Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 4.

1. Si $\sigma, \tau \in S_n$ son permutaciones disjuntas, mostrar que el orden de la permutación producto $\sigma\tau$ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de σ y τ.

2. Calcular el orden de las permutaciones $(1,2,3)(3,4,5)(1,2,3)$ y $(2,4)(3,5)(1,3)(1,4)(2,5)$. Dar un método general para el cálculo del orden de una permutación.

3. Sean a y b elementos de un grupo finito que conmutan, es decir, se satisface que $ab = ba$. Supongamos que el orden de a y el orden de b son primos entre sí. Entonces $\mathrm{or}(ab) = \mathrm{or}(a)\mathrm{or}(b)$.

4. Calcular el retículo de subgrupos de $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$.

5. Calcular el retículo de subgrupos de C_8.

6. Calcular el retículo de subgrupos de S_3.

7. Calcular el retículo de subgrupos de A_4.

8. Calcular el retículo de subgrupos de D_4.

9. Calcular el retículo de subgrupos de Q_2.

10. Calcular el retículo de subgrupos de C_{12}.

11. Demostrar que si G es un grupo con n elementos, entonces $a^n = e$ para todo $a \in G$.

12. Demostrar que dos grupos cíclicos finitos son isomorfos si y sólo si tienen el mismo número de elementos.

13. Describir el retículo de subgrupos de un grupo cíclico cuyo orden es una potencia de un número primo.

14. Sean $a, x \in G$, un grupo finito. Demostrar que x y axa^{-1} tienen el mismo orden.

15. Calcular el número de generadores del grupo cíclico C_{100}.

16. Demostrar el *Teorema de Euler*: Para todo entero positivo n y todo entero m primo con n se verifica $m^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod} n)$. Nota: usar el grupo $\mathbb{Z}_n^\times$.

17. Determinar los dos últimos dígitos de $3^{3^{100}}$.