Algebra. Curso 2003/2004.
Relación de ejercicios número 3.

Profesor José Gómez Torrecillas

1. Deducir del Teorema de la Base que el anillo de coordenadas $k[V]$ de una variedad algebraica V es noetheriano.

2. Demostrar que el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en un cuerpo es una variedad algebraica irreducible.

3. Discutir la irreducibilidad de las cónicas en el plano afín real.

4. Demostrar que toda parábola real es isomorfa, como variedad algebraica, a una recta afín. Mostrar que esto no es así para las hipérbolas. Estudiar el caso de las elipses.

5. Sea $f(x)$ un polinomio en una variable con coeficientes en un cuerpo k. Demostrar que la *gráfica* de f, definida como $\{(x, f(x)) \mid x \in k\} \subseteq k^2$ es una variedad algebraica isomorfa a la recta afín k. Generalizar al caso de gráficas de funciones polinómicas en varias variables.

6. ¿Puede ser una elipse real isomorfa, como variedad algebraica, a una hipérbola real? Sugerencia: puedes mirar con ojos euclidianos. ¿Qué ocurre en el caso complejo?

7. * En vista del conocimiento acumulado en los ejercicios 3, 4 y 6, ¿te atreves a escribir una pequeña disertación con el título: «Clasificación algebraica de las cónicas reales y complejas».

8. Para cada punto p de una variedad algebraica $V \subseteq k^n$ definimos

$$\mathfrak{m}_p = \{\phi \in k[V] \mid \phi(p) = 0\}$$

(a) Demostrar que $\mathfrak{m}_p$ es un ideal de $k[V]$.

(b) Si $p = (a_1, \dots, a_n)$, demostrar que el ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$ dado por $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ da un isomorfismo de k–álgebras $k[x_1, \dots, x_n]/\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \cong k$.

(c) Demostrar que $\mathfrak{m}_p$ es maximal y que, de hecho, $\mathfrak{m}_p = \langle {}^V x_1 - a_1, \dots, {}^V x_n - a_n \rangle$, donde ${}^V x_1, \dots, {}^V x_n$ son las funciones coordenadas de V.

(d) Consideremos el conjunto $\mathrm{Max}(k[V])$ de los ideales maximales de $k[V]$. Demostrar que la aplicación $V \to \mathrm{Max}(k[V])$ que asigna a cada $p \in V$ el ideal $\mathfrak{m}_p$ es inyectiva.

(e) Deducir del Teorema de los Ceros que si k es algebraicamente cerrado, entonces la aplicación del apartado anterior es una biyección.

(f) Exhibir un ejemplo, para $k = \mathbb{R}$, de variedad V para la que $\mathrm{Max}(k[V])$ es «más grande» que V.