MATEMÁTICA DISCRETA. TEMA 4

Conjuntos ordenados y álgebras de Boole. Curso 2007-2008. II-A, ITS-A

Ejercicio 1. Dibuja el diagrama de Hasse de $(D(20), |)$.

1. Dado $B = \{4, 10, 2\} \subseteq D(20)$, encuentra sus elementos notables.
2. Encuentra los elementos minimales de $B = D(20) \setminus \{1\}$.

Ejercicio 2. Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$. Encuentra los elementos minimales y maximales de $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) \setminus \{\emptyset, \{a, b, c, d\}\}$.

Ejercicio 3. Supongamos dos conjuntos ordenados $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$. Recordemos que el orden producto $\leq$ está definido sobre el producto cartesiano $X_1 \times X_2$ mediante

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq_1 y_1 \\ \textbf{y} \\ x_2 \leq_2 y_2 \end{cases}$$

Comprobar que el orden producto verifica los axiomas de relación de orden.

Ejercicio 4. Supongamos dos conjuntos ordenados $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$. Recordemos que el orden lexicográfico $\leq_{lex}$ está definido sobre el producto cartesiano $X_1 \times X_2$ mediante

$$(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 <_1 y_1 \\ \textbf{o} \\ x_1 = y_1 \textbf{ y } x_2 <_2 y_2 \end{cases}$$

Demostrar que el orden lexicográfico así definido verifica los axiomas de relación de orden y que es un orden total, siempre que X_1 y X_2 lo sean. Intentar demostrar que, si X_1 y X_2 son conjuntos bien ordenados, entonces $(X_1 \times X_2, \leq_{lex})$ es un conjunto bien ordenado (es decir, que cada subconjunto no vacío tiene mínimo).

Ejercicio 5. Consideremos $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ con el orden $0 < 1$. Dibujar los diagramas de Hasse del producto cartesiano $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ con el orden producto y con el orden lexicográfico. Comentar las diferencias.

Ejercicio 6. Demuestra que en un retículo distributivo $(L, \vee, \wedge)$ se verifica

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x),$$

pero que esta igualdad no es cierta en el siguiente retículo

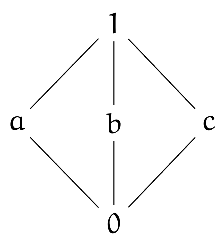


Figura 1:

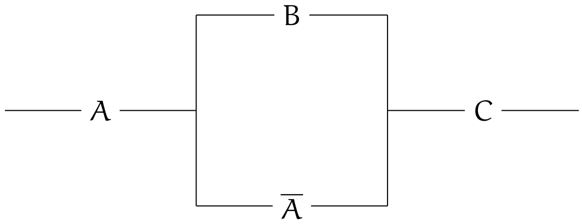
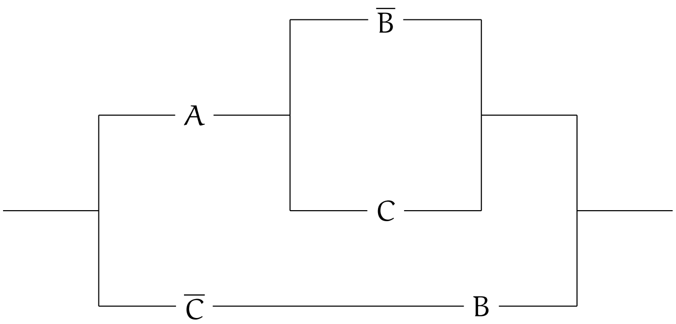


Figura 2:



Ejercicio 7. Sea $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in \mathcal{B}$. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $a\overline{b} = 0$,

(b) $a + b = b$,

(c) $\overline{a} + b = 1$,

(d) $ab = a$.

Ejercicio 8. Además de los circuitos lógicos construidos usando las llamadas puertas lógicas, podemos construir los llamados circuitos conmutadores, donde cada literal está representado por un conmutador o interruptor, y las puertas lógicas AND y OR se representan, respectivamente, por conmutadores montados en serie o en paralelo (ver, por ejemplo, la figura 1). Construye un circuito lógico y un circuito conmutador asociado a cada una de las funciones booleanas representadas por las expresiones

(a) $(A \vee B) \vee (\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee A \vee B)$,

(b) $(A \vee B) \wedge C \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C})$,

(c) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B \wedge C)$.

Ejercicio 9. Determina una expresión booleana cuya función booleana se corresponda con cada uno de los circuitos conmutadores que aparecen en las figuras 1, 2, 3, 4, 5.

Ejercicio 10. Simplifica los circuitos conmutadores de las figuras 1, 2, 3, 4 y 5.

Figura 3:

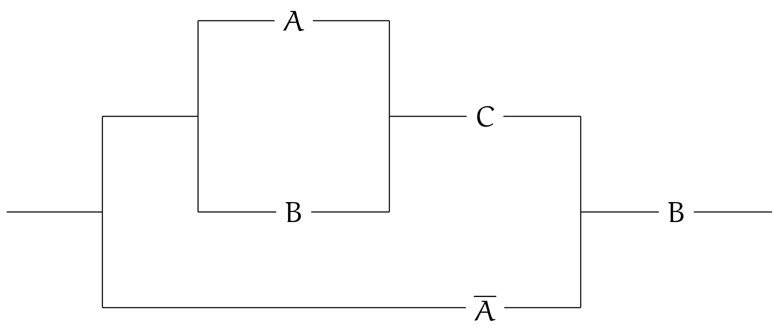


Figura 4:

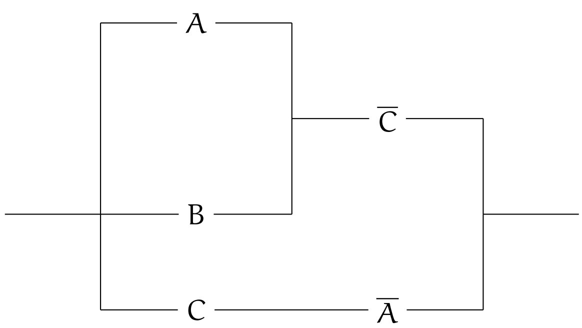
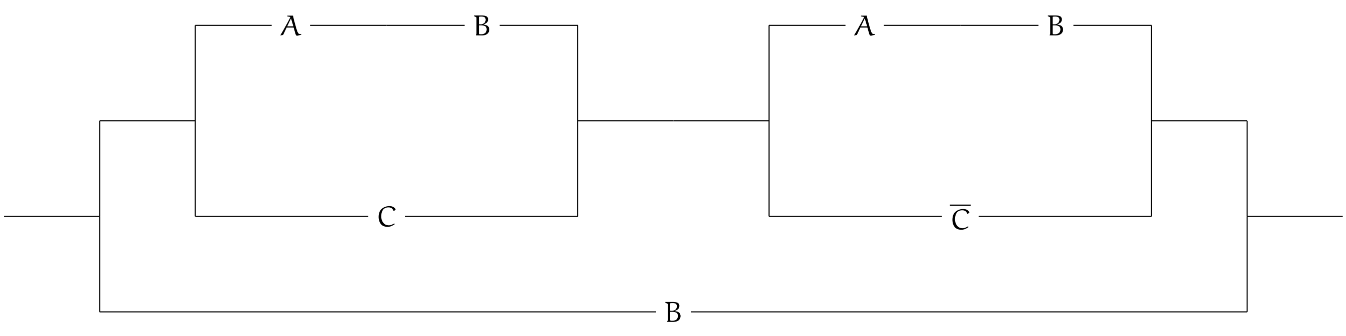


Figura 5:



Ejercicio 11. Calcula la forma normal canónica disyuntiva (es decir, suma de minterms) y simplifica las funciones booleanas dadas por las tablas

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Ejercicio 12. Demuestra que todo conjunto totalmente ordenado es un retículo distributivo. ¿Cuándo es un álgebra de Boole?

Ejercicio 13. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la función booleana $f(x, y, z) = (x \uparrow y) \vee z$.

Ejercicio 14. ¿Cuántos átomos tiene un álgebra de Boole con 32 elementos?

Ejercicio 15. Expresa, utilizando sólo la función $\downarrow$, la aplicación $f(x, y, z) = (x \vee z) \wedge y$.

Ejercicio 16. Sea L un retículo complementado. Prueba que si L tiene tres o más elementos, entonces L no es totalmente ordenado.

Ejercicio 17. Demuestra que el producto cartesiano de retículos distributivos es un retículo distributivo. Demuestra que el producto cartesiano de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.

Ejercicio 18. Si para un álgebra de Boole finita B conocemos el conjunto M de todos sus átomos, así como la expresión de un elemento x de B como supremo de átomos, ¿cómo podríamos obtener la expresión de $\overline{x}$ como supremo de átomos? Razona la respuesta.

Ejercicio 19. Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SÍ" pulsando un botón. Diseñar una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos SÍ".

Ejercicio 20. Sea I el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[0, 1]$. Para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = max\{a, b\}$, $a \wedge b = min\{a, b\}$ y $\overline{a} = 1 - a$ ¿Es I respecto de estas operaciones un álgebra de Boole? Razona la respuesta.

Ejercicio 21. Se conocen los siguientes hechos sobre cuatro personas A, B, C y D.

(a) Si A ve una película entonces B también la ve.

(b) C y D no ven la misma película juntos.

(c) B y C o bien ven la misma película juntos o no la ve ninguno de los dos.

(d) Si A no ve una película entonces B y C la ven.

¿Quién está viendo la película?

Ejercicio 22. Definamos la función booleana $x \to y$ definida por la tabla

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Llamemos a esta función IFTHEN. Estudiar si el conjunto formado IFTHEN y NOT es funcionalmente completo.