Problema Inverso

Evaluación no destructiva y Calidad de Estructuras

Guillermo Rus

Universidad de Granada

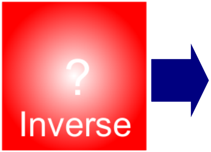
2023

Universidad de Granada

Laboratorio Evaluación No Destructiva

Índice

Definición del problema



Definición del problema

Variables:

Sistema Inferir qué sucede en su interior conocidas observaciones en su exterior. Su comportamiento se idealiza matemáticamente con una serie de ecuaciones (operadores $o(\ )$).

Modelo m Conjunto de parámetros físicos presentes en las ecuaciones.

Definición del problema

Variables:

Sistema Inferir qué sucede en su interior conocidas observaciones en su exterior. Su comportamiento se idealiza matemáticamente con una serie de ecuaciones (operadores $o(\ )$).

Modelo m Conjunto de parámetros físicos presentes en las ecuaciones.

incógnita m^u Subconjunto de parámetros desconocidos: son nuestra incógnita de trabajo.

conocido m^k Los que no son incógnita y son fijos.

diseño m^d Los que elegimos con nuestro diseño, $m = m^u \cup m^k \cup m^d$.

Definición del problema

Variables:

Respuesta o Observaciones predichas por el modelo $o = o(m)$.

Obs. o^x Observaciones experimentales.

Objetivo:

> Determinar causas desconocidas basándonos en la observación de sus efectos
>
> Prof. Oleg Mikailivitch Alifanov

Definición del problema

Planteamiento:

Datos: o^x

Incógnita: m^u

Si el modelo es perfecto (no hay error en la idealización), ¿se puede plantear lo siguiente?

$$o^x = o \overset{?}{\Longleftrightarrow} m^{u,\text{real}} = m^u \tag{1}$$

Interpretación:

- El modelo que hace coincidir las observaciones con las reales, es el real.
- Objetivo: encontrar el modelo (hipótesis) más simple que sea consistente con las observaciones (cuchilla de Occam).

Definición del problema

En general, sólo se puede asegurar la implicación hacia la izquierda (problema directo, "calcular la respuesta dado un modelo"):

$$o^x = o \Longleftarrow m^{u,\text{real}} = m^u \tag{2}$$

Contraejemplo a que se cumpla hacia la derecha:

Unicidad: varios modelos m^u pueden dar la misma respuesta o.

Otros problemas:

Estabilidad: pequeñas variaciones en m^u originan grandes variaciones en o.

Existencia: ante ruido de medición o errores de modelo, puede no existir ningún m^u tal que $o^x = o$.

Definición del problema

Dichas características definen que el Problema Inverso está mal condicionado (según Hadamard):

- **Unicidad:** varios modelos m^u pueden dar la misma respuesta o.
- **Estabilidad:** pequeñas variaciones en m^u originan grandes variaciones en o.
- **Existencia:** ante ruido de medición o errores de modelo, puede no existir ningún m^u tal que $o^x = o$.

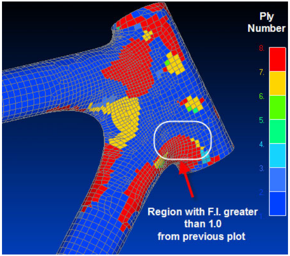
Problema inverso y Estimación de parámetros

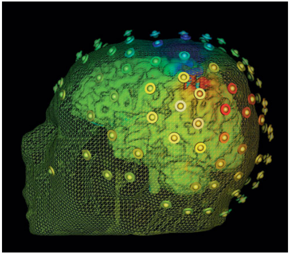
$$o^x = o \Longleftarrow m^{u,\mathrm{real}} = m^u$$

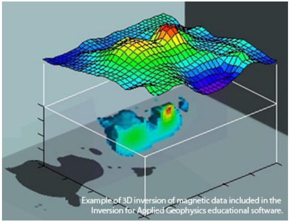
1. **Problema inverso.** En general, la incógnita m puede ser un campo continuo (distribución de daño, de propiedades elásticas, etc).
   El problema es en general indeterminado.
   Es necesario reducir el espacio de soluciones posibles de m (discretizando, parametrizando, etc.), con cuya decisión se modifica la solución de m.
2. **Estimación de parámetros.** La incógnita se define mediante unos pocos parámetros $m = \{m_i\}$.

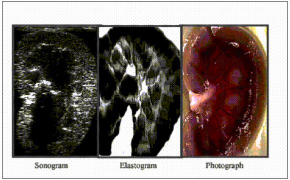
Problema inverso y Estimación de parámetros

Ejemplos de incógnitas $m(y)$ y observaciones $o(x)$:









Problema inverso lineal y no lineal

Lineal Si el operador $o = o(m)$ es lineal que describe la relación explícita entre observaciones o y modelo m, el PI es lineal. Ejemplo: ecuación de Fredholm de primera clase:

$$o^x(x) = \int_a^b g(x, y) m(y) dy \tag{3}$$

Ejemplos:

- Viscoelasticidad $\sigma(t) = \int_0^t b(t - \tau)\varepsilon(\tau) d\tau$
- Tomografía $R(L) = \int_L f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

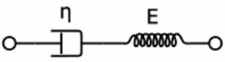
No lineal

$$o = o(m) \tag{4}$$

Ejemplo: inverse scattering transform.

Problemas inversos clásicos: $o^x(x) = \int_a^b g(x,y)m(y)dy$

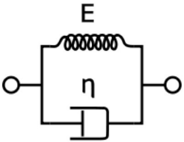
Ejemplo: viscoelasticidad $\sigma(t) = \int_0^t b(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau$:



Maxwell

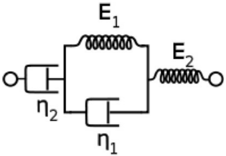
$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \frac{E^2}{\eta}\int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau$

$(\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E})$



Kelvin-Voigt

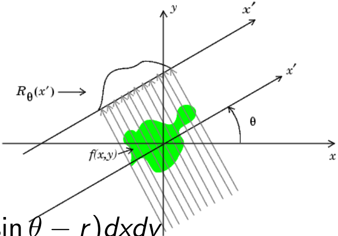
$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^t \eta\delta(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau$



Burgers

Problemas inversos clásicos: $o^x(x) = \int_a^b g(x,y)m(y)dy$

Ejemplo: transformada de Radón.
Objetivo: reconstruir
$f(x,y)$ a partir de su transformada R.



$$R(L) = \int_L f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$R(r,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - r)dxdy$$

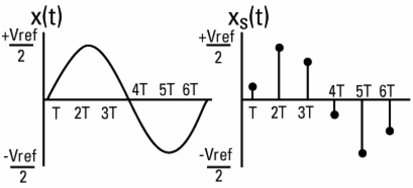
(loading...)

Problemas inversos clásicos: $o^x(x) = \int_a^b g(x,y)m(y)dy$

Sistemas de ecuaciones lineales

El sistema continuo se puede discretizar, representando tanto las observaciones $o(x)$ como el modelo $m(y)$, que en general son funciones continuas $x(t)$, mediante aproximaciones discretas representadas por un conjunto de valores escalares x_s:

$$x = \{x_s\} = \{x(t_s)\} \quad \begin{cases} m(y) \sim \{x_1, x_2, ...x_n\} \\ o^x(x) \sim \{b_1, b_2, ...b_m\} \end{cases}$$



Problemas inversos clásicos: $o^x(x) = \int_a^b g(x,y)m(y)dy$

Sistemas de ecuaciones lineales

Discretizando el problema continuo, se puede representar mediante un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +... & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +... & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{5}$$

donde $x_i = \{x_1, x_2 ... x_n\}$ son las incógnitas, a_{ij} son los coeficientes del sistema y b_j los términos independientes. Es posible reescribir el sistema usando notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix} \qquad Ax = b \tag{6}$$

Problemas inversos clásicos: $o(x) = \int_a^b g(x,y)m(y)dy$

Sistemas de ecuaciones lineales

Tipos de sistemas:

$$\begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado} & \Leftrightarrow det(A) \neq 0 & \text{1 solución} \\ \text{Indeterminado} & \Leftrightarrow det(A) = 0, m < n & \infty \text{ soluciones} \end{cases} \\ \text{Incompatible/sobredeterminado} \quad \Leftrightarrow m > n \quad \text{0 soluciones} \end{cases}$$

Relación con el mal condicionamiento del PI:

- ∞ soluciones $\Leftrightarrow$ Unicidad.
- 0 soluciones $\Leftrightarrow$ Existencia.
- condicionamiento del sistema $Ax = b \Leftrightarrow$ Estabilidad.

Regularización

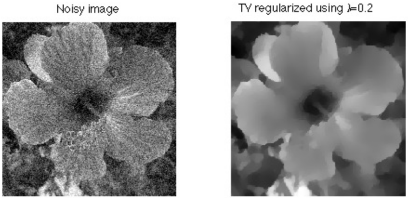
Planteamiento del problema:

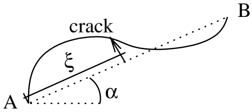
$$o^x = o \Longleftarrow m^{u,\mathrm{real}} = m^u$$

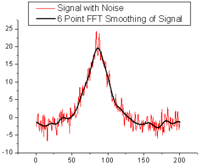
Es necesario reducir el espacio de soluciones posibles de m, con cuya decisión se modifica la solución de m.
Implica incorporar información a priori sobre el modelo.

Regularización

Es la principal estrategia contra el mal condicionamiento del PI. Consiste en establecer un compromiso entre resolución de la solución continua m y su nivel de ruido.







$m(y) \sim \{m_1, m_2, \ldots m_n\}$

Discretización

Parametrización

Suavizado

Regularización

Si el proceso es de tipo Gauss-Markov, por ejemplo, cuando el proceso evoluciona en el tiempo y queremos actualizar nuestra predicción conforme pasa el tiempo, incorporar dicha información realiza un tipo de regularización llamado filtrado.

Ejemplo: seguimiento de satélites. La incógnita es la trayectoria en función del tiempo, las observaciones son posiciones, y el proceso de Gauss-Markov viene definido por la dinámica inercial y gravitacional.

Proceso de Gauss-Markov:

Gauss: Proceso continuo en el que toda combinación lineal de variables es una variable de distribución normal.

Markov: La probabilidad continua condicionada de estados futuros sólo dependen del estado actual y no de los anteriores.

Planteamientos probabilista y determinista

Definición de probabilidad: dado un espacio de modelos $\mathbb{M}$ u observaciones $\mathbb{O}$, subconjuntos de ambos M y O, y puntos m y o, una densidad de probabilidad f genera una probabilidad P como,

$$P(M) = \int_M f(m)dm \tag{7}$$

La probabilidad de un modelo u observación se interpreta como el grado de certidumbre de que sea real ($0 =$ imposible).
Nótese que el grado de certidumbre puede variar de un individuo a otro debido a que tienen distinto conocimiento previo.

Planteamientos probabilista y determinista

$$P(M) = \int_M f(m)dm$$

Ejemplo de distribuciones:

- **Delta** $f(m) = \delta(m; m_0)$: sólo x_0 es posible.
- **Homogénea** $f(m) = c = \mu(m)$[1]: densidad no informativa.
- **Gauss** $f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} e^{-\frac{m-\mu_m}{2\sigma_m^2}}$ tiene media μ_m y desviación σ_m.

Operaciones básicas:

- **Conjunción** $f_1 \wedge f_2 = \frac{1}{\nu}\frac{f_1(x) f_2(x)}{\mu(x)}$: lógica "y"[2].
- **Disjunción** $f_1 \vee f_2 = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$: lógica "o".

[1] suponiendo que la densidad de volumen es uniforme.

[2] Axiomas de Kolmogorov

Planteamientos probabilista y determinista

$$P(M) = \int_M f(m)dm$$

Condicional $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Th. Bayes $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.

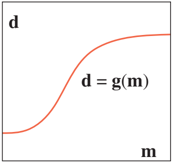
Planteamientos probabilista y determinista

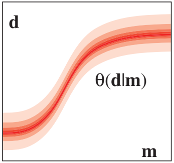
Problema directo:

$$m \mapsto o = o(m) \tag{8}$$

Si hay imperfecciones en la idealización o en las mediciones, se reemplaza la ecuación determinista por una correlación probabilista entre o y m: la probabilidad conjunta $\Theta(o, m)$.

- **Mapeable** $\Theta(o, m) = \theta(o|m)\mu(m)$: a partir de $o = o(m)$.
- **Exacto** $\Theta(o, m) = c\delta(o - o(m))$.
- **Gaussiano** $\Theta(o, m) = ce^{-\frac{1}{2}(o-Om)^t C_T^{-1}(o-Om)3}$.





[3] En caso de problema lineal discreto $o = O \cdot m$

Planteamientos probabilista y determinista

Información observada: su certidumbre se expresa mediante una densidad de probabilidad $\rho(o)$:

Gaussiano $\rho(o) = ce^{-\frac{1}{2}(o-o^x)^t C_O^{-1}(o-o^x)}$.

Información a priori sobre el modelo: su certidumbre se expresa mediante una densidad de probabilidad $\rho(m)$:

Gaussiano $\rho(m) = ce^{-\frac{1}{2}(m-m^{\text{prior}})^t C_M^{-1}(m-m^{\text{prior}})}$.

Información conjunta a priori: $\rho(o, m) = \rho(o)\rho(m)$, pues son independientes.

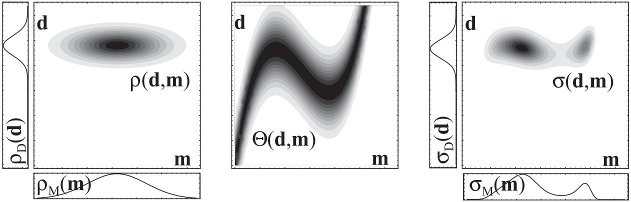
Planteamientos probabilista y determinista

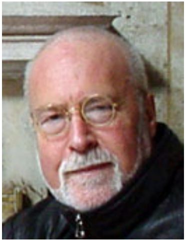
Solución del problema inverso: probabilidad a posteriori $\sigma(o,m)$ combinando información del modelo $\Theta(o,m)$ y a priori $\rho(o,m)$:

$$\sigma(o,m) = k\frac{\rho(o,m)\Theta(o,m)}{\mu(o,m)} \tag{9}$$

Solución del modelo: probabilidad marginal del modelo m:

$$\sigma(m) = \int_{\mathbb{O}} \sigma(o,m)do \tag{10}$$





Planteamientos probabilista y determinista

Solución general:

$$\sigma(m) = k \int_{\mathbb{O}} \frac{\rho(o,m)\Theta(o,m)}{\mu(o,m)} do \tag{11}$$

Si hacemos las siguientes suposiciones:

- Modelo mapeable $\Theta(o,m) = \theta(o|m)\mu(m)$
- La información a priori no está correlacionada, $\rho(o,m) = \rho(o)\rho(m)$
- La distribución homogénea $\mu(o,m) = \mu(o)\mu(m)$ es constante
- El error del modelo es despreciable, $\theta(o|m) = c\delta(o - o(m))$

$$\sigma(m) = k\rho(m) \int_{\mathbb{O}} \frac{\rho(o)\theta(o|m)}{\mu(o)} do = \frac{\rho(m)\rho(o(m))}{\int_{\mathbb{M}} \rho(m)\rho(g(m))dm} \tag{12}$$

Planteamientos probabilista y determinista

$$\sigma(m) \quad = \quad k'\rho(m)\rho(o(m)) \tag{13}$$

Si asumimos que o y m a priori tienen una distribución Gaussiana,

$$\sigma(m) \quad = \quad k' e^{-\frac{1}{2}(m-m^{\text{prior}})^t C_M^{-1}(m-m^{\text{prior}})} e^{-\frac{1}{2}(o(m)-o^x)^t C_O^{-1}(o(m)-o^x)}$$

Si además suponemos covarianzas diagonales $C_M = \sigma_M I$ y $C_O = \sigma_O I$,

$$\sigma(m) \quad = \quad k' e^{-f(m)} \tag{14}$$

$$f(m) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\frac{||m - m^{\text{prior}}||^2}{\sigma_M} + \frac{||o(m) - o^x||^2}{\sigma_O}\right] \tag{15}$$

Si suponemos que no hay información a priori sobre m, $\sigma_M \to \infty$,

$$f(m) \quad = \quad c||o(m) - o^x||^2 \tag{16}$$

Planteamientos probabilista y determinista

La solución determinista de m de máxima verosimilitud es aquella de máxima densidad de probabilidad,

$$m \quad | \quad \max_m \sigma(m) = k' e^{-f(m)} \tag{17}$$

Puesto que la exponencial es monotónica, maximizar $\sigma(m)$ es equivalente a minimizar $f(m)$,

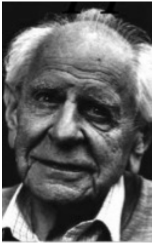
$$m \quad | \quad \min_m f(m) = c||o(m) - o^x||^2 \tag{18}$$

$f(m)$ es la distancia L2 entre observaciones predichas $o(m)$ y experimentales o^x, y se denomina función objetivo, de coste (porque hay que minimizarla), de ajuste (entre $o(m)$ y o^x) o de discrepancia.
Ejercicio: pensar relación entre problema determinista y probabilista.

Planteamientos probabilista y determinista

Paradigmas:

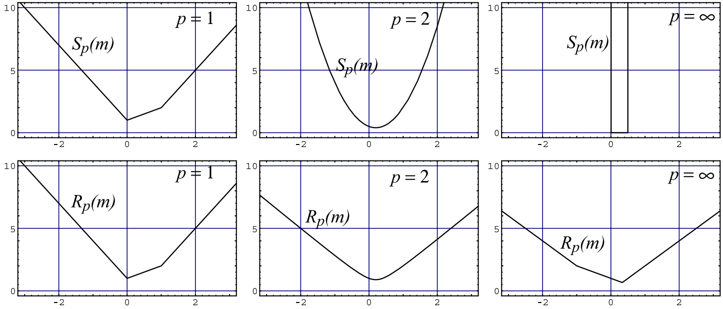
- El cálculo elemental del PI da un modelo considerado correcto.
- La teoría física (Popper) postula proceder por eliminación (eliminar modelos falsables, o imposibles).
- En el modelo probabilístico (Bayesiano), la solución del PI es un conjunto probable de modelos.



Tipos de función objetivo

1. $f(m) = ||o(m) - o^x||^2$
2. $f(m) = |o(m) - o^x|$
3. $f(m) = ||o(m) - o^x||^p$

Comparación $(S(m) = f(m),\ R(m) = (pf(m))^{\frac{1}{p}}$:



Técnica frecuentista vs. Bayesiana

Frecuentista La probabilidad tiene sentido de frecuencia de repetición de eventos, con lo que no existe la noción de conocimiento a priori sobre el modelo m.

Bayesiana Se interpreta la incertidumbre/certidumbre mediante una densidad de probabilidad, con lo que se permite conocimiento a priori del modelo m.