Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 6.

1. Demostrar que todo grupo con 6 elementos es isomorfo o bien a C_6 o bien a S_3.

2. Un subgrupo H de un grupo G se dice *característico* si $\varphi(H) \subseteq H$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Demostrar que todo subgrupo característico es normal (aquí $\mathrm{Aut}(G)$ denota el subgrupo del grupo simétrico $S(G)$ cuyos elementos son los automorfismos de G).

3. Demostrar que el centro de un grupo es un subgrupo característico.

4. Calcular el centro de S_3. Más en general, calcular el centro de cualquier S_n.

5. Calcular las clases de conjugación de A_4.

6. Demostrar que si G es un grupo finito no abeliano, entonces $G/Z(G)$ no es cíclico. Deducir que $[G : Z(G)]$ no es un número primo.

7. Determinar la estructura de todos los p–subgrupos de Sylow de A_5 y de S_5 (p es un divisor primo de 120).

8. Calcular los 3–subgrupos de Sylow de S_3 y S_4.

9. Demostrar que ningún grupo de orden $12, 15, 28, 30, 56, 132, 200$ es simple. ¿De cuáles tengo la seguridad que son resolubles?

10. Todo grupo de 130 elementos tiene un subgrupo normal de orden 13. Deducir que tal grupo es resoluble.

11. ¿Cuántos elementos de orden 7 existen en un grupo simple de orden 168?

12. Demostrar que no hay grupos simples de orden $p^n m$, donde p es primo y $m < p$.

13. Sea p un número primo y H un subgrupo de S_p que contiene una trasposición. Si p divide a $|H|$, entonces $H = S_p$.