Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

ÁLGEBRA III - CURSO 2000/2001

RELACIÓN DE EJERCICIOS Número 6

Prof. José Gómez Torrecillas
Prof. Fco. Javier Lobillo Borrero

Nota: En lo que sigue, Ens denota la categoría de conjuntos.

1.– Dar un enunciado (y justificar su corrección) del Lema de Yoneda para funtores contravariantes (sugerencia: utilizar la noción de categoría dual u opuesta).

2.– Sea $\{X_i : i \in I\}$ un conjunto de objetos en una categoría $\mathcal{A}$. Consideremos el funtor $F : \mathcal{A} \to \mathrm{Ens}$ definido sobre objetos por $F(X) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X_i)$. Diremos que la familia $\{X_i : i \in I\}$ tiene producto is F es un funtor representable. Usar el Lema de Yoneda para definir el producto en términos de una propiedad universal.

3.– Comprobar que el producto cartesiano de una familia de módulos, con las operaciones usuales, proporciona su producto en la categoría de módulos correspondiente.

4.– Sea $\{X_i : i \in I\}$ un conjunto de objetos en una categoría $\mathcal{A}$. Consideremos el funtor $G : \mathcal{A} \to \mathrm{Ens}$ definido sobre objetos por $G(X) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_i, X)$. Diremos que la familia $\{X_i : i \in I\}$ tiene coproducto is G es un funtor representable. Usar el Lema de Yoneda para definir el coproducto en términos de una propiedad universal.

5.– Comprobar que la suma directa externa de una familia de módulos proporciona su coproducto en la categoría de módulos correspondiente.

6.– Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes enteros ($a_i \in \mathbb{Z}$). Sea el funtor $E : \mathrm{Ring}_c \to \mathrm{Ens}$ que sobre objetos actúa asignando a cada anillo conmutativo A el conjunto de soluciones en A de la ecuación algebraica $p(x) = 0$. Demostrar que E es un funtor representable (sugerencia: el anillo más natural para buscar soluciones de la ecuación dada es $\mathbb{Z}[x]/(p(x))$).

7.– Sea $U : R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ens}$ el funtor que olvida o subyacente de la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo R en la categoría de conjuntos. Sea el funtor $F : \mathrm{Ens} \to R - \mathrm{Mod}$ el funtor que, sobre objetos, asocia a cada conjunto X el módulo libre $F(X)$ con base X. Demostrar que F es adjunto por la izquierda a U.

8.– Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor adjunto por la izquierda a un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, entonces, para cada objeto X de $\mathcal{A}$, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(-)) : \mathcal{B} \to \mathrm{Ens}$ es representable. Dar un elemento universal para dicho funtor. ¿Qué funtor representable se obtiene si se fija «la otra variable» en el isomorfismo de adjunción? ¿Cuál es su elemento universal?

9.– Si A, B son R–módulos a derecha y C un R módulo a izquierda entonces

$$(A \oplus B) \otimes_R C \cong (A \otimes_R C) \oplus (B \otimes_R C)$$

10.– Vamos a calcular la tabla de caracteres complejos del grupo alternado A_5. Calculando las clases de conjugación, obtenemos la tabla siguiente (por rellenar)

A_5	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(13524)
	1	15	20	12	12
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2					
χ_3					
χ_4					
χ_5					

Para calcular χ_2, inducimos el carácter $(1, \omega, \omega^2, 1)$ desde A_4 visto como subgrupo de A_5 ($\omega = e^{2\pi i/3}$) que, casualmente, resulta ser irreducible (¿por qué?). Para calcular χ_3, inducimos, desde el mismo subgrupo, el carácter trivial. Ahora, el inducido no es irreducible, pero podemos usar la reciprocidad de Frobenius. Los dos últimos caracteres χ_4 y χ_5 se calculan por las relaciones de ortogonalidad, teniendo en cuenta que el conjugado de un carácter irreducible es un carácter irreducible y que A_5 se puede representar como grupo de rotaciones del icosaedro regular.