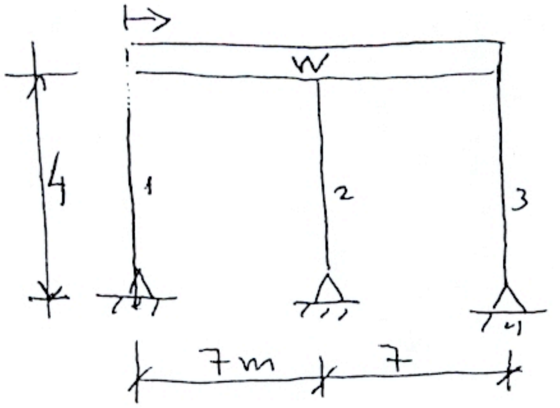
A



$W = 25000 \text{ kp}$

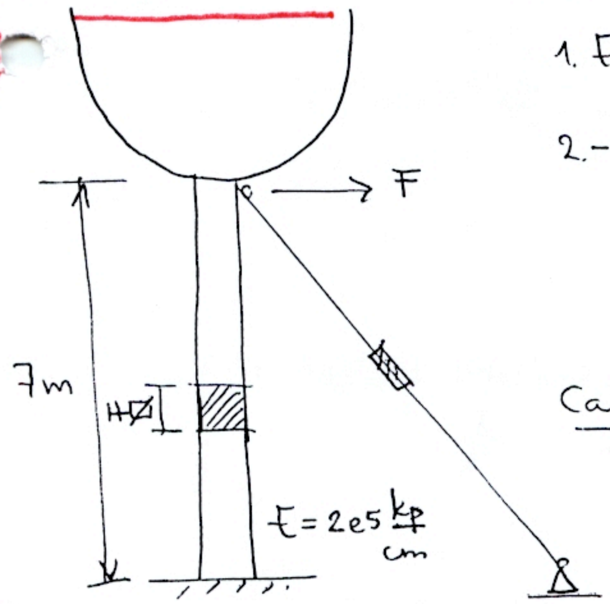
$I_1 = I_3 = 3400 \text{ cm}^4$

$I_2 = 1200 \text{ cm}^4$

$E = 2{,}1e6 \dfrac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$, $\xi = 5\%$

Obtener, ecuación del movimiento, freq natural, periodo natural, en el caso no amortiguado y amortiguado.

B



1. Ensayo estático $F = 7 \text{ t} \Rightarrow \delta = 5 \text{ cm}$

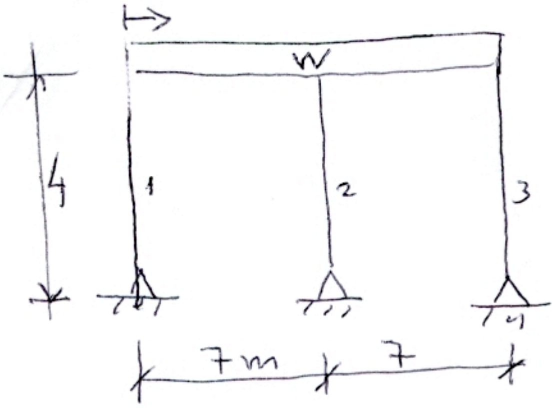
2.- " dinámico: suelto cable y en 2 s efectúa 4 ciclos y amplitud baja a 2,5 cm.

Calcular: $k, m, \xi, \omega_n, T_n, \omega_D, T_D, H$

C

Obtener la respuesta de un sistema UGL no-amortiguado sometido a una acción armónica de frecuencia igual a la natural.

P1



$W = 25000\ kp$

$I_1 = I_3 = 3400\ cm^4$

$I_2 = 1200\ cm^4$

$E = 2{,}1e6\ \frac{kp}{cm^2}$, $\xi = 5\%$

Obtener, ecuación del movimiento, freq natural, periodo natural, en el caso no amortiguado y amortiguado.

1.- Cambio de unidades $m = 25\ t \quad I_1 = I_3 = 3400e^{-8}\ m^4$

$I_2 = 1200e^{-8}\ m^4$, $E = 2{,}058e8\ \frac{kN}{m^2}$

2.- No amortiguado: $m = 25\ t \quad k = 2\frac{3EI_1}{L^3} + \frac{3EI_2}{L^3} = \frac{3\cdot 2{,}058e8}{4^3}(2\cdot 3400 + 1200)e^{-8} = 772\ \frac{kN}{m}$

Ecuación: $25\ddot{u} + 772u = p(t)$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{772}{25}} = 5{,}56\ \frac{rad}{s} = 0{,}88\ Hz$

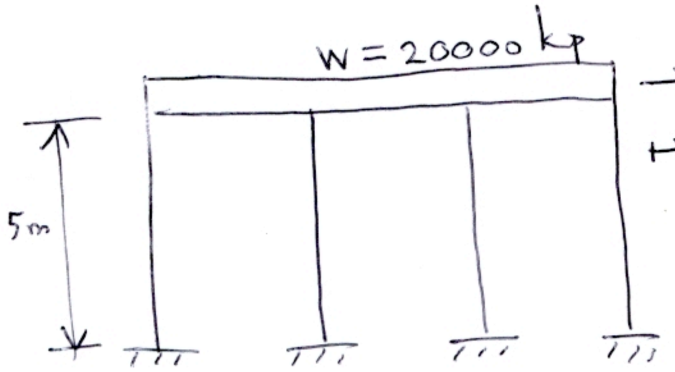
$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{0{,}88} = 1{,}13\ s$

3.- Amortiguado: $c = \xi c_{cr} = 2\xi\sqrt{km} = 2\cdot 0{,}05\sqrt{25\cdot 772} = 13{,}89\ \frac{kNs}{m}$

Ecuación: $25\ddot{u} + 13{,}89\dot{u} + 772u = p(t)$

$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 5{,}56\sqrt{1-0{,}05^2} = 5{,}55\ \frac{rad}{s} = 0{,}88\ Hz$

$T_D = \frac{1}{f_D} = 1{,}13\ s$



→ F = 500 kp (Test estático)

↦ $\Delta = 0{,}05$ cm

$\xi = 5\%$

$E = 2{,}1e6 \frac{kp}{cm^2} = 2{,}058e11 \frac{N}{m^2} = 2{,}058e8 \frac{kN}{m^2}$

Obtener: ω_n, ω_D, c, δ, nº ciclos para que la amplitud baje de 0,3 cm a 0,03 cm, Inercia de los pilares (todos iguales)

Rigidez $k = \frac{F}{\Delta} = \frac{500 \cdot 9{,}8e^{-3}}{5e^{-2} \cdot 1e^{-2}} = 9800 \frac{kN}{m}$

Masa $m = 20000 \text{ kg} = 20 \text{ t}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{9800}{20}} = 22{,}14 \frac{rad}{s} = 3{,}52 \text{ Hz}$; $T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{3{,}52} = 0{,}284 \text{ s}$

$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 22{,}14\sqrt{1-0{,}05^2} = 22{,}11 \frac{rad}{s} = 3{,}52 \text{ Hz}$; $T_D = 0{,}284 \text{ s}$

$c = 2\xi\sqrt{km} = 2\,0{,}05\sqrt{9800 \cdot 20} = 44{,}27 \frac{kNs}{m}$

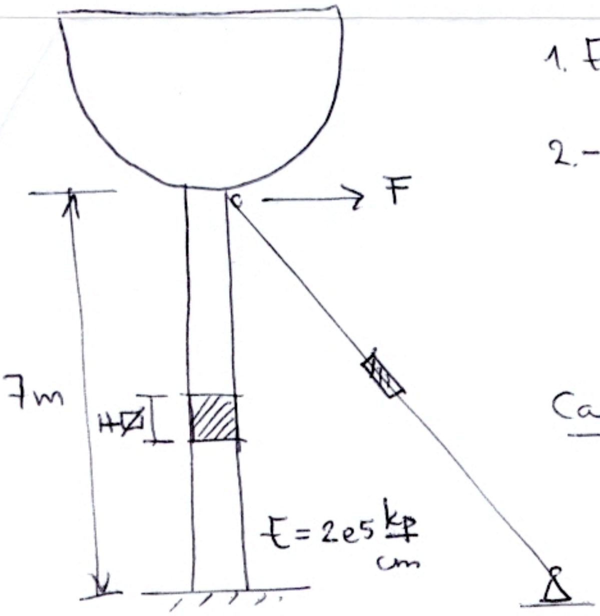
$\delta = 2\pi\xi = 2\pi\, 0{,}05 = 0{,}3142 = \ln \frac{A_t}{A_{t+T_n}}$

$\delta_j = \ln \frac{A_t}{A_{t+jT_D}} = j\delta$ $\qquad j\, 0{,}3142 = \ln \frac{0{,}3}{0{,}03} \rightarrow j = 7{,}33$ ciclos

tiempo $j T_D = 7{,}33 \cdot 0{,}284 = 2{,}08 \text{ s}$

Inercia $4\frac{12EI}{L^3} = k \rightarrow I = \frac{9800 \cdot 5^3 \cdot 1e8}{4 \cdot 12 \cdot 2{,}058e8} = 12401 \text{ cm}^4$

si



1. Ensayo estático $F = 7\,t \Rightarrow \delta = 5\,cm$

2.- " dinámico: suelto cable y en 2 s efectúa 4 ciclos y amplitud baja a 2,5 cm.

Calcular: $k, m, \xi, \omega_n, T_n, \omega_D, T_D, H$

1.- $k = \dfrac{7 \cdot 9{,}8}{0{,}05} = 1372 \dfrac{kN}{m}$

2.- $\bullet\ T_D = \dfrac{2}{4} = 0{,}5\,s \quad ; \bullet\ \omega_D = \dfrac{2\pi}{T_D} = 12{,}57 \dfrac{rad}{s} = 2\,Hz$

$$\delta_j = j\,2\pi\xi = \ln \frac{A_t}{A_{t+jT_D}} = \ln \frac{5}{2{,}5} = 0{,}6931 \ ; \ j=4 \Rightarrow \xi = \frac{0{,}6931}{8\pi}$$

$\bullet\ \xi = 2{,}75\,\%$ ✓

$\bullet\ T_n = T_D\sqrt{1-\xi^2} = 0{,}5 \quad ; \bullet\ \omega_n = \dfrac{\omega_D}{\sqrt{1-\xi^2}} = 12{,}57 \dfrac{rad}{s} = 2{,}00\,Hz$

$$k = \frac{3EI}{L^3} \longrightarrow I = \frac{kL^3}{3E} = \frac{1372 \cdot 7^3}{3 \cdot 1{,}96e7}\, 1e8 = 800333\ cm^4$$

$I = \frac{1}{12} H^4 \longrightarrow \bullet\ H = (12 \cdot 800333)^{1/4} = 55{,}7\ cm$ ✓

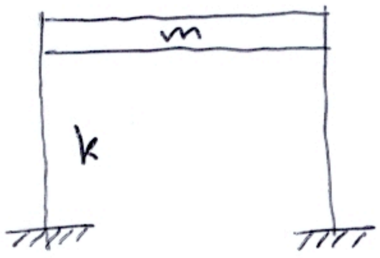
$\bullet\ m = \dfrac{k}{\omega_n^2} = \dfrac{1372}{12{,}57^2} = 8{,}683\,t$ ✓

Sí

P4

En un edificio simple de masa m y rigidez k, un test de vibraciones libres proporciona un valor para el periodo $T_n = 0{,}50\,s$. A continuación se añade una masa $m' = 250\,kg$ y un nuevo test proporciona $T_n' = 0{,}55\,s$

Obtener m y k.



1er test $\quad \dfrac{2\pi}{T_n} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \rightarrow \dfrac{k}{m} = 157{,}914$

2º test $\quad \dfrac{2\pi}{T_n'} = \sqrt{\dfrac{k}{m+m'}} \rightarrow \dfrac{k}{m+m'} = 130{,}507$

Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{m}{m+m'} = \frac{1}{1{,}21} \rightarrow \frac{1}{1+\frac{250}{m}} = \frac{1}{1{,}21} \rightarrow \frac{250}{m} = 0{,}21 \rightarrow m = 1190\,kg$$

La rigidez se obtiene de cualquiera de las ecuaciones

$$k = \omega_n^2\, m = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m = 188\,\frac{kN}{m}$$

Si

Obtener la respuesta de un sistema UGL no-amortiguado sometido a una acción armónica de frecuencia igual a la natural.

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \operatorname{sen} \omega_n t \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \; ; \; \ddot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_0}{m} \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$u(t) = At \operatorname{sen} \omega_n t + Bt \cos \omega_n t$$

$$\dot{u}(t) = A \operatorname{sen} \omega_n t + At\, \omega_n \cos \omega_n t +$$
$$+ B \cos \omega_n t - Bt\, \omega_n \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$\ddot{u}(t) = A\omega_n \cos \omega_n t + A\omega_n \cos \omega_n t - At\omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t$$
$$- B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t - Bt\omega_n^2 \cos \omega_n t$$

Sustituyendo en $\ddot{u} + \omega_n^2 u$ se obtiene:

$$2A\omega_n \cos \omega_n t - 2B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t + t \operatorname{sen} \omega_n t \left(-A\omega_n^2 + A\omega_n^2\right)$$
$$+ t \cos \omega_n t \left(-B\omega_n^2 + B\omega_n^2\right) = -2B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t + 2A\omega_n \cos \omega_n t$$

Esto ha de ser igual a $\frac{p_0}{m} \operatorname{sen} \omega_n t$, luego

$$\left.\begin{array}{l} -2B\omega_n = \frac{p_0}{m} \\ 2A\omega_n = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\frac{p_0}{2m\omega_n} \end{array} \Big\} \rightarrow \boxed{u(t) = -\frac{p_0 t}{2m\omega_n} \cos \omega_n t}$$

Si ../..

Utilizand variable compleja se simplifican un poco las operaciones.

$p(t) = \mathrm{Im}(p_0 e^{i\omega_n t})$; Si calculo $\mathcal{U}(t)$ que sea la respuesta a $\mathcal{P}(t) = p_0 e^{i\omega_n t}$ $\rightarrow$ $u(t) = \mathrm{Im}(\mathcal{U}(t))$

$m\ddot{u} + ku = p_0 e^{i\omega_n t}$ $\qquad \ddot{\mathcal{U}} + \omega_n^2 \mathcal{U} = \frac{p_0}{m} e^{i\omega_n t}$

$\mathcal{U}(t) = A t e^{i\omega_n t}$ $\qquad \dot{\mathcal{U}} = A e^{i\omega_n t} + A i\omega_n t e^{i\omega_n t}$

$\ddot{\mathcal{U}} = i\omega_n A e^{i\omega_n t} + A i\omega_n e^{i\omega_n t} - A t\omega_n^2 e^{i\omega_n t}$

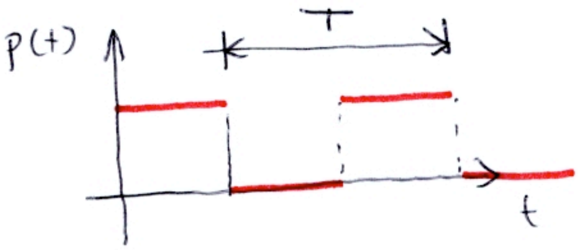
$\ddot{\mathcal{U}} + \omega_n^2 \mathcal{U} = 2i\omega_n A e^{i\omega_n t} = \frac{p_0}{m} e^{i\omega_n t} \rightarrow A = \frac{p_0}{2im\omega_n}$

$\mathcal{U}(t) = \frac{-p_0 i t}{2m\omega_n} e^{i\omega_n t}$ $\qquad u(t) = \mathrm{Im}[\mathcal{U}(t)] = \frac{-p_0 t}{2m\omega_n} \cos\omega_n t$

$$\boxed{u(t) = \frac{-p_0 t}{2m\omega_n} \cos\omega_n t}$$

P6

Obtener la respuesta de un sistema de UGL amortiguado sometido a una acción periódica tal y como se muestra en la figura



$$p_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} p_0\,dt = \frac{p_0}{2}$$

$$p_j^s = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\,\text{sen}\,\omega_j t\,dt = \frac{2p_0}{T}\int_0^{T/2} \text{sen}\,\omega_j t\,dt = -\frac{2p_0}{T\omega_j}\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{T}\frac{T}{2}\right)-1\right) = \begin{cases} \frac{2p_0}{\pi j}; & j \text{ impar} \\ 0 & j \text{ par} \end{cases}$$

$$p_j^c = \frac{2p_0}{T}\int_0^{T/2} \cos\omega_j t\,dt = \frac{2p_0}{T\omega_j}\left(\text{sen}\frac{2\pi j}{2}\right) = \emptyset$$

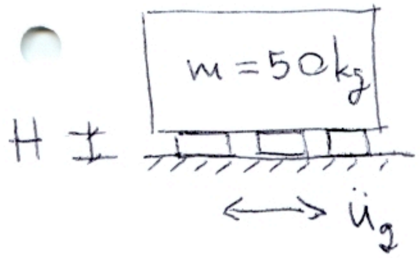
$$p(t) = \frac{p_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{2p_0}{\pi j}\,\text{sen}(\omega_j t) \qquad \left(\sum{}' \equiv \text{suma impares}\right)$$

Luego

$$\boxed{u(t) = \frac{p_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{2p_0/\pi j}{(1+\beta_j^2)^2+(2\xi\beta_j)^2}\left((1-\beta_j^2)\,\text{sen}\,\omega_j t - 2\xi\beta_j\cos\omega_j t\right)}$$

P7

Una máquina de 50 kg de peso se monta sobre apoyos elásticos de neopreno. Debido a vibraciones en máquinas adyacentes sufre una aceleración en la base $\ddot{u}_g(t) = 0{,}1\,g \operatorname{sen} \omega t$, con $\omega = 10\ \text{Hz}$. Se coloca un aislamiento con neoprenos con rigidez lateral total $k = 15\ \frac{kp}{cm}$ y $\xi = 10\%$. Obtener:



1) Aceleración de la máquina
2) Incremento de la altura de neoprenos para conseguir que $\ddot{u}_T^{max} < 0{,}005\,g$

(1.)

$$\ddot{u}^t = A^t \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \qquad A^t = TR\, \ddot{u}_g \qquad TR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. En este caso $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{14700}{50}} = 17{,}15\ \frac{rad}{s}$

y $\omega = 10\ \text{Hz} = 62{,}83\ \frac{rad}{s} \rightarrow \beta = 3{,}664 \rightarrow TR = 0{,}089$

$$\rightarrow \boxed{A^t = 0{,}0089\,g}$$

(2) Para conseguir $A^t = 0{,}005\,g \rightarrow TR = \frac{0{,}005\,g}{0{,}1\,g} = 0{,}05$

Cambiando k cambia ω_n y por tanto β

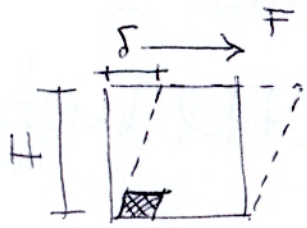
$$TR = 0{,}05 \rightarrow \frac{1 + 0{,}04\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + 0{,}04\beta^2} = 25e^{-4} \rightarrow \beta = 5{,}557\,?$$

../..

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{62,83}{5,557} = 11,31 \frac{rad}{s} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow k = 6392 \frac{N}{m}$$

La rigidez ha de ser menor.



$$\tau = G\gamma$$

$$\frac{F}{A} = G\frac{\delta}{H} \rightarrow k = \frac{AG}{H}$$. Para disminuir la rigidez puedo aumentar la altura de los apoyos hasta H'.

$$\frac{k}{k'} = \frac{H'}{H} = \frac{14700}{6392} = 2,3 \longrightarrow \boxed{H' = 2,3\,H}$$

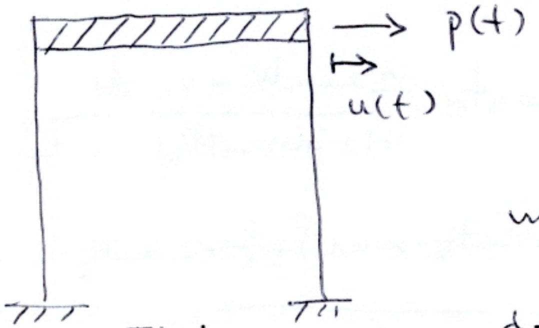
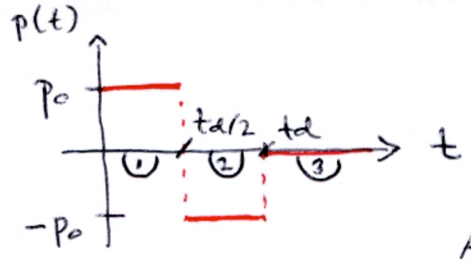


Fig 1



La estructura de la figura 1 tiene masa m, rigidez k y amortiguamiento despreciable. Está sometida a una fuerza $p(t)$ que varía según la figura 2

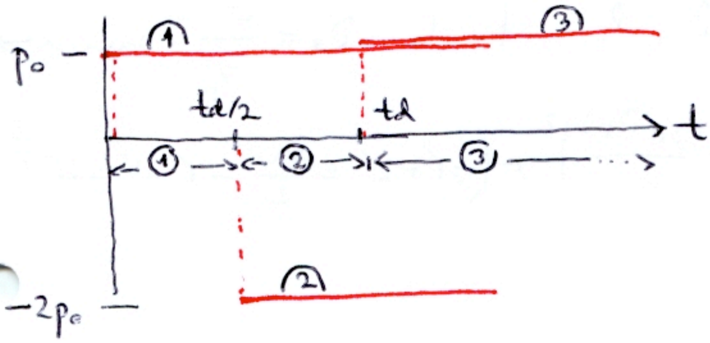
Calcular:

A* $u(t)$ en los tramos 1, 2 y 3

B* $u(t)$ máximo en el tramo 3 para $t_d \in [0, 4T_n]$

C* ¿para $t_d \ll T_n$, puede aproximarse la respuesta mediante la de un impulso equivalente?

A) La carga es suma de tres cargas escalón:



Para el tramo ① sólo interviene ①, para el ②, ① y ②, y para el ③, ①, ② y ③

La respuesta para un escalón en $t=\bar{t} \rightarrow u(t) = \frac{p_o}{k}\left[1-\cos\omega_n(t-\bar{t})\right]$

luego:

$$u_1(t) = \frac{p_o}{k}\left[1-\cos\omega_n t\right]$$

$$u_2(t) = \frac{p_o}{k}\left[-1-\cos\omega_n t + 2\cos\omega_n(t - t_d/2)\right]$$

$$u_3(t) = \frac{p_o}{k}\left[-\cos\omega_n t + 2\cos\omega_n(t-t_d/2) - \cos\omega_n(t-t_d)\right]$$

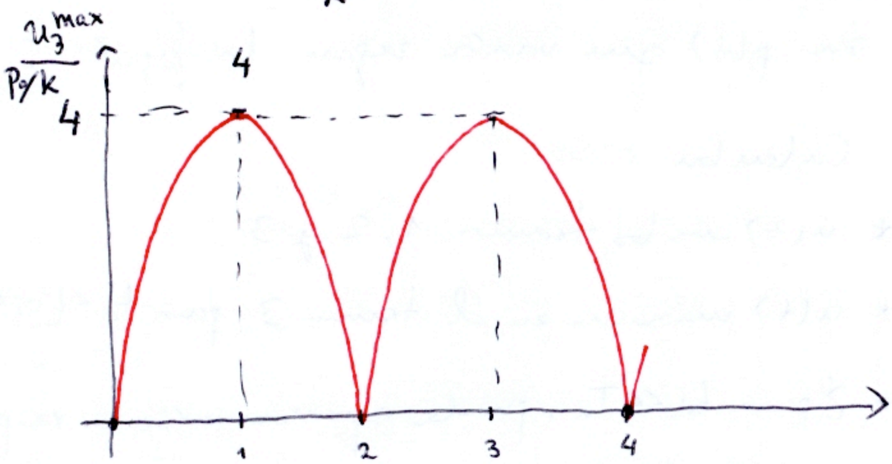
../..

B) Desarrollando u_3 y agrupando de nuevo se obtiene

$$u_3(t) = U_3 \cos(\omega t - \phi) \quad \text{donde} \quad \phi = \operatorname{atan}\frac{2\sin\omega_n t_d/2 - \sin\omega_n t_d}{-1+2\cos\omega_n t_d/2 - \cos\omega_n t_d}$$

$$U_3 = \left((2\sin\omega_n t_d/2 - \sin\omega_n t_d)^2 + (-1+2\cos\omega_n t_d/2 - \cos\omega_n t_d)^2\right)^{1/2}\frac{P_0}{k}$$

Luego $u_3^{max} = \frac{P_0}{k}\sqrt{(2\sin\pi\lambda - \sin 2\pi\lambda)^2 + (-1+2\cos\pi\lambda - \cos 2\pi\lambda)^2}$ $\quad \lambda = \frac{t_d}{T_n}$



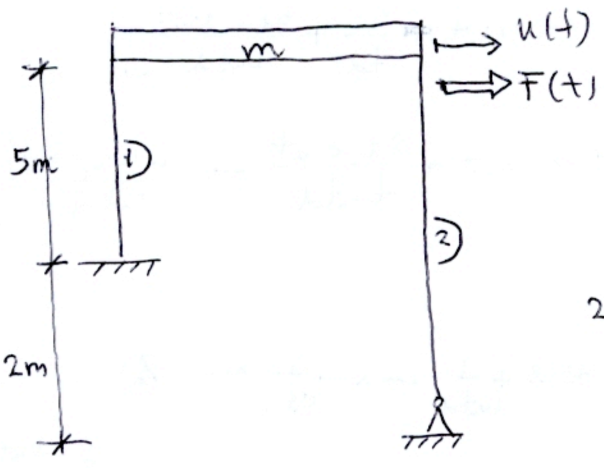
c) No, puesto que el impulso total de esta carga es $I = \int_0^{t_d} p(t)\,dt = 0$

Otra forma de verlo es tomar el límite de $R_d = \frac{U_3}{P_0/k}$ para $\lambda \to 0$

$$R_d \simeq \sqrt{\left(\cancel{2\pi\lambda} - 2\frac{\pi^3\lambda^3}{6} - \cancel{2\pi\lambda} + \frac{(2\pi)^3\lambda^3}{6}\right)^2 + \left(\cancel{-1} + \cancel{2} - \cancel{2}\frac{(\pi\lambda)^2}{\cancel{2}} - \cancel{1} + \frac{(2\pi\lambda)^2}{2}\right)^2} \simeq$$

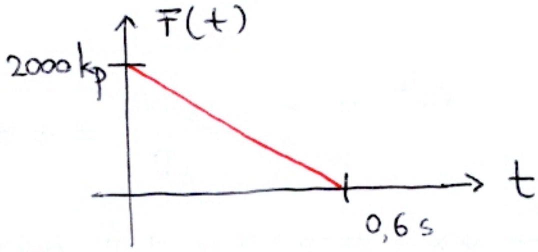
$$\simeq \sqrt{\left((\pi\lambda)^2\right)} = \pi\lambda$$

Recuérdese que para un impulso concentrado $I = \bar{P} t_d$ el espectro de éste es $R_d = 2\pi\lambda$ y sin embargo para esta carga sale $R_d \simeq \pi\lambda$ si $\lambda \to 0$



$m = 1025\ kg \quad \xi = 0\%$

$I_1 = I_2 = 9600\ cm^4$ (perfiles acero)



Calcular: A* u(t)

B* Respuesta máxima, diagrama de momentos y cortantes máximos

---

A) $I_1 = I_2 = 9600\ cm^4 = 9{,}6e^{-5}\ m^4$

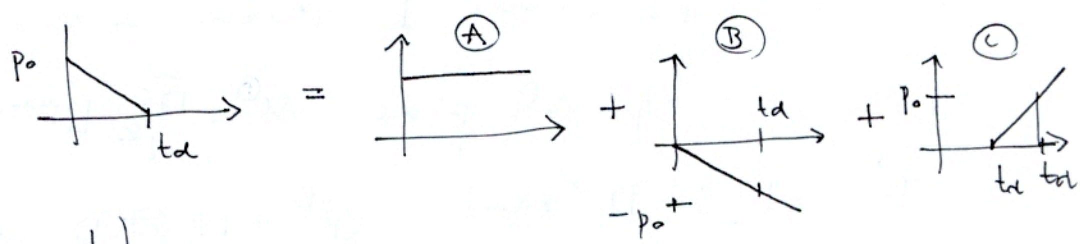
$E = 2{,}1e6\ \frac{kp}{cm^2} = 2{,}058e11\ \frac{N}{m^2}$ $\Big\}\ EI = 1{,}976e7\ m^2N$

$k = \frac{12EI_1}{L_1^3} + \frac{3EI_2}{L_2^3} = \left(\frac{12}{5^3} + \frac{3}{7^3}\right)1{,}976e7 = 2{,}069e6\ \frac{N}{m}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}096e6}{1025}} = 44{,}933\ \frac{rad}{s} = 7{,}15\ Hz \longrightarrow \underline{T_n = 0{,}140\ s}$

$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0{,}6}{0{,}14} = 4{,}28 > 0{,}25$, no se puede utilizar la solución del pulso concentrado.

Superposición



$u^A(t) = \frac{p_o}{k}(1 - \cos\omega_n t)$

$u^B(t) = -\frac{p_o}{k}\left(\frac{t}{t_d} - \frac{\operatorname{sen}\omega_n t}{\omega_n t_d}\right)$

$u^C(t) = \frac{p_o}{k}\left(\frac{t - t_d}{t_d} - \frac{\operatorname{sen}\omega_n(t - t_d)}{\omega_n t_d}\right)$

$t < t_d \qquad u^1(t) = u^A + u^B = \frac{P_o}{k}\left[1 - \cos\omega_n t + \frac{t}{t_d} + \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_d}\right]$

$t > t_d \qquad u^2(t) = u^A + u^B + u^C = \frac{P_o}{k}\left[-\cos\omega_n t + \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_d} - \frac{\sin\omega_n(t-t_d)}{\omega_n t_d}\right]$

B) Veamos el máximo de $\frac{u^2(t)}{U^{st}} = -\cos x + \frac{1}{\omega_n t_d}\sin x - \frac{1}{\omega_n t_d}\sin(x-y) =$

$= -\cos x + \frac{1}{\omega_n t_d}\sin x - \frac{1}{\omega_n t_d}\cos y \sin x + \frac{1}{\omega_n t_d}\sin y \cos x =$

$y = \omega_n t_d$

$\lambda = \omega_n t_d = 2\pi\frac{t_d}{T_n}$

$= \left(\frac{\sin y}{\lambda} - 1\right)\cos x + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \cos y\right)\sin x = D\cos(x - z)$

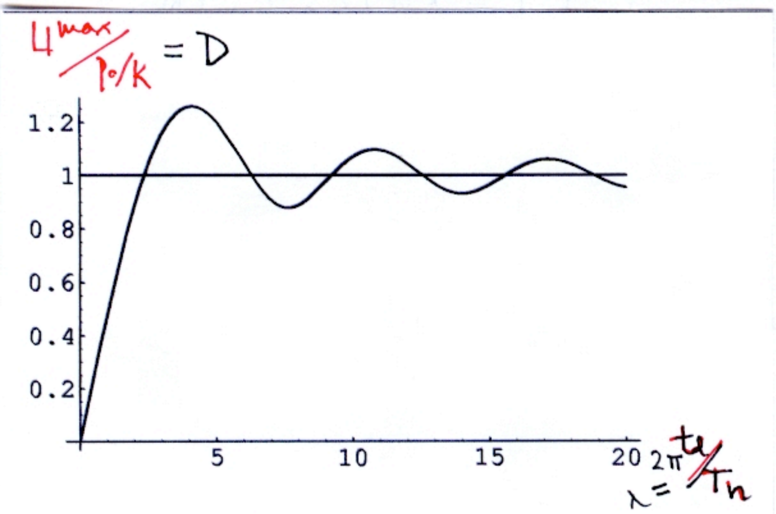
$D^2 = \left(\frac{\sin y}{\lambda} - 1\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \cos y\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda}\sin y + \frac{\sin^2 y}{\lambda^2} - \frac{2\cos y}{\lambda^2} + \frac{\cos^2 y}{\lambda^2}$

$D^2 = \frac{2 + \lambda^2 - 2\cos\lambda - 2\lambda\sin\lambda}{\lambda^2}$

Para este caso $\lambda = 2\pi\frac{0,6}{0,140} = 26,93$

$\rightarrow D = U^{max}/(P_o/k) = 0,9832$

(Habría que calcular también el máximo de $u^1(t)$ y quedarse con el mayor de ambos)



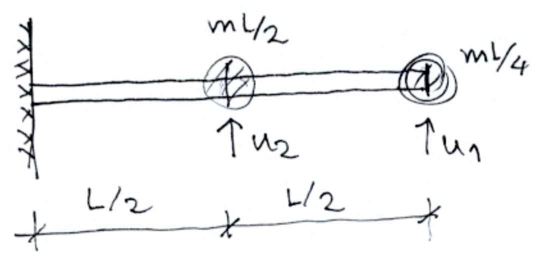
Esfuerzos: En la barra 1 tenemos los momentos máximos en la base y cabeza del pilar $M^{①} = \frac{6EI}{L^2}U^{max} = \frac{6EI}{L^2}\frac{P_o}{k}D$ (cortante cte)

$M^{①} = 44,93\,D$ (kNm) $\qquad Q^{①} = 17,97\,D$ (kN) $\qquad \left\{ M^{①} = 44,17 \text{ mkN}, \; Q^{①} = 17,67 \text{ kN} \right.$

En ② el momento máximo está en la cabeza (cortante cte)

$M^{②} = \frac{3EI}{L^2}U^{max} = \frac{3EI}{L^2}\frac{P_o}{k}D$

$M^{②} = 11,46\,D$ (kNm) $\qquad Q^{②} = 1,64\,D$ (kN) $\qquad \left\{ M^{②} = 11,27 \text{ mkN}, \; Q^{①} = 1,61 \text{ kN} \right.$



La matriz de rigidez de la viga en voladizo es $k = \frac{48EI}{7L^3}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$

y la matriz de masa $\underline{m} = \frac{mL}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Obtener: 1) Frecuencias naturales

2) Modos de vibración. Dibujarlos

---

1)
$$k - \omega^2 m = \frac{48EI}{7L^3}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix} - \omega^2 \frac{mL}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{48EI}{7L^3}\left[\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

siendo $\lambda = \omega^2 \frac{mL}{4}\frac{7L^3}{48EI} = \frac{7mL^4}{192EI}\omega^2$

$$|k - \omega^2 m| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(16-2\lambda) - 25 = 0$$

$$2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0 \rightarrow \lambda = \begin{cases} 0{,}3632 \\ 9{,}6368 \end{cases}$$ Teniendo en cuenta la definición de λ →

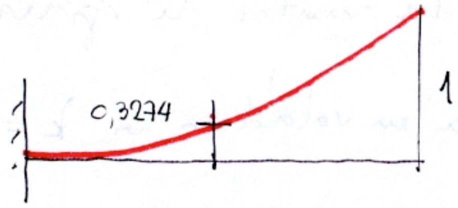
$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= 3{,}1563\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \\ \omega_2 &= 16{,}2580\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \end{aligned}}$$

2) Modos de vibración $(k - \omega^2 m)\phi = 0 \equiv \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

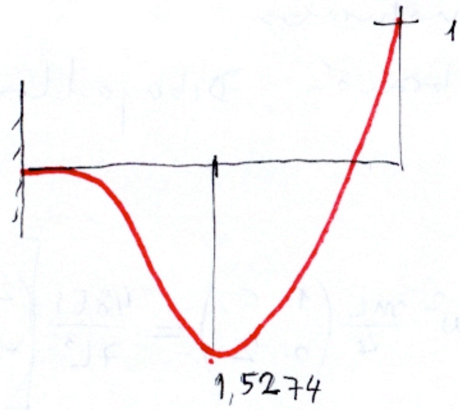
<u>Modo 1</u> : $1{,}6368\,\phi_1 - 5\,\phi_2 = 0$; $\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_2 = 0{,}3274$

<u>Modo 2</u> : $-7{,}6368\,\phi_1 - 5\,\phi_2 = 0$ $\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_2 = -1{,}5274$

Forma de los modos:



Modo 1



Modo 2

APELLIDOS:

NOMBRE: **FIRMA:**

DNI:

TEORÍA

Dado un sistema formado por una masa, una rigidez y un amortiguador, sometido a un movimiento en su base, se denomina coeficiente de Transmisibilidad relativa TRR al cociente entre la amplitud del desplazamiento relativo y la del desplazamiento en la base. Encuentre la expresión de TRR en función del factor de amortiguamiento, frecuencia de excitación y frecuencia natural.

EJERCICIO 1

Un instrumento muy sensible en un laboratorio ha de aislarse de las vibraciones debidas a equipos cercanos que se estima que se producen en unas frecuencias que varían en el rango 1000 rpm a 3000 rpm. La masa conjunta del instrumento y de la mesa sobre la que se encuentra es de 50 kg. La mesa se soporta sobre cuatro resortes de igual rigidez y amortiguamiento despreciable. Calcule el valor adecuado de la rigidez cada resorte para que la amplitud de las vibraciones transmitidas al instrumento sea menor de un 15 % de la vibración en el suelo, para todo el rango de frecuencias.

EJERCICIO 2

Un poste tubular que soporta un antena circular de 3 m de diametro es flexionado mediante una cuerda y comienza a vibrar al cortar esta. La rigidez estimada es de 30,81 kN/m. Los máximos medidos de la aceleración en los primeros instantes se dan en $t = 2, 6, 10, 14$ segundos y valen: $\ddot{x}_0 = 258\text{mm/s}^2$, $\ddot{x}_1 = 226\text{mm/s}^2$, $\ddot{x}_2 = 199\text{mm/s}^2$, $\ddot{x}_3 = 176\text{mm/s}^2$, respectivamente. Calcule:

1. El decremento logaritmico
2. El factor de amortiguamiento
3. Las frecuencias y periodos naturales, amortiguados y sin amortiguar
4. La masa del sistema
5. El coeficiente de amortiguamiento

EJERCICIO 3

Una viga simplemente apoyada de longitud 3,5m, inercia $I = 5{,}344 \cdot 10^7$ mm^4 y modulo de elasticidad de 200 kN/mm^2, soporta en su centro una máquina que pesa 102,44 kN. La motor de la máquina trabaja a 300 rpm y tiene un peso desequilibrado de 180 N a una distancia de 25 cm del eje ($p_0 = me\omega^2$).Sabiendo que el factor de amortiguamiento es de un 10 %, calcule:

1. Amplitud del movimiento en régimen permanente
2. Angulo de desfase del movimiento respecto a la excitación

EJERCICIO 4

Un pórtico simple de vano 20 m y altura 4 m está formado por una jácena rígida de peso 4,0 kN/m y dos pilares articulados en la base, con masa despreciable, de inercia 3200 cm^4, módulo resistente 286 cm^3 y módulo de elasticidad del material 200 kN/mm^2. El factor de amortiguamiento es de un 2 %. El pórtico está sometido a un movimiento en la base $u_g(t) = 8{,}0 \sin(11{,}5t)$ mm. Calcule:

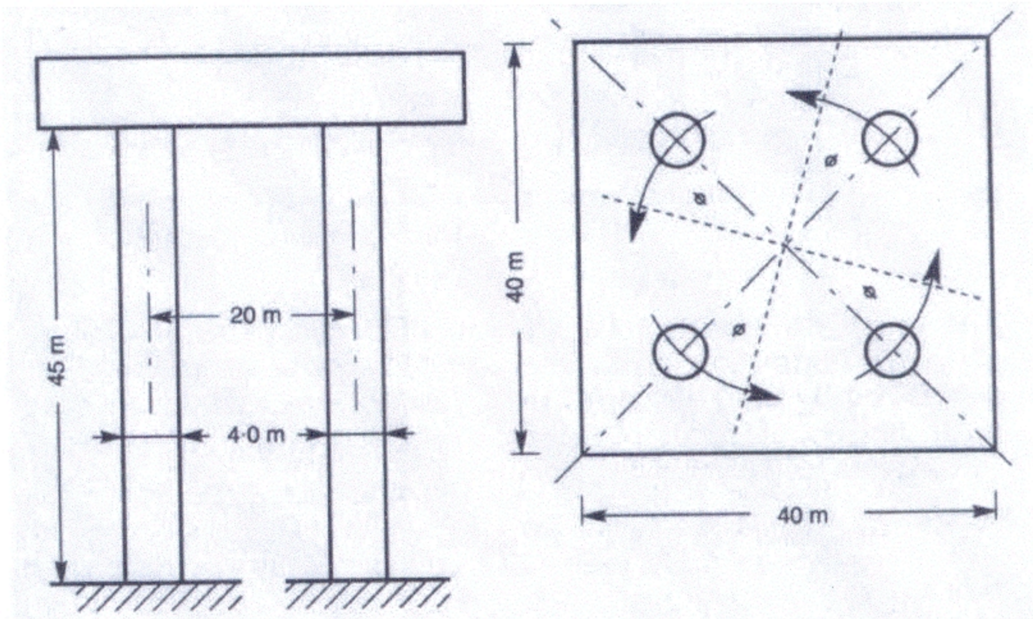
1. Desplazamiento relativo máximo de la viga
2. Cortante máximo en cada pilar
3. Tensión de flexión máxima en cada columna

EJERCICIO 5

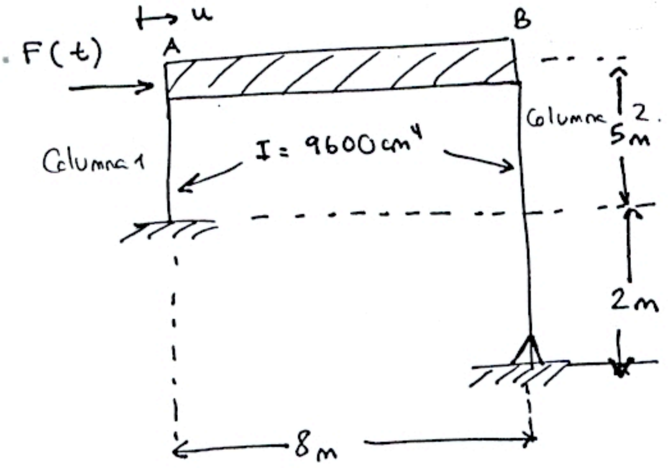
La ecuación que gobierna la vibración torsional de un elemento de inercia polar I_p unido a un resorte torsional de rigidez k_t es $I_p\ddot{\theta} + k_t\theta = m(t)$, siendo θ el ángulo girado y $m(t)$ el momento externo aplicado. Para la estructura de hormigón de la figura formada por una plataforma rígida de masa $3{,}84 \cdot 10^3$ ton, soportada por cuatro pilas tubulares de radio interior de 1,5 m, y suponiendo despreciables las masas de los pilares, calcule:

1. Rigidez lateral del conjunto
2. Frecuencia y periodo natural sin amortiguamiento del movimiento lateral
3. Frecuencia y periodo natural sin amortiguamiento del movimiento torsional

Datos: Inercia polar de un rectangulo $a \times b$ de masa m es $I_p = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$; la rigidez a torsión de un elemento tubular de longitud L, radio externo R, e interno r es $k_t = \frac{\pi G(R^4 - r^4)}{2L}$, siendo G el modulo de rigidez transversal del material; densidad del hormigón 2400 kg/m^2; E = 30,0 kN/mm^2; G = 12,0 kN/mm^2.

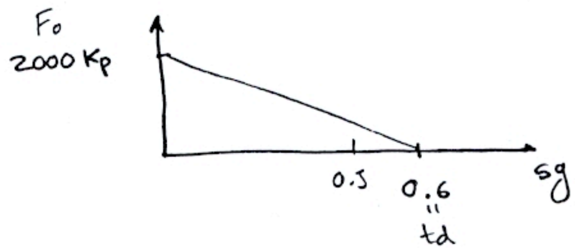


Hecho 7-11-03



$m = 1020'408$ Kg

Pórtico de acero rígido en A y B

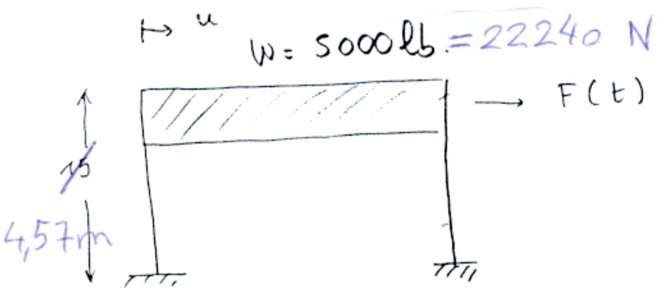


Despreciamos peso de columnas y amortiguamiento

Calcular: a) u (t = 0.5 sg)

b) U_{max}

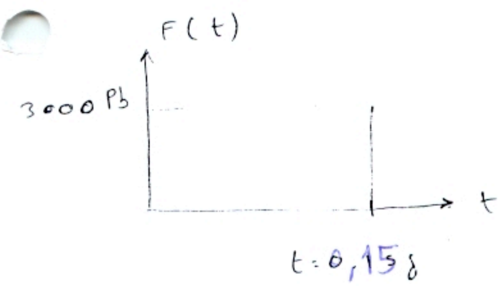
c) M y Q máximo en Columnas 1 & 2



I pilares = 69.2 in⁴

I / c = 17 in³

E = 30×10^6 psi



Se pide:

a) u_{max}

b) σ_{max} en columna

1 pie = 12 in

1 in = 2,54 cm

1 lb = 4,448 N

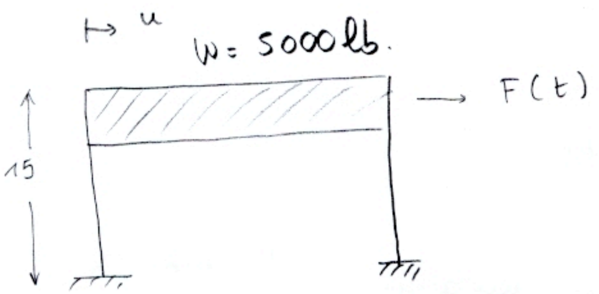
1 psi = 1 lb/in² = 6,894e3 $\frac{N}{m^2}$

~~1 Kp = 9,81~~

8/11/01

A.A.E 39

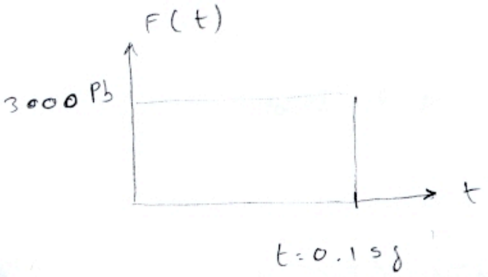
Ejercicio 16



I pilares : 69.2 in^4

I / c : 17 in^3

E = 30×10^6 psi



Se pide :

a) u max

b) σ max en colum

Unidades

1 pie (ft) = 12 in

1 in = 2'54 cm

1 lb = 4'448 Nw

1 psi = 1 lb / in^2 = $6'894 \cdot 10^3 \frac{Nw}{m^2}$

1 Kp = 980 cm/s^2 · 1 Kg = 9'8 Nw

1 Nw = 1 Kg · 1 cm/s^2

$$K_v = K_1 + K_2 = 2K_1 = 2\left(\frac{12EI}{L^3}\right) = 24 \cdot \frac{30 \cdot 10^6 \, psi \cdot 69'2 \, in^4}{(15 \, ft)^3 \cdot \left(\frac{12 \, in}{1 \, ft}\right)^3} = \frac{24 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 69'2}{(15 \cdot 12)^3}$$

$$k_v = 8543'21 \, lb/in \cdot \frac{4'448 \, N}{1 \, lb} \cdot \frac{1 \, Kp}{9'8 \, N} \cdot \frac{1}{2'54 \, cm} \Rightarrow$$

$$\boxed{k_v = 1526'602 \, \frac{kp}{cm}} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1526'602 \, Kp/cm}{2'315 \, Kg}}$$

$$W = 5000 \, lb \, \frac{4'448 \, Nw}{1 \, lb} = 22240 \, Nw \cdot \frac{1 \, Kp}{9'8 \, Nw} = 2269'3 \, Kp \longrightarrow \frac{2269'3}{980} = 2'315 \, K$$

$$\boxed{\omega = 25'675 \ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{25'675} = 0.24 s$$

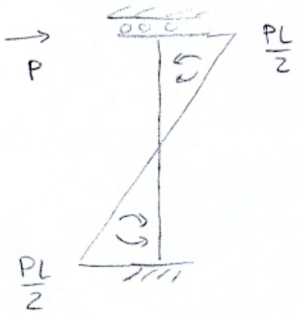
$$\frac{td}{T} = \frac{0.1 sg}{0.24 sg} = \boxed{0.416}$$ mirando en la gráfica $FD_{max} = 1.9$

$$FD_{max} = \frac{U_{max}}{U_{est}} \Rightarrow u_{max} = 1.9 \cdot U_{est}.$$

$$U_{est} = \frac{F_o}{K} \qquad F_o = \frac{3000 \cdot 4'448}{9'8} = 1361'633 \ Kp.$$

$$U_{est} = \frac{1361'633}{1526'605} = 0.891$$

$$\boxed{u_{max} = 1.9 \ (0.891) = 1.694 \ cm}$$



$$\delta = \frac{PL^3}{12EI} \qquad P_{max} = K, U_{max} = \left(\frac{12EI}{L^3}\right) U_{max}$$

$P_{max} = 1293'8 \ Kp.$

$$M_{max} = \frac{PL}{2} = \frac{1293'8 \cdot (15 \cdot 12 \cdot 2'54)}{2} =$$

$$\boxed{M_{max} = 295761'8 \ Kp \cdot cm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I/C} = \frac{295761'8}{278'58} = \boxed{1061'67 \ \frac{Kp}{cm^2}}$$

$$\frac{I}{C} = 17 \ in^3 \cdot \frac{(2'54 \ cm)^3}{1 \ in^3} = 278'58$$

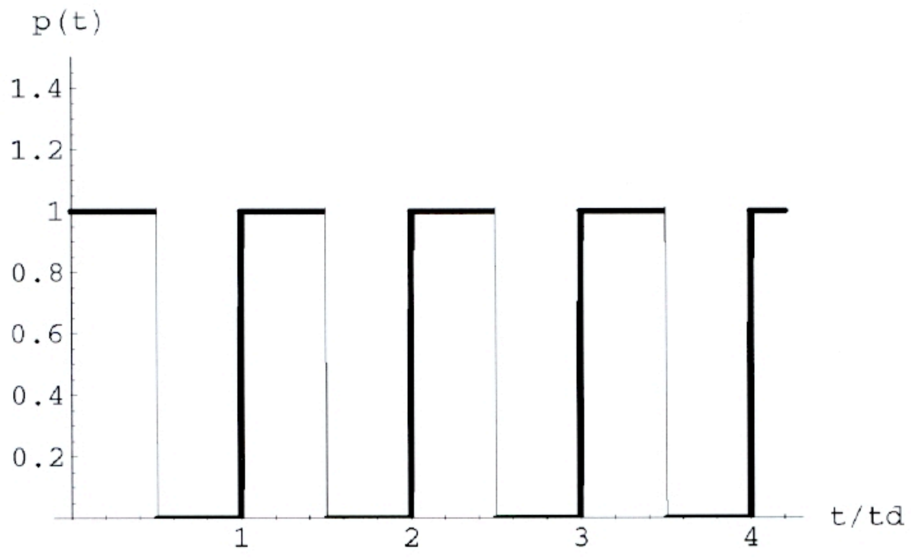
APELLIDOS:	
NOMBRE:	**FIRMA:**
DNI:	

EJERCICIO

Un SUGL de propiedades $m = 1$, $\xi = 3\,\%$ y $T_n = 1$ (en unidades consistentes), está sometido a una carga periodica, como la que se muestra en la figura, siendo $t_d = 1{,}5T_n$. Obtener la respuesta desde $t = 0$ hasta $t = 4T_d$ utilizando los siguientes métodos programados en los cuadernos de Mathematica entregados:

1. Desarrollo en series de Fourier
2. Método de la interpolación lineal de la carga
3. Método de Houbolt
4. Otro cualquiera de los métodos de su elección

Utilice los parámetros adecuados en cada método para obtener una respuesta con una precisión cercana al 5 %, y compare los resultados obtenidos.

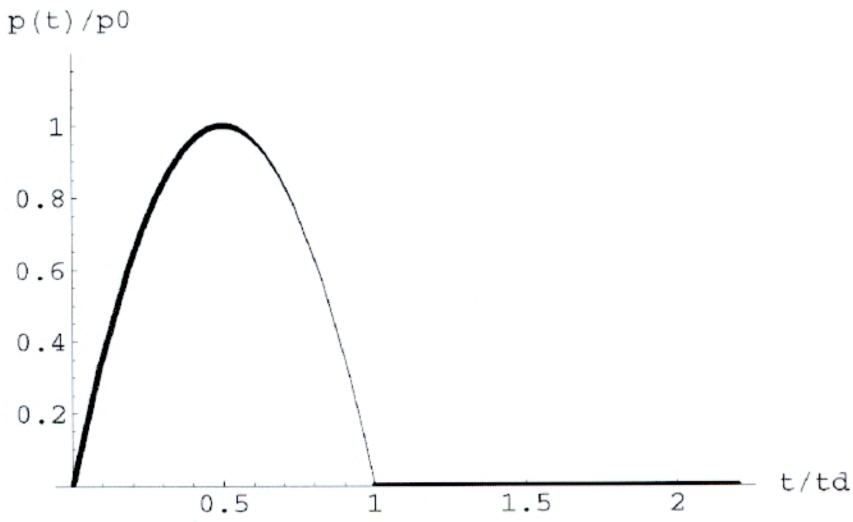


Segunda práctica, 12-XI-2004. Análisis Avanzado de Estructuras
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Granada

APELLIDOS:	
NOMBRE:	**FIRMA:**
DNI:	

EJERCICIO

Obtener el Espectro de respuesta impulsivo para un SUGL sin amortiguamiento, para una carga parabólica, tal y como la que se muestra en la figura.



APELLIDOS:

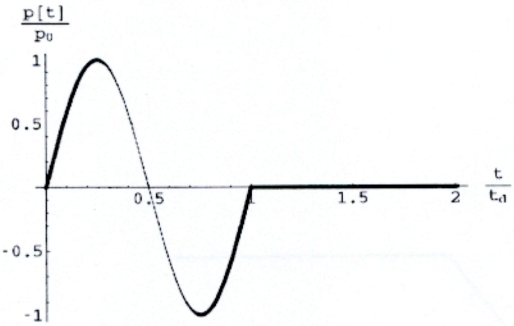
NOMBRE: **FIRMA:**

DNI:

EJERCICIO 1

Un SUGL sin amortiguamiento está sometido a la carga impulsiva con forma de seno, tal y como se muestra en la figura.Obtener:

1. Respuesta de desplazamiento en el tiempo para los periodos $t < t_d$, $t_d < t$
2. Máximo del desplazamiento para los dos periodos en función de $\frac{t_d}{T_n}$ siendo T_n el periodo natural de la estructura
3. Dibujar, aproximadamente, el máximo absoluto en función de $\frac{t_d}{T_n}$
4. Comprobar si para $\frac{t_d}{T_n} \to 0$ el espectro obtenido coincide con el de un impulso concentrado y razonar la respuesta.



EJERCICIO 2

Se puede diseñar un método numérico similar al método de Houbolt para la resolución numérica de la ecuación de un SUGL aproximando el desplazamiento en el intervalo (t_i, t_{i+1}) mediante un polinomio cúbico:

$$u(\tau) = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \qquad \tau = t - t_i$$

pero tomando para la interpolación los valores del desplazamiento en los instantes t_{i-1}, t_i y t_{i+1}, y la velocidad en el instante t_i (u_{i-1}, u_i, u_{i+1} y $\dot{u}_i$)

Desarrollando esta idea, obtener:

1. Coeficientes a, b, c y d de la interpolación
2. A partir de la interpolación obtener la expresión de la velocidad $\dot{u}_{i+1}$ en el instante t_{i+1}, en función de u_{i-1}, u_i, u_{i+1} y $\dot{u}_i$
3. Idem para la aceleración $\ddot{u}_{i+1}$ en t_{i+1}
4. Con los valores obtenidos de $\dot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$, así como la ecuación de equilibrio en t_{i+1}, obtener las ecuaciones que permiten calcular el desplazamiento u_{i+1}, y la velocidad $\dot{u}_{i+1}$, en función de los valores conocidos de instantes anteriores.

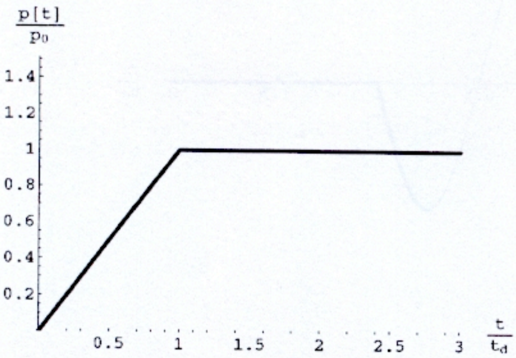
(...sigue atrás...)

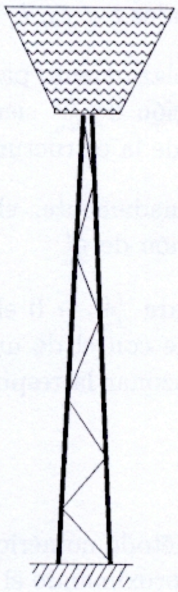
EJERCICIO 3

Un depósito elevado de 25 m de altura y 45 t de peso está sometido a una fuerza lateral de valor máximo $p_0 = 23$ t, cuya evolución en el tiempo se muestra en la figura (rampa-escalón). La rigidez lateral de la estructura que sustenta el depósito es de $k = 147$ t/m. Teniendo en cuenta únicamente los valores extremos del Espectro de respuesta para este tipo de cargas (espectro para $t_d << T_n$ y espectro para $t_d >> T_n$), obtener el diagrama de cortantes y momentos máximos que se alcanza cuando el tiempo de subida toma los dos valores siguientes:

1. $t_d = 0{,}2$ s

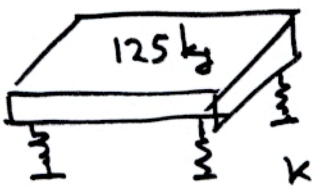
2. $t_d = 4{,}0$ s





23/10/03

1.-

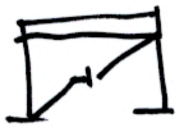


· Al colocar la máquina desciende 2cm

· c/ 2 ciclos la amplitud baja a 1/8

$k, \xi, \omega_n, \omega_D, T_n, T_D$,

2.-

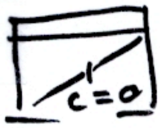


· En resonancia $u = 5$ cm

· Si excito con $\omega = 10\% \, \omega_n$ $u = 0,5$ cm } ξ ?

$u/u_{st} = 1/2\xi$ $\quad u_2/u_{st} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-0,1^2)^2+(2\xi\, 0,1)^2}}$ $\rightarrow \begin{cases} \xi = 0,050 \quad 5\% \\ u_{st} = 0,5 \text{ cm} \end{cases}$

3.-



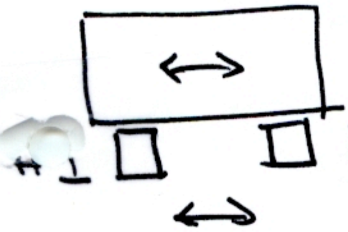
· 1er test vemos que $f = 4$Hz resonancia

· 2º test añadimos 250kg $f = 3$Hz resonancia

Hallar características del sistema

($m = 9/7 \, m' = 9/7 \cdot 250 = 321$ kg $\quad k = m\omega_n^2 = 203 \frac{kN}{m}$)

4: Máquina de 50kg Hecho 23/10/03



· Aceleración en la máquina

· Cuantos neoprenos pongo para que $\ddot{u}_t < 0,005\, g$

$k = 15$ kp/cm

$\xi = 10\%$

$u_g = 0,1\, g \operatorname{sen} \omega t \quad f = 10$Hz

(a) $\ddot{u}_t/\ddot{u}_g = TR(\xi, \beta) = TR(0,1, \frac{\omega}{\omega_n}) = TR(0,1; 3,61) = 0,102$

$\rightarrow \ddot{u}_t = 10,2\% \, \ddot{u}_g = 0,012\, g$

b) $TR = \dfrac{0,005\, g}{0,1\, g} = 0,05 \rightarrow \beta = 5,56 \rightarrow \omega_n = 11,3 \frac{rad}{s} \rightarrow k' = 6385 \frac{N}{m}$

$k = 14700$ y ahora $k' = 6385$

$\tau = G\gamma \quad \delta = \gamma H = \frac{H}{G}$

$\rightarrow k = \frac{G}{H}$

$H' = 2,3\, H$

APELLIDOS:

NOMBRE: **FIRMA:**

DNI:

TEORÍA

Dado un sistema formado por una masa, una rigidez y un amortiguador, sometido a un movimiento armónico en su base, se denomina coeficiente de Transmisibilidad Relativa *(*TRR*) al cociente entre la amplitud del desplazamiento relativo y la del desplazamiento en la base. Encuentre la expresión de* TRR *en función del factor de amortiguamiento, frecuencia de excitación y frecuencia natural.*

La ecuación a resolver es $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku = -m\ddot{u}_g$. Si el movimiento en la base es de la forma $u_g(t) = U_g \sin(\omega t)$, entonces $\ddot{u}_g(t) = -\omega^2 U_g \sin(\omega t)$, de modo que la ecuación a resolver queda:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\omega^2 U_g \sin(\omega t)$$

La solución general de este problema es

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\sin(\omega t - \phi)$$

siendo $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$

Para este caso $p_0 = m\omega^2 U_g$ de modo que la amplitud del desplazamiento relativo es:

$$U = \frac{m\omega^2 U_g}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = U_g\frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

y por tanto,

$$\mathrm{TRR} = \frac{U}{U_g} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

EJERCICIO 1

Un depósito elevado a una altura $H = 8$ metros, soportado por una pila de rigidez 45 t/cm y peso $W = 50$ t, está sometido a vibraciones en su base producidas por el paso de trenes en la cercanía. El movimiento del terreno en la cimentación de la pila se idealiza como una aceleración armónica de amplitud 0.1g a una frecuencia de 10 Hz. Se estima que el factor de amortiguamiento es del 10 %. Calcule, en régimen permanente:

1. *Amplitud del movimiento relativo del depósito respecto a la cimentación*
2. *Diagrama de cortantes máximos*
3. *Diagrama de flectores máximos*

Realice los mismos calculos para el caso de que la frecuencia de las vibraciones sea de 5 Hz. Comente la diferencia, y si es grande, ¿a qué se debe?

1. Amplitud del movimiento relativo del depósito respecto a la cimentación

   La ecuación a resolver es,

   $$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mA_g \sin(\omega t)$$

   siendo $A_g = 0{,}1g = 0{,}98 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ y $\omega = 10$ Hz $= 62{,}8 \ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

   La amplitud del movimiento relativo del depósito respecto a la base es entonces

   $$U = \frac{p_0}{k}R_d$$

   siendo

   $$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

   con $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$, y en este caso $p_0 = -mA_g$.

   Con los datos del problema calculamos: $p_0 = -50\ 10^3 \cdot 0{,}98 = 49\ 10^3$ N; $\omega_n = \sqrt{\frac{45\ 10^3\ 10^2\ 9{,}8}{50\ 10^3}} = 29{,}70\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 4{,}73$ Hz; $\beta = \frac{62{,}8}{29{,}70} = 2{,}11$. Por tanto,

   $$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-2{,}11^2)^2 + (2\ 0{,}1\ 2{,}11)^2}} = 0{,}287$$

   de modo que,

   $$U = \frac{49\ 10^3}{4{,}41\ 10^7}0{,}287 = 0{,}32\mathrm{mm}$$

2. Diagrama de cortantes máximos

   Conocido el desplazamiento máximo, los esfuerzos se calcularían resolviendo el problema estático con una carga $P = k\ U = 14{,}06$ kN. El cortante será entonces constante y de valor $Q = 14{,}06$ kN

3. Diagrama de flectores máximos

   En el mismo problema del apartado anterior, el momento flector es lineal, siendo nulo en la cabeza de la pila y de valor máximo $M = P\ H = 14{,}06 \cdot 8 = 112{,}5$ kN m.

Para el caso en que la frecuencia de las vibraciones sea de 5 Hz, repetimos los mismos paso.

1. Amplitud del movimiento relativo del depósito respecto a la cimentación ($\omega = 5$ Hz)

   En este caso el cociente entre la frecuencia de excitación y la natural cambia: $\beta = \frac{5 \cdot 2\ \pi}{29{,}70} = 1{,}058$. Por tanto,

   $$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-1{,}058^2)^2 + (2\ 0{,}1\ 1{,}058)^2}} = 4{,}12$$

   de modo que en este caso,

   $$U = \frac{49\ 10^3}{4{,}41\ 10^7}4{,}12 = 4{,}57\mathrm{mm}$$

   Obsérvese que el desplazamiento máximo es en este caso $\frac{4{,}12}{0{,}32} \approx 13$ veces mayor que en el caso anterior.

2. Diagrama de cortantes máximos ($\omega = 5$ Hz)

   El estado estático tiene ahora una fuerza $P = k\ U = 201{,}9$ kN, que es igual al cortante$Q = 201{,}9$ kN

3. Diagrama de flectores máximos ($\omega = 5$ Hz)

   El momento flector es lineal, siendo nulo en la cabeza de la pila y de valor máximo $M = P\ H = 201{,}9 \cdot 8 = 1615{,}3$ kN m.

¿A qué se debe la diferencia tan grande entre el resultado debido a una excitación con 10 Hz al de la excitación de frecuencia 5 Hz?

La frecuencia de 5 Hz es cercana a la frecuencia natural ($\omega = 4{,}73$ Hz) de modo que el factor de amplificación R_d será cercano al valor máximo $R_d^{\max} = \frac{1}{2\xi} = 5$. Por otra parte, la frecuencia de 10 Hz es bastante mayor que la natural, de modo que la excitación provoca una respuesta menor en vez de amplificarse.

EJERCICIO 2

Una maquina de 100 kg se apoya sobre resortes que bajan 1,2 mm bajo el peso de la máquina. A la frecuencia de operación de la máquina de 2000 rpm el desequilibrio del rotor produce una fuerza de amplitud de 36,7 kp.

1. *¿Cual es la fuerza máxima transmitida a la cimentación si el amortiguamiento de los resortes es despreciable?*
2. *Se desea reducir la fuerza transmitida a la decima parte de lo obtenido en el apartado anterior, variando la masa, la rigidez o incluyendo amortiguamiento: ¿cúal(es) de estas tres medidas produciría el resultado deseado? ¿En que sentido habría que realizar la variación (aumentar, disminuir)?*
3. *Si se varía sólo la rigidez, calcule la rigidez necesaria para que se cumpla la condición del apartado anterior.*

1. ¿Cual es la fuerza máxima transmitida a la cimentación si el amortiguamiento de los resortes es despreciable?

   Si un peso de 100 kg produce un descenso de 1.2 mm, entonces:

$$k = \frac{F}{d} = \frac{100 \cdot 9{,}8\ 10^{-3}}{1{,}2\ 10^{-3}} = 817 \text{ kN/m}$$

   Conocida la masa y la rigidez, se obtiene

$$\omega_n = \sqrt{\frac{817\ 10^3}{100}} = 90{,}4 \text{ rad/s} = 14{,}4 \text{ Hz}$$

   y por tanto $\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2000/60}{14{,}4} = 2{,}31$, pasando la frecuencia en revoluciones por minuto (rpm) a Herzios. Dado que queremos conocer la fuerza transmitida a la cimentación, usaremos el concepto de Trasmisibilidad (TR), cuyo valor es,

$$\text{TR} = \sqrt{\frac{1 + (2\beta\xi)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}} = \sqrt{\frac{1}{(1-2{,}31^2)^2}} = 0{,}231$$

   Teniendo en cuenta que $\text{TR} = \frac{F_T}{F_0}$ siendo F_T la fuerza total transmitida al cimiento y F_0 la fuerza aplicada debido al desequilibrio de la máquina, entonces

$$F_T = \text{TR} \cdot F_0 = 0{,}231\ 36{,}7 = 8{,}46 \text{ kp} = 82{,}9 \text{ N}$$

2. Se desea reducir la fuerza transmitida a la décima parte de la obtenida en el apartado anterior, variando la masa, la rigidez o incluyendo amortiguamiento: ¿cúal(es) de estas tres medidas produciría el resultado deseado? ¿En que sentido habría que realizar la variación (aumentar, disminuir)?

   Para reducir TR siendo fija la frecuencia de excitación, y dado que $\beta > \sqrt{2}$ es necesario aumentar β, y por lo tanto, disminuir ω_n. Para ello, se puede aumentar la masa o disminuir la rigidez. Introducir amortiguamiento tiene un efecto negativo pues incrementa TR.

3. Si se varía sólo la rigidez, calcule la rigidez necesaria para que se cumpla la condición del apartado anterior.

   Se desea reducir a la décima parte F_T y por tanto es necesario reducir a la décima parte el TR. De modo que $TR = \frac{1}{10}0{,}231 = 2{,}31\ 10^{-2}$. Como el amortiguamiento sigue siendo nulo entonces,

$$\text{TR} = \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2}} = \frac{1}{\beta^2 - 1} = 2{,}31\ 10^{-2}$$

   ecuación de la que se despeja $\beta = 6{,}50$ y entonces $\omega_n = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2000}{6{,}50} = 307{,}5$ rpm $= 32{,}21\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, de donde se deduce que $k = m\omega_n^2 = 100\ 32{,}21^2 = 103724\ \frac{\text{N}}{\text{m}} = 103{,}7\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$. Luego es necesario reducir la rigidez desde 817 al valor calculado de 103 kN/m.

$m = 797{,}8$ kg

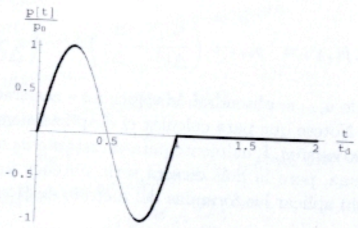
$\omega = \frac{2000}{60} \cdot 2\pi =$

APELLIDOS:	
NOMBRE:	**FIRMA:**
DNI:	

EJERCICIO 1

Un SUGL sin amortiguamiento está sometido a la carga impulsiva con forma de un ciclo de un seno, tal y como se muestra en la figura. Obtenga:

1. Respuesta de desplazamiento en el tiempo para los lapsos $t < t_d$, $t > t_dt$
2. Máximo del desplazamiento para el segundo lapso ($t > t_d$) en función de $\frac{t_d}{T_n}$ siendo T_n el periodo natural de la estructura
3. Dibuje, aproximadamente, el máximo absoluto en función de $\frac{t_d}{T_n}$
4. Compruebe si para $\frac{t_d}{T_n} \to 0$ el espectro obtenido coincide con el de un impulso concentrado y razone la respuesta.



La carga senoidal en el primer intervale es $p(t) = p_0 \sin(\omega_d t)$ siendo $\omega_d = \frac{2\pi}{t}$.
La respuesta para el primer intervalo será la de un SUGL sometido a una carga senoidal, que la tenemos en el formulario:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left\{(1-\beta^2)\sin(\omega_d t) - 2\xi\beta\cos(\omega_d t)\right\}$$

siendo $\beta = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{T_n}{t_d}$. Simplificando para el caso $\xi = 0$, se obtiene,

$$u(t) = \frac{p_0}{k(1-\beta^2)} \sin(\omega_d t)$$

Esta solución era la del régimen permanente para una carga de este tipo, y nosotros estamos interesados en el régimen transitorio. Para que esta solución sea la completa hace falta que cumpla las concidiones iniciales de desplazamiento y velocidad nulas, y por tanto tendremos que añadir la parte correspondiente a la solución homogénea,

$$u(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) + \frac{p_0}{k(1-beta^2)}\sin(\omega_d t)$$

Las constantes A y B se obtienen obligando a que $u(0) = 0$ y que $\dot{u}(0) = 0$. Haciendo esto la solución completa es:

$$u^I(t) = \frac{p_0}{k(1-\beta^2)}\left\{\sin(\omega_d t) - \beta\sin(\omega_n t)\right\}$$

Para el segundo intervalo ($t > t_d$), dado que la carga total es nula en el mismo, lo más sencillo es obtener los valores de velocidad y desplazamiento en el instante $t = t_d$, y a partir de ese instante la solución será la de vibraciones libres. Para simplificar las expresiones, denominamos $x = \frac{t_d}{T_n}$

$$\begin{aligned} u_d &= u^I(t_d) = -\frac{p_0\beta}{k(1-\beta^2)}\sin(2\pi x) \\ v_d &= \dot{u}^I(t_d) = \frac{p_0\omega_d}{k(1-\beta^2)}\left\{1 - \sin(2\pi x)\right\} \end{aligned}$$

La solución para $t > t_d$ es entonces,

$$u^{II}(t) = u_d\cos\omega_n(t-t_d) + \frac{v_d}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_d)$$

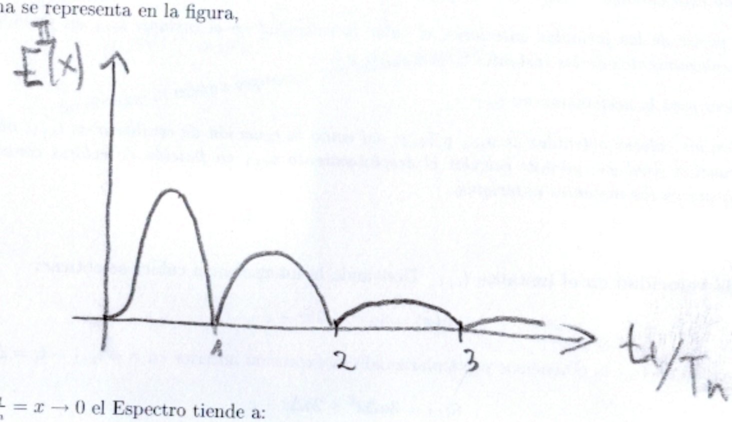
El máximo de esta función es su amplitud, ya que se trata de una función armónica,

$$\max_{t>t_d}\{u^{II}(t)\} = \sqrt{u_d^2 + \left(\frac{v_d}{\omega_n}\right)^2}$$

El Espectro de respuesta para este impulso (teniendo en cuenta sólo el segundo intervalos) será $E^{II}(x) = \frac{\max_{t>t_d}\{u^{II}(t)\}}{U^{est}}$ siendo $U^{est} = \frac{p_0}{k}$. Teniendo en cuenta que $\beta = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{T_n}{t_d} = \frac{1}{x}$, el Espectro queda como,

$$E^{II}(x) = \left|\frac{2x\sin(\pi x)}{x^2-1}\right|$$

cuya forma se representa en la figura,



Para $\frac{t_d}{T_n} = x \to 0$ el Espectro tiende a:

$$E^{II}(x) = 2\pi x^2 + O(x^3)$$

de modo que no tiende a la soluciónde un impulso concentrado, que es de la forma $E(x) = 2\pi I x$ siendo I el valor total del impulso. £Por qué? Porque el impulso total de la fuerza que estamos considerando es nulo, ya que al integrarla en el tiempo se anula la parte positiva con la negativa.

APELLIDOS:

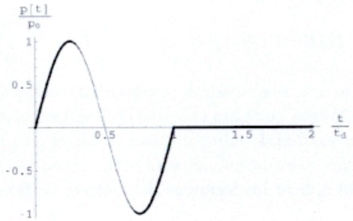
NOMBRE: **FIRMA:**

DNI:

EJERCICIO 1

Un SUGL sin amortiguamiento está sometido a la carga impulsiva con forma de un ciclo de un seno, tal y como se muestra en la figura. Obtenga:

1. Respuesta de desplazamiento en el tiempo para los lapsos $t < t_d$, $t > t_d t$
2. Máximo del desplazamiento para el segundo lapso ($t > t_d$) en función de $\frac{t_d}{T_n}$ siendo T_n el periodo natural de la estructura
3. Dibuje, aproximadamente, el máximo absoluto en función de $\frac{t_d}{T_n}$
4. Compruebe si para $\frac{t_d}{T_n} \to 0$ el espectro obtenido coincide con el de un impulso concentrado y razone la respuesta.



La carga senoidal en el primer intervale es $p(t) = p_0 \sin(\omega_d t)$ siendo $\omega_d = \frac{2\pi}{t}$.

La respuesta para el primer intervalo será la de un SUGL sometido a una carga senoidal, que la tenemos en el formulario:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left\{(1-\beta^2)\sin(\omega_d t) - 2\xi\beta\cos(\omega_d t)\right\}$$

siendo $\beta = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{T_n}{t_d}$. Simplificando para el caso $\xi = 0$, se obtiene,

$$u(t) = \frac{p_0}{k(1-\beta^2)}\sin(\omega_d t)$$

Esta solución era la del régimen permanente para una carga de este tipo, y nosotros estamos interesados en el régimen transitorio. Para que esta solución sea la completa hace falta que cumpla las concidiones iniciales de desplazamiento y velocidad nulas, y por tanto tendremos que añadir la parte correspondiente a la solución homogénea,

$$u(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) + \frac{p_0}{k(1-beta^2)}\sin(\omega_d t)$$

Las constantes A y B se obtienen obligando a que $u(0) = 0$ y que $\dot{u}(0) = 0$. Haciendo esto la solución completa es:

$$u^I(t) = \frac{p_0}{k(1-\beta^2)}\left\{\sin(\omega_d t) - \beta\sin(\omega_n t)\right\}$$

Para el segundo intervalo ($t > t_d$), dado que la carga total es nula en el mismo, lo más sencillo es obtener los valores de velocidad y desplazamiento en el instante $t = t_d$, y a partir de ese instante la solución será la de vibraciones libres. Para simplificar las expresiones, denominamos $x = \frac{t_d}{T_n}$

$$\begin{aligned} u_d &= u^I(t_d) = -\frac{p_0\beta}{k(1-\beta^2)}\sin(2\pi x) \\ v_d &= \dot{u}^I(t_d) = \frac{p_0\omega_d}{k(1-\beta^2)}\left\{1 - \sin(2\pi x)\right\} \end{aligned}$$

La solución para $t > t_d$ es entonces,

$$u^{II}(t) = u_d\cos\omega_n(t-t_d) + \frac{v_d}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_d)$$

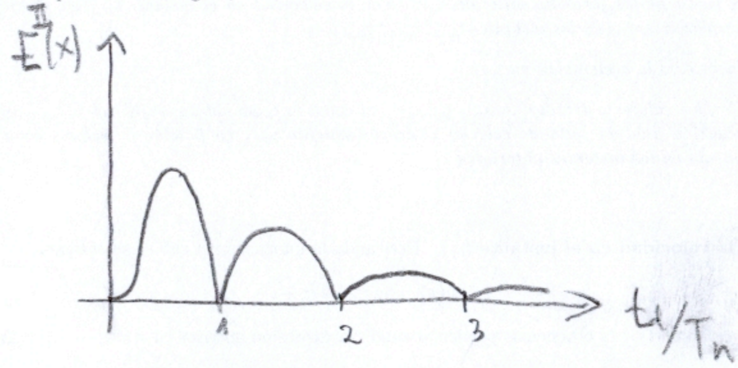
El máximo de esta función es su amplitud, ya que se trata de una función armónica,

$$\max_{t>t_d}\{u^{II}(t)\} = \sqrt{u_d^2 + (\frac{v_d}{\omega_n})^2}$$

El Espectro de respuesta para este impulso (teniendo en cuenta sólo el segundo intervalos) será $E^{II}(x) = \frac{\max_{t>t_d}\{u^{II}(t)\}}{U^{est}}$ siendo $U^{est} = \frac{p_0}{k}$. Teniendo en cuenta que $\beta = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{T_n}{t_d} = \frac{1}{x}$, el Espectro queda como,

$$E^{II}(x) = \left|\frac{2x\sin(\pi x)}{x^2-1}\right|$$

cuya forma se representa en la figura,



Para $\frac{t_d}{T_n} = x \to 0$ el Espectro tiende a:

$$E^{II}(x) = 2\pi x^2 + O(x^3)$$

de modo que no tiende a la soluciónde un impulso concentrado, que es de la forma $E(x) = 2\pi I x$ siendo I el valor total del impulso. £Por qué? Porque el impulso total de la fuerza que estamos considerando es nulo, ya que al integrarla en el tiempo se anula la parte positiva con la negativa.

EJERCICIO 2

El método de Houbolt para la resolución numérica de la ecuación de un SUGL se basa en aproximar el desplazamiento en el intervalo (t_i, t_{i+1}) mediante un polinomio cúbico:

$$u(\tau) = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \qquad \tau = t - t_i$$

tomando para la interpolación los valores del desplazamiento en los instantes t_{i-2}, t_{i-1}, t_i y t_{i+1}. Si se hace esto los coeficientes del polinomio anterior que se obtienen son:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{6\Delta t^3}\left[-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}\right] \qquad b = \frac{1}{2\Delta t^2}\left[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right] \\ c &= \frac{1}{6\Delta t}\left[u_{i-2} - 6u_{i-1} + 3u_i + 2u_{i+1}\right] \qquad d = u_i \end{aligned}$$

Sabido esto obtenga:

1. *A partir de las formulas anteriores, el valor la velocidad en el instante t_{i+1} en función de los desplazamientos de los instantes t_{i-2}, t_{i-1}, t_i y t_{i+1}.*
2. *Idem para la aceleración en t_{i+1}*
3. *Con los valores obtenidos de $\dot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$, así como la ecuación de equilibrio en t_{i+1}, obtenga la ecuación final que permite calcular el desplazamiento u_{i+1} en función de valores conocidos del mismo en los instantes anteriores.*

Valor la velocidad en el instante t_{i+1} Derivando la interpolación cúbica se obtiene:

$$\dot{u}(\tau) = 3a\tau^2 + 2b\tau + c$$

La velocidad en t_{i+1} la obtenemos particularizando la expresión anterior en $\tau = t_{i+1} - t_i = \Delta t$,

$$\dot{u}_{i+1} = 3a\Delta t^2 + 2b\Delta t + c$$

Sustituyendo los valores de a, b, y c y agrupando términos se llega a:

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t}\left(-\frac{1}{3}u_{i-2} + \frac{3}{2}u_{i-1} - 3u_i + \frac{11}{6}u_{i+1}\right)$$

Valor la aceleración en el instante t_{i+1} Derivando la expresión de la velocidad se obtiene:

$$\ddot{u}(\tau) = 6a\tau + 2b$$

La aceleración en t_{i+1} la obtenemos particularizando la expresión anterior en $\tau = t_{i+1} - t_i = \Delta t$,

$$\ddot{u}_{i+1} = 6a\Delta t + 2b$$

Sustituyendo los valores de a y b, y agrupando términos se llega a:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(-u_{i-2} + 4u_{i-1} - 5u_i + 2u_{i+1}\right)$$

Ecuación que permite calcular el desplazamiento u_{i+1}. Sustituyendo las expresiones anteriores de $\dot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$ en la ecuación de equilibrio dinámico del instante t_{i+1}

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}$$

y agrupando los términos que multiplican a u_{i+1} a la izquierda de la ecuación, y el resto a la derecha, se llega a,

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_{i+1}$$

siendo,

$$\hat{k} = k + \frac{11}{6\Delta t}c + \frac{2}{\Delta t^2}m$$

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left(\frac{5m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t}\right)u_i - \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{2\Delta t}\right)u_{i-1} + \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{3\Delta t}\right)u_{i-2}$$

Conocido u_{i+1} se obtendrán la velocidad y aceleración con las fórmulas obtenidas en los dos primeros apartados. Nótese que para calcular el desplazamiento u_1 harían falta los desplazamientos u_{-2} y u_{-1}, los cuales no existen. Igualmente para el instante u_2 necesitariamos u_{-1}. Hay diversas formas de sortear este problema, pero la más directa sería obtener u_1 y u_2 mediante algún otro método numérico y a partir de ahí aplicar las fórmulas del método de Houbolt.

EJERCICIO 3

Muchas cargas implusivas pueden representarse mediante combinación de cargas con descenso exponencial del tipo $p(t) = p_0 e^{-\omega_d t}$, siendo $\omega_d = \frac{2\pi}{t_d}$ un parámetro que mide la tasa con la que la carga va a cero. Para este tipo de carga, obtenga:

1. *La respuesta $u(t)$ de un SUGL amortiguado.*
2. *Dibújela de forma aproximada.*
3. *Expresión de $u(t)$ suponiendo $\xi = 0$.*

Este ejercicio puede hacerse de dos formas: resolviendo la ecuación diferencial o realizando la integral de Duhamel.

Resolviendo la ecuación diferencial La ecuación a resolver es:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_0}{m}e^{-at}$$

cuya solución será suma de una particular más la general de la homogénea,

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t)$$

Para la particular, probamos una solución exponencial del tipo

$$u_p(t) = Ae^{-at}$$

ya que la carga es de esta forma. Sustituyendo esta solución en la ecución diferencial se obtiene,

$$A(a^2 - 2\xi\omega_n a + \omega_n^2)e^{-at} = \frac{p_0}{m}e^{-at}$$

luego,

$$A = \frac{p_0}{m(a^2 - 2\xi\omega_n a + \omega_n^2)}$$

Nótese que el parétesis del denominador puede reescribirse de la siguiente forma,

$$a^2 - 2\xi\omega_n a + \omega_n^2 = (a - \xi\omega_n)^2 - (\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2 = \omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2$$

luego la solución particular queda,

$$u_p(t) = \frac{p_0}{m(\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2)}e^{-at}$$

La solución de la homogénea es la de vibraciones libres que viene dada por,

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{v_0 + \xi u_0\omega_n}{\omega_D}\sin(\omega_D t) + u_0\cos(\omega_D t)\right)$$

Suponiendo que el sistema parte del reposo, entonces, ha de cumplirse,

$$u_0 = -u_p(0) = -\frac{p_0}{m(\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2)}; \qquad v_0 = -\dot{u}_p(0) = \frac{ap_0}{m(\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2)}$$

luego la homogénea es,

$$u_h(t) = \frac{p_0}{m(\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2)}e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{a - \xi u_0\omega_n}{\omega_D}\sin(\omega_D t) - \cos(\omega_D t)\right)$$

y por tanto la solución completa es,

$$u(t) = \frac{p_0}{m(\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2)}\left\{e^{-at} + e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{a - \xi u_0\omega_n}{\omega_D}\sin(\omega_D t) - \cos(\omega_D t)\right)\right\}$$

Segundo parcial, 24-XI-2003. Análisis Avanzado de Estructuras
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Granada

Mediante la integral de Duhamel Dado que la carga es simple podemos calcular directamente la integral de Duhamel,

$$u(t) = \int_0^t p(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

Puesto que el SUGL tiene amortiguamiento,

$$h(\tau) = \frac{1}{m\omega_D}e^{-\xi\omega_n\tau}\sin\omega_D\tau$$

y por tanto,

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p_0 e^{-a(t-\tau)}e^{-\xi\omega_n\tau}\sin\omega_n\tau d\tau = \frac{p_0}{m\omega_D}e^{-at}\int_0^t e^{(a-\xi\omega_n)\tau}\sin\omega_n\tau d\tau$$

Teniendo en cuenta el valor de la siguiente integral,

$$\int_0^z e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{e^{\alpha\pi}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta z - \beta\cos\beta z)$$

que puede hacerse por partes, o mediante variable compleja, se obtiene,

$$u(t) = \frac{p_0}{m\omega_D}e^{-at}\left(\frac{\omega_D}{\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2} + \frac{e^{(a-\xi\omega_n)t}}{\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2}\left[(a - \xi\omega_n)\sin\omega_D t - \omega_D\cos\omega_D t\right]\right)$$

y operando,

$$u(t) = \frac{p_0}{m\left(\omega_D^2 + (a - \xi\omega_n)^2\right)}\left\{e^{-at} + e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{a - \xi\omega_n}{\omega_D}\sin\omega_D t - \cos\omega_D t\right)\right\}$$

Se obtiene la misma expresión con ambos métodos.