Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 2.

1. Consideramos en el conjunto $\mathbb{Z}$ la operación binaria $*$ definida por $a * b = a + b + 1$, para $a, b \in \mathbb{Z}$. Demostrar que $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo abeliano.

2. Sean $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ grupos y definamos sobre el producto cartesiano $G_1 \times G_2$ la operación $*$ dada por $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$. Demostrar que $(G_1 \times G_2, *)$ es un grupo.

3. Definamos, para una permutación $\sigma \in S_n$, su soporte como el conjunto de aquellos $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $\sigma(i) \neq i$. Dos permutaciones se dicen disjuntas si tienen soportes disjuntos. Demostrar que dos permutaciones disjuntas conmutan.

4. Descomponer las siguientes permutaciones como productos de ciclos disjuntos y como producto de trasposiciones, calculando asímismo sus signaturas:

1. (1345)(2456)(45)
2. (5342)(2143)(1234)
3. (8976)(56789)
4. (2345)(5432)(12)(23)

5. Comprobar que para cada permutación $\sigma \in S_n$ y cada ciclo $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ se verifica

$$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_r)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_r))$$

6. Escribir la tabla de multiplicar de S_3.

7. Consideremos $\sigma, \tau \in S_3$ dadas por $\sigma = (1, 2, 3)$ y $\tau = (1, 2)$. Comprobar que $S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ y reescribir la tabla de multiplicar de S_3 usando la anterior presentación de los elementos de S_3.

8. Describir todos los posibles ciclos de S_4 y expresar todos los elementos de S_4 como producto de ciclos disjuntos.

9. Sea $\sigma \in S_n$. Demostrar que σ y σ^{-1} tienen idénticas signaturas.

10. Un ciclo $(a_1, \ldots, a_r)$ es par si y sólo si r es impar. Busca una demostración.

11. Describir los grupos (con tabla de multiplicar) A_n, con $n = 2, 3, 4$.

12. Si $\sigma = (a_1, \ldots, a_r) \in S_n$ es una permutación cíclica, entonces $\sigma^r = 1$ pero $\sigma^m \neq 1$ para $m < r$.