Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 5.

1. Sea H un subgrupo de un grupo G. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) H es un subgrupo normal de G;
(b) $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$;
(c) $gHg^{-1} \subseteq H$ para todo $g \in G$.

2. Sea H un subgrupo de un grupo G y $g \in G$. Demostrar que gHg^{-1} es un subgrupo de G isomorfo a H.

3. Calcular todos los subgrupos normales de C_8 y los grupos cocientes correspondientes.

4. Calcular todos los subgrupos normales de D_4 y los grupos cocientes correspondientes.

5. Calcular todos los subgrupos normales de Q_2 y los grupos cocientes correspondientes.

6. Calcular todos los subgrupos normales de A_4 y los grupos cocientes correspondientes.

7. Calcular todas las series de composición de D_4.

8. Calcular todas las series de composición de C_{100}.

9. Calcular todas las series de composición de A_4 y deducir que es un grupo resoluble.

10. Calcular una serie de composición de S_4 y deducir que es un grupo resoluble.

11. Dar un grupo abeliano con una serie de composición isomorfa a una serie de composición de S_4.

12. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G tal que $N \cong A_4$ y $G/N \cong S_3$. Calcular (salvo isomorfismo, claro) los factores de composición de G. ¿Cuál es la longitud de G? ¿Es G resoluble?.

13. Sean G_1 y G_2 dos grupos finitos. Describir un procedimiento para construir una serie de composición de $G_1 \times G_2$ a partir de series de composición de G_1 y G_2. ¿Cuál es la longitud de $G_1 \times G_2$?. Como aplicación, calcular una serie de composición de $C_2 \times C_4 \times C_8$.