Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 7.

1. Clasificar como algebraico o transcendente sobre $\mathbb{Q}$ cada uno de los números complejos siguientes:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2},\ 1+i,\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{1+\sqrt[3]{2}},\ \sqrt{\pi}.$$

2. Razonar cuales de los siguientes números complejos son algebraicos o trascendentes sobre $\mathbb{Q}$:

$$\sqrt{7}, \qquad \sqrt[3]{3}, \qquad \pi^2, \qquad e^3+1, \qquad \sqrt{i}+2$$

3. Argumentar que el polinomio $f(X) = X^3 + 3X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y, entonces, que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de ese polinomio

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Expresar de esa forma los elementos $(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$ y $(1+\alpha)/(1+\alpha+\alpha^2)$.

4. Calcular $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ en los siguientes casos:

$$\alpha = 2+\sqrt{5}, \qquad \alpha = \sqrt[4]{5}+\sqrt{5}, \qquad \alpha = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$

5. Calcular $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ en los siguientes casos:

1. $\alpha = \beta^2 - 1$ siendo β una raíz del polinomio $X^3 - 2X - 2$.
2. $\alpha = \beta^2 + \beta$ siendo β una raíz del polinomio $X^3 + 3X^2 - 3$.
3. $\alpha = 1/\beta^2$ con β una raíz del polinomio $X^4 + X^3 + 1$.

6. Calcular $[F : \mathbb{Q}]$ en los siguientes casos:

$$\begin{array}{ccc} F = (\sqrt{7}, i), & F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-2}), & F = \mathbb{Q}(\sqrt{18}, \sqrt[4]{2}), \\ F = \mathbb{Q}(\sqrt{8}, 3+\sqrt{50}), & F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), & F = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-5}, \sqrt{7}), \\ F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \beta) & & \end{array}$$

donde en el último caso β es una raíz del polinomio $X^4 + 6X + 2$. En cada uno de los casos dar una base de $F/\mathbb{Q}$.

7. Demostrar que cualquier elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ puede expresarse de forma única como

$$a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Calcular explícitamente el inverso de $1 + \sqrt{3} - \sqrt{15}$.

8. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de cuerpos. Hallar una base de ella y expresar

$$\left(\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2}\right)^{-1}, \qquad \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}-1}, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2-\sqrt[3]{2}}$$

en función de los elementos de la base.

9. Sea E/K una extensión de cuerpos y F/K una subextensión. Demostrar que E/K es algebraica si, y sólo si, E/F y F/K son algebraicas (no suponemos que las extensiones son finitas).

10. Encontrar una base de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$. Expresar en función de dicha base el inverso de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

11. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de cuerpos. Hallar una base de ella y expresar $(\sqrt[3]{5} + \sqrt{2})^{-1}$ en función de los elementos de la base.

12.

1. Calcular $\operatorname{Irr}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \mathbb{Q})$.
2. Demostrar que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Deducir que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$.
3. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
4. Describir dos bases diferentes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

13. Demostrar que si $\operatorname{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - 2$ y $\operatorname{Irr}(\beta, \mathbb{Q}) = x^2 - 4x + 2$, entonces $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$.

14. Sea α una raíz de $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Demostrar explícitamente (mediante un polinomio) que los elementos $\alpha + 1$ y α^2 son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$. ¿Cuáles son los grados de sus polinomios irreducibles?

15. Demostrar que si $f(X)$ es un polinomio irreducible sobre K de grado n y si F/K es una extensión finita de grado primo relativo con n entonces $f(X)$ es irreducible sobre F.

16. Demostrar que si F/K es una extensión de grado primo entonces para todo $\alpha \in F$, $\alpha \notin K$ se tiene $F = K(\alpha)$.

17. Demostrar que si $[K(\alpha) : K]$ es impar entonces $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

18. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{i}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Concluir que el polinomio $x^4 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$