Algebra. Cuarto de Matemáticas. Curso 2004/2005.

Prueba escrita presencial final. Teoría.

Profesor José Gómez Torrecillas

Instrucciones

Las cuestiones (numeradas de 1 a 10) se valorarán como $0,15$ si la opción elegida es correcta, como 0 si no se contesta y como $-0,10$ si la opción elegida es incorrecta. Las preguntas teóricas (numeradas de 11 a 20) se valorarán como $0,15$ si la respuesta es correcta, o como 0 en otro caso.

Cuestiones

En los siguientes enunciados, marcar la opción correcta (A), (B) o (C).

1. Sea T el subespacio vectorial complejo del anillo de polinomios $\mathbb{C}[X]$ que tiene como base el conjunto $\{X^{2k} : k \geq 0\}$. Entonces

(A) T es un subanillo de $\mathbb{C}[X]$

(B) T es un ideal de $\mathbb{C}[X]$

(C) Ninguno de los anteriores.

2. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo de polinomios $\mathbb{R}[X,Y]$ tal que $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Entonces

(A) $\mathfrak{a} = \mathbb{R}[X,Y]$

(B) $\mathfrak{a}$ no está contenido en ningún ideal maximal

(C) Ninguno de los anteriores.

3. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo de polinomios $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ tal que $\mathfrak{a} = I(V(\mathfrak{a}))$. Entonces

(A) $\mathfrak{a} = 0$

(B) $\mathfrak{a}$ es radical

(C) $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.

4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tal que la variedad en $\mathbb{Q}^2$ de ecuación $f(X,Y) = 0$ es irreducible. Entonces

(A) f ha de ser irreducible

(B) f es una potencia de un polinomio irreducible

(C) No se puede afirmar ni (A) ni (B).

5. Los ideales primos de $\mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}$ están en correspondencia biyectiva con

(A) Los ideales de $\mathbb{C}[X,Y]/(X,Y)$

(B) Los ideales de $\mathbb{C}[X,Y]$ contenidos en (X,Y)

(C) Ninguno de los anteriores.

6. El enunciado «Todo anillo artiniano es noetheriano»

(A) es cierto

(B) es falso

(C) es cierto sólo para álgebras afines sobre un cuerpo

7. Un álgebra afín sobre un cuerpo es de dimensión finita como espacio vectorial si y sólo si

(A) su dimensión de Krull es cero

(B) es noetheriana

(C) su dimensión de Krull es finita

8. Sea $M \subseteq \mathbb{C}^n$ un conjunto finito no vacío. Entonces

(A) $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(M)$ es un anillo artiniano

(B) $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(M)$ es un cuerpo

(C) $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(M)$ tiene una Base de Groebner

9. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ tal que $\mathfrak{a} \cap \mathbb{C}[X] = 0$. Entonces

(A) la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[X, Y, Z]/\mathfrak{a}$ es 1

(B) $\mathfrak{a} = 0$

(C) la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ es al menos 1, pero puede ser mayor

10. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ tal que $\mathfrak{a} \cap \mathbb{C}[X] \neq 0$. Entonces

(A) la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[X, Y, Z]/\mathfrak{a}$ puede ser 0, 1 o 2

(B) la dimensión de $\mathbb{C}[X, Y, Z]/\mathfrak{a}$ como espacio vectorial complejo es finita

(C) la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[X, Y, Z]/\mathfrak{a}$ es necesariamente 0

Preguntas teóricas

Las respuestas han de ser claras y correctas.

11. Definir qué es un dominio normal.

12. Definir qué es un anillo de fracciones.

13. Definir qué es la dimensión de Krull de un anillo.

14. Definir qué es una base de trascendencia.

15. Definir qué es una base de Groebner.

16. Enunciar el Teorema de la Base de Hilbert.

17. Enunciar el Lema de Normalización de Noether.

18. Enunciar el Teorema de los Ceros de Hilbert.

19. Enunciar el Teorema del Ascenso.

20. Enunciar el Algoritmo de la División en varias variables.