Ecuaciones Algebraicas. Curso 2002/2003.
Relación de ejercicios número 1.

1. Escribir las tablas de sumar y multiplicar para $\mathbb{Z}_6$.

2. Decidir cuáles de los siguientes elementos tienen inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_{69}$: $4, 7, 13, 40$. En caso de respuesta positiva, calcular el inverso.

3. Resolver la ecuación $4x = 13$ en $\mathbb{Z}_{69}$. Esta ecuación está directamente relacionada con la congruencia $4x \equiv 13(\mathrm{mod}\ 69)$. ¿Cuál es dicha relación?

4. Dar un ejemplo que demuestre que, si n, m no son coprimos, entonces el isomorfismo $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ no se tiene.

5. Calcular $\varphi(8), \varphi(72), \varphi(100)$.

6. Demostrar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$, entonces el grupo G es abeliano.

7. Escribir la tabla de multiplicar de varios $\mathbb{C}_n$ (por ejemplo, para $n = 2, 3, 4$).

8. Escribir la tabla de multiplicar de varios $\mathbb{Z}_n^\times$ (por ejemplo, para $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$).

9. Razonar que $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ tiene seis elementos. Comprobar que, si $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$GL_2(\mathbb{Z}_2) = \{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$$

Usar esta presentación de los elementos de $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ para escribir su tabla de multiplicar.

10. Sea k un cuerpo finito con q elementos. Demostrar que el orden de $GL_n(k)$ es $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$.

11. Escribir la tabla de multiplicar de Q_2, usando la descripción de sus elementos como matrices.

12. Supongamos que, prescindiendo de matrices, hubiéramos definido Q_2 como un grupo con ocho elemetos $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ cuya multiplicación verifica

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$
$$(-1)^2 = 1, (-1)i = -i, (-1)j = -j, (-1)k = -k;$$
$$ij = k$$

1. Demostrar que

$$i(-1) = -i, j(-1) = -j, k(-1) = -k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

2. Volver a escribir la tabla de Q_2, usando las anteriores relaciones.