Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

ÁLGEBRA III - CURSO 2000/2001

RELACIÓN DE EJERCICIOS Número 5

Prof. José Gómez Torrecillas
Prof. Fco. Javier Lobillo Borrero

1.– Sea R un anillo.

(a) Sean $a, b \in R$. Demuestra que si $1 - ba$ es inversible a izquierda (resp. derecha) entonces $1 - ab$ también lo es. Construye explícitamente el inverso. (Sugerencia: $R(1 - ab) \supseteq Rb(1 - ab) = R(1 - ba)b = Rb$)

(b) Sea $y \in R$. Si $1 - xy$ es inversible a izquierda para todo $x \in R$, entonces $1 - xyz$ es una unidad de R para cualesquiera $x, z \in R$. (Sugerencia: El ejercicio anterior)

(c) Demuestra que el radical de Jacobson a izquierda de R coincide con su radical de Jacobson a derecha.

2.– Sea R un anillo artiniano

(a) Demuestra que si $\mathrm{J}(R) = 0$ entonces R es semisimple. (Sugerencia: Considera la clase $\mathcal{B}$ de los ideales a izquierda I de R tales que R/I es semisimple, y comprueba que $0 \in \mathcal{B}$.)

(b) Si I es un ideal de R tal que $I \subseteq \mathrm{J}(R)$, demuestra que $\mathrm{J}(R/I) = \mathrm{J}(R)/I$.

(c) Concluye que $R/\,\mathrm{J}(R)$ es un anillo semisimple.

3.– Sea R un dominio de ideales principales conmutativo.

(a) Si $f \in R$ se descompone como $f = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ donde $p_1, \dots, p_r$ son elementos irreducibles no asociados, entonces $R/Rf \cong R/Rp_1^{n_1} \oplus \dots \oplus R/Rp_r^{n_r}$.

(b) Concluye que la descomposición cíclica primaria (para módulos de torsión finitamente generados) en R es consecuencia del Teorema de Krull–Schmidt.

4.– Convierte el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en una ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{r} y_1' + ty_1 + y_3 = 0 \\ (1-2t^2)y_1'' + 2ty_1' + (t^2 - t + 1)y_1 + y_2 + y_3' + ty_3 = 0 \\ ty_1''' - t^2y_1'' + ty_1' + (t^2 - t - 1 + t^{-2})y_1 + (1 + t^{-1})y_2 + ty_3 = 0 \end{array} \right.$$

5.– Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$t^3z''' + t^2z'' - (2t + t^3)z' + (2 - t^2)z = 0$$