Algebra. Cuarto de Matemáticas. Curso 2004/2005.

Prueba escrita presencial final. Problemas.

Profesor José Gómez Torrecillas

Instrucciones

Cada ejercicio se valorará con un máximo de la puntuación indicada, atendiendo tanto a la corrección de la solución, como a la claridad y precisión de los argumentos utilizados, y la calidad del discurso matemático. No se valorará positivamente la reiteración, los argumentos irrelevantes, ni las meras sucesiones de cálculos o símbolos. Todas las respuestas serán razonadas.

El alumno podrá ser requerido, para su evaluación, a exponer y discutir en la pizarra la resolución entregada de uno o varios problemas.

1. Consideremos los polinomios $f_1 = X^2 - Y^2Z$, $f_2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$.

(a) (0,5 puntos) Calcular una normalización de Noether, en el sentido del Lema de Normalización, para el álgebra $A = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(f_1)$. Deducir que A tiene dimensión de Krull 2.

(b) (0,5 puntos) Calcular una normalización de Noether, en el sentido del Lema de Normalización, del álgebra $R = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(f_1, f_2)$. Deducir que R tiene dimensión de Krull 1.

(c) (0,5 puntos) Consideremos la curva V en $\mathbb{C}^3$ de ecuaciones $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$. Demostrar que $V = V_1 \cup V_2$, donde

$$V_1 \equiv \begin{cases} Z + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 0 \end{cases} \qquad V_2 \equiv \begin{cases} Z - 1 + Y^2 = 0 \\ X^2 - Z - Z^2 = 0 \end{cases}$$

(d) (0,5 puntos) Razonar que V no es irreducible. Demostrar que V tiene, al menos, tres componentes irreducibles.

2. (0,5 puntos) Consideremos el ideal maximal $\mathfrak{m} = (X, Y)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$, y el homomorfismo canónico de anillos $\mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[X, Y]_{\mathfrak{m}}$. Sabemos que la restricción de escalares asociada a este homomorfismo permite identifica $\mathcal{Spec}(\mathbb{C}[X, Y]_{\mathfrak{m}})$ con una parte de $\mathcal{Spec}(\mathbb{C}[X, Y])$. Describir lo más explícitamente posible dicha parte.

3. (0,5 puntos) Describir explícitamente el espectro primo del anillo $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2, XY)$.

Nota: Para la resolución del ejercicio 1 se recomienda usar la siguiente información.

- $\{X^4 - Y^4 + X^2Y^4 + Y^6, -Y^2 + X^2Y^2 + Y^4 + X^2Z, -X^2 + Y^2Z, -1 + X^2 + Y^2 + Z^2\}$ es una base de Groebner del ideal $I = (f_1, f_2)$ con respecto del orden lexicográfico con $X < Y < Z$.
- $\{X^2 - Z + X^2Z + Z^3, -1 + X^2 + Y^2 + Z^2\}$ es una base de Groebner del ideal $I = (f_1, f_2)$ con respecto del orden lexicográfico con $X < Z < Y$.
- $\{-1 + Y^2 + Y^2Z + Z^2, -1 + X^2 + Y^2 + Z^2\}$ es una base de Groebner del ideal $I = (f_1, f_2)$ con respecto del orden lexicográfico con $Z < Y < X$.