Números Naturales y Números Enteros. Curso 2007-2008.

Ejercicio 1. Usa el principio de inducción para probar las siguientes afirmaciones:

1. $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$,
2. $0+1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo $n\in\mathbb{N}$,
3. $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ para todo natural $n\geq 1$,
4. 7^n-1 es un múltiplo de 6 para todo $n\in\mathbb{N}$,
5. $7^{2n}+16n-1$ es un múltiplo de 64 para todo $n\in\mathbb{N}$,
6. $a^{2n}-b^{2n}$ es divisible por $a+b$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y cualesquiera $a,b\in\mathbb{Z}$
7. $\frac{1}{2n}\leq\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$ para $n\geq 1$,
8. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para $n\geq 2$,
9. $2^n\geq 2n+1$ para $n\geq 3$,
10. $2^n\geq n^2$ para $n\geq 4$.

Ejercicio 2. Expresar en base 3 el número $n=(34321)_5$.

Ejercicio 3. Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

1. $3\times 4=22$,
2. $41\times 14=1224$,
3. $52\times 25=1693$,
4. $25\times 13=51$,
5. $13^4=14641$

Ejercicio 4. Da la expresión en base 8 y en base 16 de los naturales que en base 2 se escriben:

1. 10110110001001101011,
2. 10001000000100110,
3. 1011101111011111

Ejercicio 5. Demuestra que para $B\geq 3$, los números $(B-1)^2$ y $2(B-1)$ se escriben en base B como ab y ba respectivamente.

Ejercicio 6. Prueba que dado un número entero cualquiera m se verifica una de las siguientes posibilidades:

1. $m^2 \equiv 0 \pmod{8}$,
2. $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$,
3. $m^2 \equiv 4 \pmod{8}$

Ejercicio 7. Prueba que si x es un número entero e impar no divisible por 3 entonces $x^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Ejercicio 8. Resuelve las siguientes congruencias:

1. $3x \equiv 2 \pmod{5}$,
2. $7x \equiv 4 \pmod{10}$,
3. $6x \equiv 3 \pmod{4}$.

Ejercicio 9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

1. $$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ 6x \equiv 3 \pmod{9} \\ 3x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

Ejercicio 10. Tres granjeros dividen en partes iguales el arroz que han cultivado en común. Fueron a mercados diferentes en los que se usaban medidas de peso diferentes: en un lugar era de 7 kilos, en otro de 15 kilos y en el último de 19 kilos. Cada uno vendió todo lo que pudo en medidas enteras en sus respectivos mercados y a la vuelta al primer granjero le sobraban 6 kilos, al segundo 11 y al tercero 14. ¿Cuánto arroz habían cultivado?

Ejercicio 11. Calcula el resto de dividir 4225^{1000} entre 7.

Ejercicio 12. Calcula el número de divisores positivos de 120.

Ejercicio 13. Demuestra que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional. Como aplicación, demuestra que $\sqrt{75}$ es irracional.

Ejercicio 14. Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ de la ecuación

$$2x + 3y = 7.$$

Ejercicio 15. Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ de la ecuación

$$6x + 10y = 16.$$

Ejercicio 16. Demuestra que el conjunto de los números primos es infinito.

Ejercicio 17. Encuentra un número entero cuyo resto al dividirlo entre 5 sea 3 y que al multiplicarlo por 3 y dividirlo entre 4 dé resto 1.

Ejercicio 18. Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: *Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste murieron cinco de los piratas que aún quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación.* Sabiendo que en el cofre no caben más de dos mil quinientas monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?

Ejercicio 19. Resuelve la ecuación en congruencias

$$x^2 - 3x + 3 \equiv 0 \pmod 7$$

Ejercicio 20. Resuelve el sistema de ecuaciones en congruencias

$$\begin{cases} 5x - 7y \equiv 9 & \pmod{12} \\ 2x + 3y \equiv 10 & \pmod{12} \end{cases}$$

Ejercicio 21. Calcula todas las soluciones en $\mathbb{Z}$ de la ecuación

$$35x + 45y + 55z = 60.$$

Ejercicio 22. Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ de la ecuación

$$6x + 9y + 15z = 7.$$

Ejercicio 23. Calcula las soluciones en $\mathbb{Z}$ de la ecuación

$$6x + 10y + 15z = 7.$$

Ejercicio 24. Demuestra que un número escrito en base 10 es par si y sólo si su última cifra es par.

Ejercicio 25. Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Ejercicio 26. Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

Ejercicio 27. Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.

Ejercicio 28. Demuestra que un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11

Ejercicio 29. Demuestra que un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.

Ejercicio 30. Determina el número entero entre 1500 y 2500 que verifica que sus dos últimas cifras en base 2 son 11, sus dos últimas cifras en base 3 son 00, y sus dos últimas cifras en base 5 son 12.

Ejercicio 31. Calcula 47^{2007} módulo 7 y el inverso de su clase en $\mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 32. ¿Cuáles son los números naturales n tales que $\varphi(n) = 10$?