Algebra. Curso 2004/2005.

Quinta hoja de trabajo recomendado para casa.

Profesor José Gómez Torrecillas

ALUMNO: ....

1. Dibujar las siguientes variedades algebraicas reales.

(a) $\mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1)$,

(b) $\mathcal{V}(x^2 + y^2 + 1)$,

(c) $\mathcal{V}(x^2 + y^2 - z^2)$,

(d) $\mathcal{V}(y - x^2, z - x^3)$,

(e) $\mathcal{V}(xz - yz)$,

(f) $\mathcal{V}(y^3 - x^2)$.

2. Demostrar que la gráfica de una función racional es una variedad algebraica en el plano.

3. Sean $V, W \subseteq k^n$ variedades algebraicas. Demostrar que $V \cup W$ y $V \cap W$ son variedades algebraicas.

4. Demostrar que todo subconjunto finito de k^n es una variedad algebraica.

5. Supongamos un ingenio mecánico compuesto de dos varillas (que llamaremos brazo y mano) de longitudes 2 y 1, respectivamente. El brazo está anclado en el origen de coordenadas y su movimiento de giro con respecto de este anclaje está confinado en el plano OYZ, en tanto que la mano puede girar libremente en el espacio. Describir algebraicamente el conjunto de puntos del espacio real tridimensional que puede alcanzar el extremo de la mano.

6. Estudiar el comportamiento de la correspondencia de Zariski con respecto de las operaciones (unión, intersección) con variedades algebraicas en k^n y operaciones con ideales (suma, producto) de $k[x_1, \dots, x_n]$.

7. Demostrar que la intersección de un conjunto cualquiera de variedades algebraicas es una variedad algebraica. Analizar el caso de la unión.

8. Describir la correspondencia de Zariski en el caso de la recta afín real y en el caso de la recta afín compleja. ¿Cuál de los dos casos te parece "mejor"?.

9. Consideremos el polinomio $f = x^4 + y^2 - 2x^2 + 1$ y la curva real $H = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Demostrar que H no es irreducible, en tanto que $f \in \mathbb{R}[x, y]$ sí lo es. ¿Qué ocurre en el caso complejo?

10. Demostrar que la curva algebraica compleja $H = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{C}^2$ es irreducible. Demostrar que la circunferencia real $C = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ es asimismo irreducible. Demostrar que, no obstante, C puede ser definida también como el conjunto de ceros en $\mathbb{R}^2$ de $f = x^4 + x^2y^2 + y^2 - 1$. Factorizar $f \in \mathbb{R}[x, y]$ y sacar conclusiones.

11. Estudiar la irreducibilidad de las curvas real y compleja de ecuación

$$y^2 - (x-1)x(x+1) = 0.$$

Dibujar la curva real. Si la vemos con «mirada euclidiana», ¿cuántas componentes conexas tiene?. Extraer conclusiones.

12. Demostrar que las subvariedades de una variedad algebraica X son los cerrados para una topología, llamada topología de Zariski sobre la variedad. Describir los abiertos de esta topología en el caso $X = k$, la recta afín. ¿Es esta topología Hausdorff?

Entrega: 25 de febrero