



Álgebra. Cuarto de
Matemáticas. Curso
2004/2005.

Prueba parcial escrita 4
febrero.

Profesor José Gómez Torrecillas

Instrucciones

Cada alumno deberá entregar en la Secretaría del Departamento de Álgebra, a la atención del profesor Gómez Torrecillas, su resolución de los ejercicios propuestos a continuación. El plazo de entrega finaliza el viernes, 4 de febrero, a las 13 horas.

Cada ejercicio se valorará sobre 10 puntos, atendiendo tanto a la corrección de la solución, como a la claridad y precisión de los argumentos utilizados, y la calidad del discurso matemático. No se valorará positivamente la reiteración, los argumentos irrelevantes, ni las meras sucesiones de cálculos o símbolos. Todas las respuestas serán razonadas.

El alumno podrá ser requerido, para su evaluación, a exponer y discutir en la pizarra la resolución entregada de uno o varios problemas.

La calificación de este ejercicio se obtendrá como la media ponderada, con pesos 3,3,4, de los tres problemas, multiplicada por un factor 0,2.

Problemas

1. Sea I el ideal del anillo de polinomios $k[X, Y]$ (k es un cuerpo) generado por $X^2 + Y^2 + 1$. Encontrar un ideal maximal que contenga a I en los siguientes casos:

- (a) $k = \mathbb{R}$.
- (b) $k = \mathbb{C}$.

2. Sea I el ideal del anillo de polinomios $k[X, Y]$ (k es un cuerpo) generado por los polinomios $X^2 + Y^2 - 1$ e $Y - X^2$. Decidir si I es maximal en los siguientes casos:

- (a) $k = \mathbb{R}$.
- (b) $k = \mathbb{Q}$.

3. Dar ejemplos de:

- (a) Un anillo noetheriano que no sea artiniano.
- (b) Un anillo noetheriano con divisores de cero propios.
- (c) Un álgebra finito-dimensional sobre \mathbb{R} que no sea un cuerpo.
- (d) Un ideal primo no maximal.
- (e) Una cadena $X \subset Y \subset Z$ de variedades irreducibles no vacías con las inclusiones estrictas.
- (f) Una variedad con dos componentes irreducibles.
- (g) Un módulo no nulo y no libre.
- (h) Un subconjunto de \mathbb{C} que sea una variedad, visto como subconjunto de \mathbb{R}^2 , pero no sea una variedad visto como subconjunto de \mathbb{C} .