Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 3.

1. Mostrar isomorfismos explícitos entre $\mathbb{C}_2$, S_2 y $\mathbb{Z}_3^{\times}$.

2. Mostrar dos isomorfismos distintos entre $\mathbb{C}_4$ y $\mathbb{Z}_5^{\times}$.

3. Demostrar que, para cada entero positivo n, existe un isomorfismo entre el grupo aditivo $\mathbb{Z}_n$ y el grupo multiplicativo $\mathbb{C}_n$.

4. Mostrar un isomorfismo entre $\mathbb{Z}_8^{\times}$ y $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$.

5. Sea $f : X \to Y$ una biyección. Comprobar que la aplicación $\psi : S(X) \to S(Y)$ definida por $\psi(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$ para $\sigma \in S(X)$ es un isomorfismo de grupos.

6. Razonar que si G es un grupo, H es un subgrupo de G y $J \subseteq H$ es un subconjunto no vacío de H, entonces J es un subgrupo de H si y sólo si J es un subgrupo de G.

7. Demostrar que $S_n = \langle (1,2), (2,3), \dots, (n-1, n) \rangle$.

8. Demostrar que $S_n = \langle (1,2), (1,2,\dots,n) \rangle$.

9. Dado el grupo diédrico $D_n = \langle r, s \rangle$, con r la rotación de ángulo $2\pi/n$ y s una simetría, demostrar que $D_n = \langle s, rs \rangle$.

10. Demostrar que el grupo quaternio Q_2 está generado por i, j.

11. Consideremos las matrices de $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ dadas por $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Demostrar que $Q = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$ es isomorfo al grupo cuaternio Q_2.

12. Sean a, b elementos de un grupo G. Supongamos que existen naturales $k.n, m$ tales que $a^n = b^m = 1$ y $ba = ab^k$. Demostrar que todo elemento de $\langle a, b \rangle$ puede escribirse de la forma $a^r b^s$ con $0 \leq r < n$, $0 \leq s < m$.

13. Sea X un subconjunto no vacío de un grupo G. Argumentar que X es un subgrupo si y sólo si $X = \langle X \rangle$.

14. Ley Modular. Supongamos que A, B, y C son subgrupos de un grupo G con $A \leq B$. Demostrar que $B \cap AC = A(B \cap C)$ y que $B \cap CA = (B \cap C)A$. Nota: no estamos suponiendo que estos subconjuntos de G sean necesariamente subgrupos.

15. Vamos a describir el grupo de movimientos rígidos (isometrías de determinante 1) de un tetraedro, y el de isometrías. Para ello, numeramos los vértices del tetraedro (por $1, 2, 3, 4$) y representamos cada isometría como una permutación de los vértices, dicho de otro modo, como un elemento de S_4. Así, lo que estamos diciendo es que las isometrías del tetraedro forman un subgrupo de S_4. Comencemos por los giros: tomando como eje de giro la altura que pasa por un vértice dado, obtengo dos giros no triviales. Deducir que, entonces el grupo de movimientos rígidos es A_4 y, de aquí, que el grupo de isometrías es S_4. Para terminar el ejercicio, es conveniente identificar explícitamente los giros y las simetrías del tetraedro regular con las permutaciones correspondientes.

16. Vamos a describir el grupo de movimientos rígidos del cubo. Para ello, observamos que cada movimiento rígido determina una permutación de las diagonales principales del cubo. Si las numeramos (por $1, 2, 3, 4$), esto permite representar nuestro grupo como un subgrupo de S_4. Afirmamos que ha de ser, precisamente, S_4. Para ello, el alumno puede considerar que el eje de simetría que pasa por el centro de cada cara «genera» algunas rotaciones no triviales (¡cuéntense!). Además, uniendo aristas opuestas por sus puntos medios, se obtienen otros ejes de giro. En este punto, el alumno debe deducir que nuestro grupo es, en este caso, S_4. Para terminar el ejercicio, es recomendable identificar explícitamente a qué giro corresponde cada permutación de las diagonales. También es interesante deducir que el grupo de isometrías del cubo tiene 48 elementos.