Matemática Discreta. Curso 2007/2008

Ingeniería Informática, grupo A.

Ingeniería Técnica de Sistemas, grupo A.

Relación de ejercicios sobre polinomios.

Prof. Dr. José Gómez Torrecillas

1. Decidir si el anillo de clases residuales $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x+1}$ es un cuerpo. ¿Cuántos elementos tiene dicho anillo? Calcular, si existe, el inverso de x^2+2 módulo x^3+x+1.

2. Calcular las raíces racionales del polinomio $f(x) = 3x^4+4x^3+3x^2+7x+4 \in \mathbb{Q}[x]$. Obtener una factorización de $f(x)$ como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$. ¿Es tal descomposición también una factorización como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[x]$?

3. Calcular el resto de dividir $x^{1500} + x + 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$ entre $x + 2$.

4. Calcular la factorización como producto de irreducibles de $x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Lo mismo para $x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

5. Calcular todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ que verifican $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 2$. De entre todos ellos, obtener los que tienen grado mínimo.

6. Decidir si el anillo de clases residuales $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^3+2}$ es un cuerpo. ¿Cuántos elementos tiene? Calcular, si existe, el inverso de x^3+1 módulo x^4+x^3+2.

7. Decicir si el anillo de clases residuales $\mathbb{Q}[x]_{x^3-2}$ es un cuerpo. Calcular el inverso de $\alpha = [x] \in \mathbb{Q}[x]_{x^3-2}$.

8. Calcular el máximo común divisor de $x^8 - 1$ y $x^4 - 1$ en $\mathbb{C}[x]$.

9. Sean $x_0, y_0, m_0 \in \mathbb{R}$. Demostrar que los polinomios que satisfacen que $f(x_0) = y_0$ y $f'(x_0) = m_0$ son, exactamente, las soluciones del sistema de congruencias

$$f(x) - y_0 \equiv 0 \ (mod(x - x_0)), \qquad f(x) - y_0 \equiv m_0(x - x_0) \ (mod(x - x_0)^2)$$

10. Calcular todos los polinomios $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ que verifican que $f(0) = 1, f(1) = 0, f'(0) = -1, f'(1) = 1$. De entre ellos, calcular los que tengan grado mínimo.

11. Calcular un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado lo menor posible tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(x)$ alcanza un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 1$.

12. Calcular un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado lo menor posible tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(x)$ alcanza un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = 1$.

13. Calcular una factorización como producto de irreducibles de $f(x) = x^5 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.