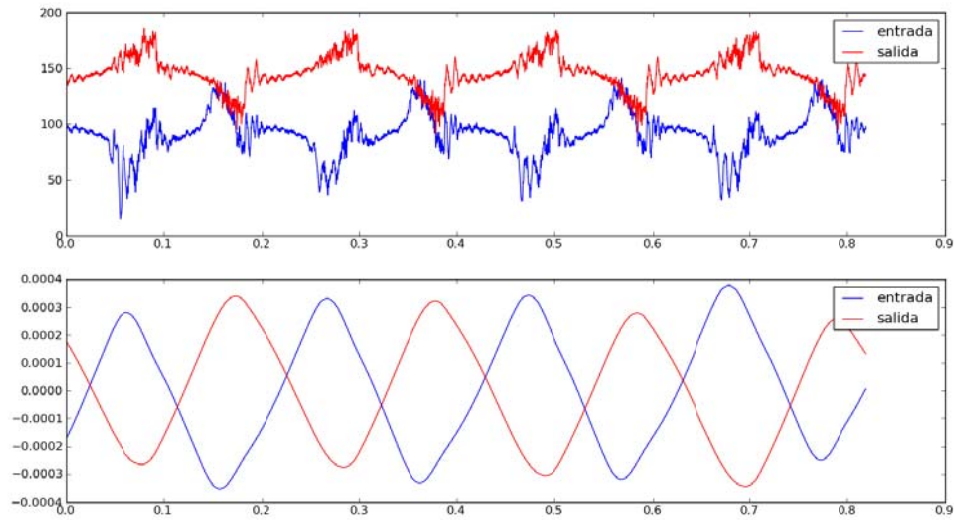


5. Resultados experimentales

Se han realizado un total de 9 ensayos para distintos valores de velocidad de giro del motor, diferentes resortes y para dos especímenes. Los resultados obtenidos en cada uno de ellos se recogen como anexo al presente documento.

Tras procesar los datos obtenidos en los ensayos, se han obtenido los parámetros que caracterizan el movimiento. Todos los algoritmos utilizados para filtrar las señales y procesar los datos se recogen en el anejo de cálculos del presente documento.

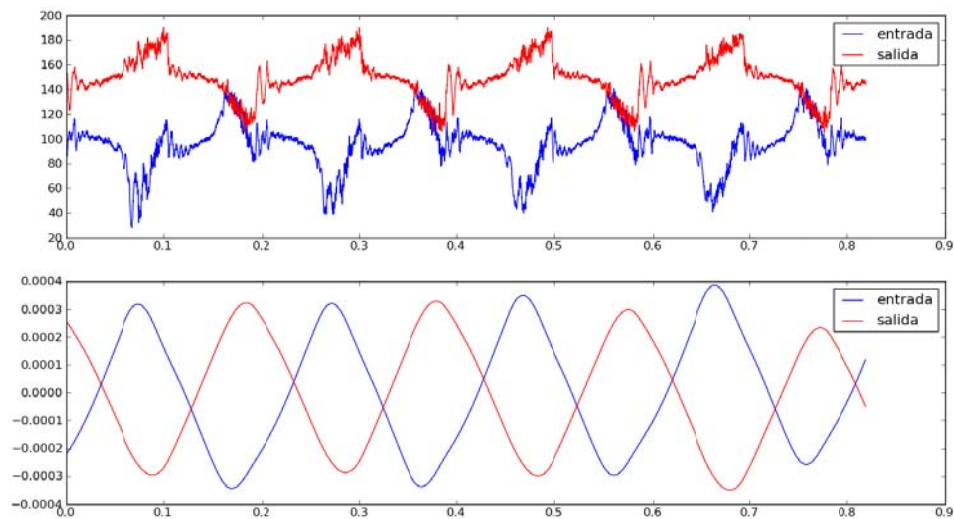
Para cada ensayo el valor del desfase, la relación de amplitudes y la frecuencia del movimiento se muestran a continuación.

1) Resorte 1 (K=150.82 N/m), velocidad motor máxima, sistema en vacío

$$\frac{U_s}{U_0} = 0.98$$

$$\varphi = 3.45 \text{ rad}$$

$$f = 4.87 \text{ Hz}$$

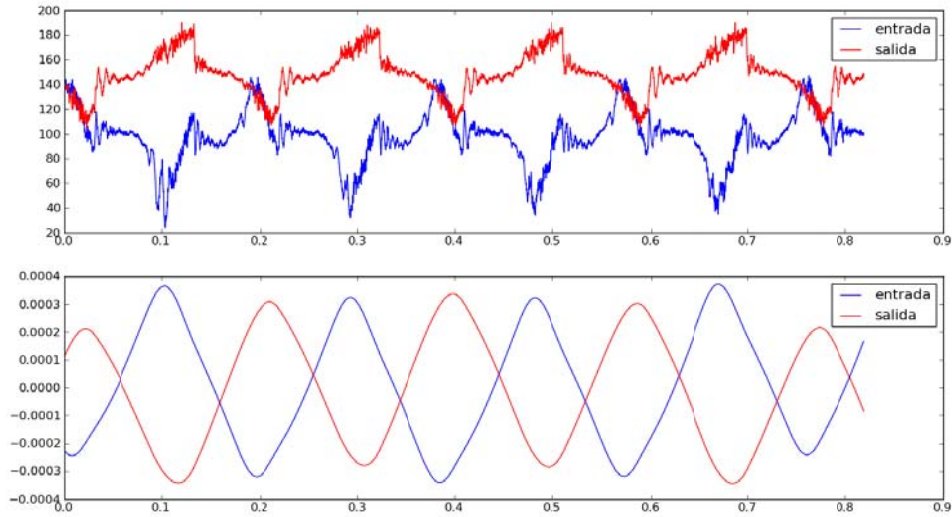
2) Resorte 1 (K=150.82 N/m), velocidad motor máxima, muestra 1

$$\frac{U_s}{U_0} = 0.98$$

$$\varphi = 2.70 \text{ rad}$$

$$f = 5.11 \text{ Hz}$$

3) Resorte 1 (K=150.82 N/m), velocidad motor máxima, muestra 2

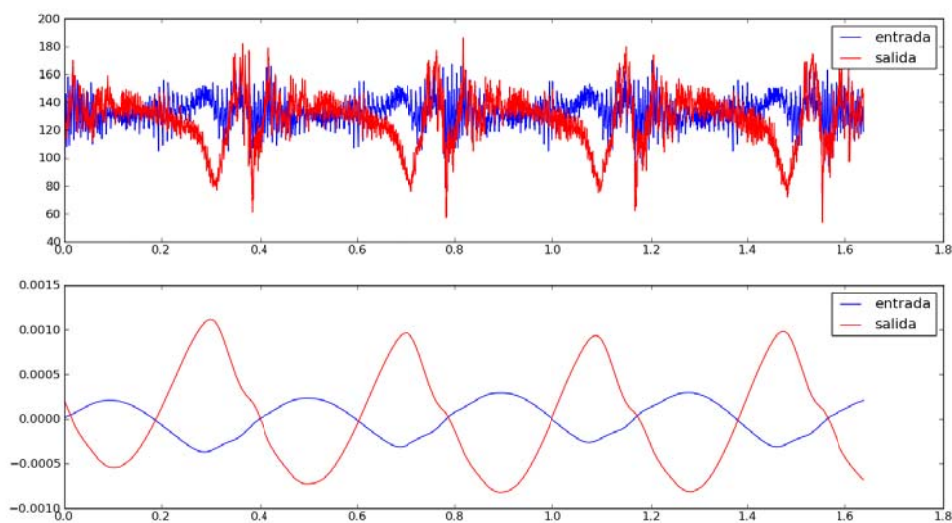


$$\frac{U_s}{U_0} = 0.998$$

$$\varphi = 2.78 \text{ rad}$$

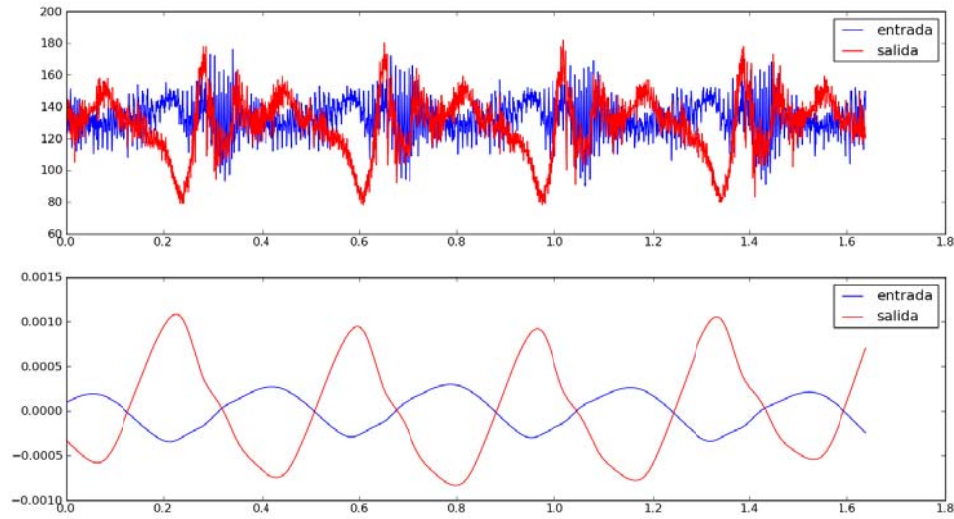
$$f = 5.25 \text{ Hz}$$

4) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor mínima, sistema en vacío



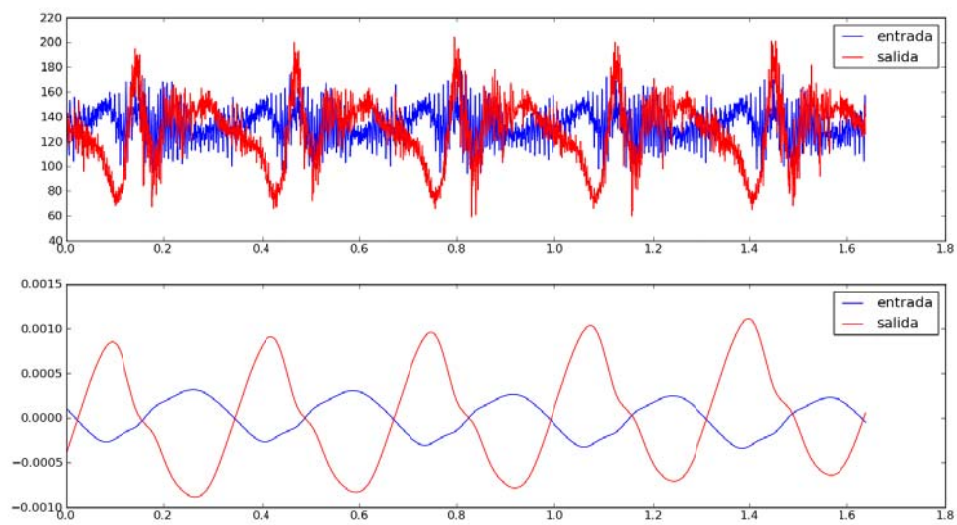
$$\frac{U_s}{U_0} = 2.89$$
$$\varphi = 2.73 \text{ rad}$$
$$f = 2.62 \text{ Hz}$$

5) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor mínima, muestra 1



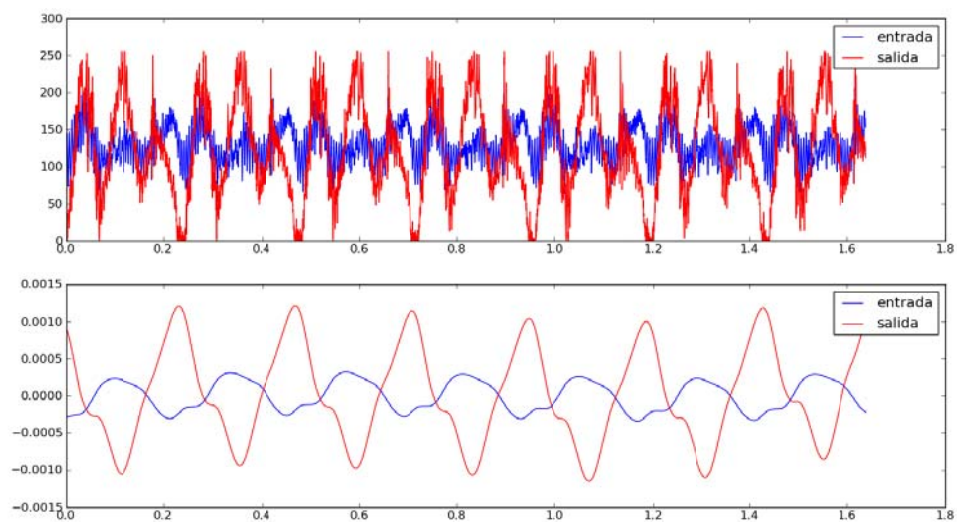
$$\frac{U_s}{U_0} = 2.90$$
$$\varphi = 3.06 \text{ rad}$$
$$f = 2.69 \text{ Hz}$$

6) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor mínima, muestra 2

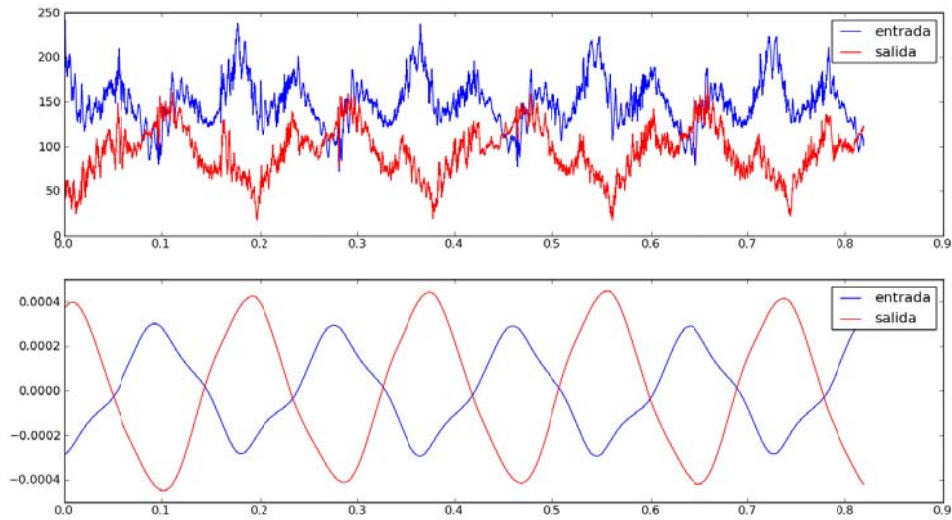


$$\frac{U_s}{U_0} = 2.90$$
$$\varphi = 2.44 \text{ rad}$$
$$f = 2.69 \text{ Hz}$$

7) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor media, muestra 1



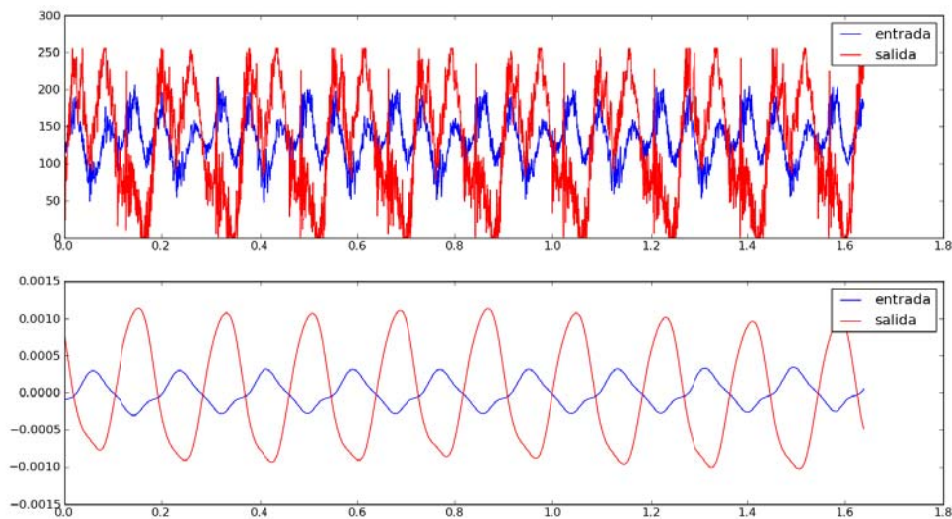
$$\frac{U_s}{U_0} = 3.22$$
$$\varphi = 3.29 \text{ rad}$$
$$f = 4.18 \text{ Hz}$$

8) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor máxima, sistema en vacío

$$\frac{U_s}{U_0} = 1.62$$

$$\varphi = 2.94 \text{ rad}$$

$$f = 5.51 \text{ Hz}$$

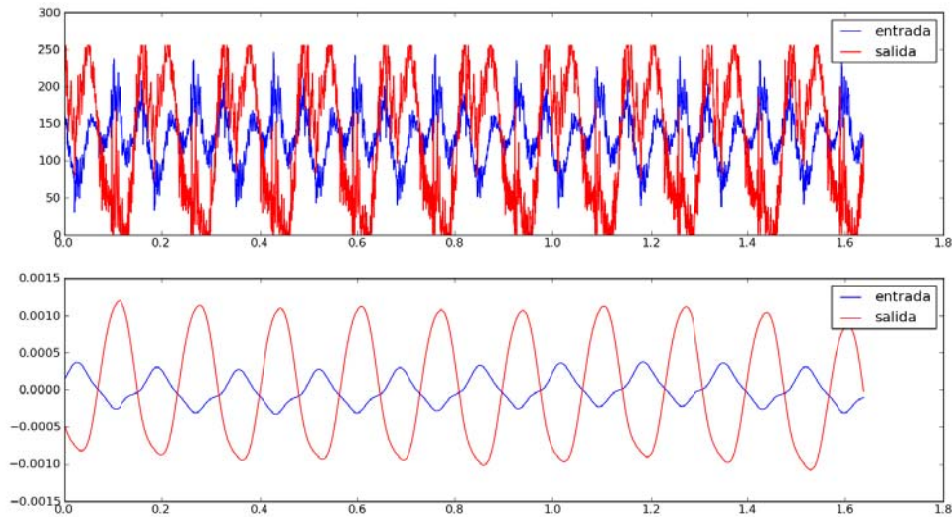
9) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor máxima, muestra 1

$$\frac{U_s}{U_0} = 3.98$$

$$\varphi = 2.76 \text{ rad}$$

$$f = 5.61 \text{ Hz}$$

10) Resorte 2 (K=440.5 N/m), velocidad motor máxima, muestra 2



$$\frac{U_s}{U_0} = 4.04$$

$$\varphi = 3.22 \text{ rad}$$

$$f = 6.04 \text{ Hz}$$

6. Validación del modelo teórico

La obtención de los valores de los parámetros del sistema se basa en la obtención de la función de transferencia del modelo teórico y de los resultados experimentales, y del desfase del movimiento.

Las señales que tendremos en cuenta son la proyección del movimiento circular en el eje vertical.

Cómo se ha puesto de manifiesto anteriormente, la solución particular tiende a cero cuando el movimiento llega a estabilizarse, por lo que para el siguiente análisis se tendrá solamente en cuenta la solución particular y se despreciará la homogénea.

Para el modelo teórico la relación entre la amplitud de las señales de entrada y salida y el desfase son:

$$U_s(t) = R\beta(t) = R\sqrt{x^2 + y^2}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$U_s(t) = r\sin(\omega t)$$

$$U_0 = r$$

$$U_s = R\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$H(t) = \frac{U_s}{U_0} = \frac{R\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$$

De los datos obtenidos en el laboratorio se puede obtener la función de transferencia y el desfase reales.

Imponiendo la igualdad entre el modelo teórico y los obtenidos en el ensayo se llega a un sistema no lineal de ecuaciones, en el que las incógnitas son el módulo G del espécimen analizado, la rigidez k y los amortiguamientos c_1 y c_2 del sistema.

Del modelo teórico conocemos la expresión de la amplitud del movimiento, que expresado en función del desfase es:

$$\frac{U_s}{U_0} \cos(\varphi) = \frac{\left[c_2 \omega \left(-I\omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right) + k(c_1 \omega + c_2 R \omega) \right] R}{\left(-I\omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right)^2 + (c_1 \omega + c_2 R \omega)^2}$$

$$\frac{U_s}{U_0} \sin(\varphi) = \frac{\left[k \left(-I\omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right) - c_2 \omega (c_1 \omega + c_2 R \omega) \right] R}{\left(-I\omega^2 + \frac{GJ}{h} + kR \right)^2 + (c_1 \omega + c_2 R \omega)^2}$$

Para cada uno de los ensayos realizados se han realizado dos medidas: una en vacío y otra con el espécimen, con el objetivo de obtener todas las medidas necesarias para poder calibrar el sistema completo.

Para la resolución del sistema se ha empleado el método de Newton-Rapson, así como otros métodos numéricos, sin llegar a ningún resultado convergente.

Los resultados obtenidos para cada uno de los ensayos han sido:

Resorte	Muestra	f	$\frac{U_s}{U_0}$	φ	C_1	C_2	K	G
1	vacío	4.87	0.98	3.45				
1	1	5.11	0.98	5.11				
1	2	5.25	0.998	2.78				
2	vacío	2.62	2.89	2.73				
2	1	2.69	2.90	3.06				
2	1	4.18	3.22	3.29				
2	1	5.61	3.98	2.76				
2	vacío	5.51	1.62	2.94				

2	2	2.69	2.90	2.44				
2	2	6.04	4.04	3.22				

7. Conclusiones

El sistema no lineal que se ha obtenido es demasiado complejo, y los métodos numéricos empleados no dan ningún resultado convergente.

Queda abierta una nueva problemática que es la resolución del sistema.

Anejo: Cálculos

Código procesamiento señales en el lenguaje Python

```

from scipy import *
from readcol import*
from pylab import *
from matplotlib import *
from numpy import *
from scipy.fftpack import *
from writecol import *
from numpy.random import *

def regresion(v1,v2):
    numelem=len(v1)
    xy=sum(v1*v2)
    sy=sum(v2)
    sx=sum(v1)
    x2=sum(v1*v1)
    pend=(numelem*xy-sy*sx)/(numelem*x2-sx**2)
    abcis=(sy-pend*sx)/numelem
    regresion=pend*v1+abcis
    return regresion

def regrecuad(c1,c2):
    numelem=len(c1)
    sx=sum(c1)
    sy=sum(c2)
    x2=sum(c1**2)
    x3=sum(c1**3)
    x4=sum(c1**4)
    xy=sum(c2*c1)
    x2y=sum(c2*c1**2)
    Xint=array([[numelem,sx,x2],[sx,x2,x3],[x2,x3,x4]])
    Bint=array([sy,xy,x2y])
    Const=solve(Xint,Bint)
    a=Const[0]
    b=Const[1]
    c=Const[2]
    regrecuad=a+b*c1+c*c1**2
    return regrecuad

def espectro(v1,v2):
    trans=fft(v2)
    dt=v1[2]-v1[1]
    numelem=len(v1)
    c=trans/numelem
    df=1/(numelem*dt)
    S=abs(c**2)/df
    f=zeros(numelem)
    i=0
    while i<=numelem-1:
        f[i]=i*df
        i=i+1
    return f,S

def integral(v1,v2):
    h=v1[2]-v1[1]
    area=v2*h
    integral=cumsum(area)
    return integral

```

```

def elimfrec(v1,a,b):
    numelem=len(v1)
    v2=zeros(numelem)
    i=a
    while i<=b:
        v2[i]=v1[i]
        v2[numelem-i]=v1[numelem-i]
        i=i+1
    senfil=ifft(v2*numelem)
    return senfil

def elimfrec0(v1):
    numelem=len(v1)
    v1[0]=0
    senfil=ifft(v1*numelem)
    return senfil

def periodo(v1):
    n=len(v1)
    extri=zeros(n)
    i=0
    k=0
    while i<=n-1:
        if v1[i]==0.:
            extri[k]=i
            k=k+1
        i=i+1
    extri2=zeros(n)
    extri2[0]=extri[0]
    i=0
    k=1
    while i<=n-2:
        if extri[i]+1!=extri[i+1]:
            extri2[k]=extri[i]
            k=k+1
        i=i+1
    minextri2=argmin(extri2[1:])
    extri3=zeros(minextri2)
    i=0
    while i<=minextri2-1:
        extri3[i]=extri2[i+1]-extri2[i]
        i=i+1
    periodo=sum(extri3[1:minextri2-1])/len(extri3[1:minextri2-1])
    return periodo

def posiciones(v1):
    n=len(v1)
    extri=zeros(n)
    i=0
    k=0
    while i<=n-1:
        if v1[i]==0.:
            extri[k]=i
            k=k+1
        i=i+1
    extri2=zeros(n)
    extri2[0]=extri[0]
    i=0
    k=1
    while i<=n-2:

```



```

        if extri[i]+1!=extri[i+1]:
            extri2[k]=extri[i]
            k=k+1
        i=i+1
    minextri2=argmin(extri2[1:])
    extri3=zeros(minextri2+1)
    i=0
    while i<=minextri2:
        extri3[i]=extri2[i]
        i=i+1
    return extri3

x1=readcol('/home/ruben/Escritorio/dat/1_1_03_gel2.txt',skipline=4)
n=8192
xi=zeros(n)
i=0
while i<=n-1:
    xi[i]=x1[i]
    i=i+1
t=zeros(n)
i=0
inct=0.0001
while i<=n-1:
    t[i]=i*inct
    i=i+1

x2=readcol('/home/ruben/Escritorio/dat/1_2_03_gel2.txt',skipline=4)
xf=zeros(n)
i=0
while i<=n-1:
    xf[i]=x2[i]
    i=i+1

subplot(2,1,1)
plot(t,xi,"b-",label='entrada')
plot(t,xf,"r-",label='salida')
pylab.legend()

xi=(xi-128)*0.015625
xf=(xf-128)*0.015625

xil=integral(t,xi)
regil=regresion(t,xil)
xil=xil-regil

xf1=integral(t,xf)
regf1=regresion(t,xf1)
xf1=xf1-regf1

#plot(t,xil)
#plot(t,xf1)
#show()

xi2=integral(t,xil)
regi2=regrecuad(t,xi2)
xi2=xi2-regi2

xf2=integral(t,xf1)
regf2=regrecuad(t,xf2)
xf2=xf2-regf2

```

```

subplot(2,1,2)
plot(t,xi2,"b-",label='entrada')
plot(t,xf2,"r-",label='salida')
pylab.legend()
show()

fi,Si=espectro(t,xi2)
ff,Sf=espectro(t,xf2)

#plot(fi[1:100],Si[1:100])
#plot(ff[1:100],Sf[1:100])
#show()

zi=hilbert(xi2)
zf=hilbert(xf2)

#subplot(2,1,2)
#plot(t,zi)
#plot(t,zf)
#show()

fasei=angle(zi)
fasef=angle(zf)

#subplot(2,1,1)
#plot(t,fasei)
#plot(t,fasef)
#show()

desfase=abs(fasei-fasef)

#subplot(2,1,2)
#plot(t,desfase)
#show()

Ai=abs(Si[1:100]).max()
Af=abs(Sf[1:100]).max()
#print Ai
#print Af
print sqrt(Af/Ai)

periodoi=periodo(fasei)
periodof=periodo(fasef)
periodoi=periodoi*inct
periodof=periodof*inct
#print periodoi
#print periodof
T=(periodoi+periodof)/2

freci=1/periodoi
frecf=1/periodof
print (freci+frecf)/2

posi=posiciones(fasei)
posf=posiciones(fasef)
print posi
print posf
desf=abs(sum(posi[1:5]-posf[1:5])/len(posi[1:5]-posf[1:5]))
desf=desf*2*pi*inct/T
print desf

```