Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

ÁLGEBRA III - CURSO 2000/2001

RELACIÓN DE EJERCICIOS Número 4

Prof. José Gómez Torrecillas
Prof. Fco. Javier Lobillo Borrero

1.– Calcular todos los caracteres complejos de grado 3 de S_3.

2.– Consideremos la representación compleja de grado 3 definida sobre generadores por

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el carácter χ asociado y descomponerlo como suma de caracteres irreducibles.

3.– Razonar que el siguiente enunciado es correcto: Los caracteres complejos irreducibles de un grupo abeliano finito coinciden con sus representaciones complejas irreducibles.

4.– Sean G_1 y G_2 dos grupos abelianos finitos. Dadas representaciones irreducibles complejas χ de G_1 y λ de G_2, definimos $\chi\sharp\lambda : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^*$ por $(\chi\sharp\lambda)(g_1, g_2) = \chi(g_1)\lambda(g_2)$ para $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$.

(a) Demostrar que $\chi\sharp\lambda$ es una representación compleja irreducible de $G_1 \times G_2$.

(b) Si $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son las representaciones complejas irreducibles de G_1 y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son las representaciones complejas irreducibles de G_2, entonces $\chi_i\sharp\lambda_j, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots m$ son las representaciones irreducibles complejas de $G_1 \times G_2$.

(c) Como aplicación de lo anterior, calcular la tabla de caracteres complejos de $C_2 \times C_2$.

5.– Completa la tabla de caracteres complejos del grupo alternado A_5,

	1	15	20	12	12
A_5	[1]	[(12)(34)]	[(123)]	[(12345)]	[(13524)]
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	α_1	α_2
χ_3	3	-1	0	α_2	α_1
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5					

donde $\alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y $\alpha_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

6.– Calcula todos los caracteres complejos de grado 4 del grupo alternado A_5.

7.– Sea $\mathbb{Z}_4$ el anillo de los enteros módulo 4 y denotemos por $U(\mathbb{Z}_4)$ el grupo multiplicativo de las unidades de $\mathbb{Z}_4$. Consideremos el conjunto

$$G = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mid x \in U(\mathbb{Z}_4), y \in \mathbb{Z}_4 \}$$

(a) Comprobar que G es un subgrupo del grupo $GL_2(\mathbb{Z}_4)$ de las matrices inversibles de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_4$.

(b) Calcular la tabla de caracteres complejos de G.

8.– ¿Existe algún grupo G tal que su álgebra de grupo sobre los complejos $\mathbb{C}[G]$ sea isomorfa al álgebra $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden 2 sobre los complejos?

9.– La tabla de caracteres del grupo simétrico S_4 es la siguiente

	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
S_4	1	6	8	6	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

El grupo S_4 está generado por las permutaciones (1234) y (12), consideremos la representación matricial de S_4 dada por el morfismo $\varphi : S_4 \to GL_3(\mathbb{C})$ que sobre los generadores anteriores es:

$$\varphi(1234) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(12) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el carácter χ_φ asociado a φ.

(b) Calcular el producto hermitiano $\langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle$ y deducir que χ_φ no es irreducible.

(c) Expresar χ_φ como una combinación lineal de los caracteres irreducibles de S_4

10.– La tabla de caracteres complejos de un grupo G es

					6
G	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	-1	2	0	0
χ_4	3	0	-1	1	-1
χ_5	3	0	-1	-1	1

Calcular el orden del grupo y el orden de cada clase de conjugación, sabiendo que $\mathcal{C}_5$ tiene 6 elementos.

11.– La tabla de caracteres complejos de un grupo G es

	1	1	1	1
G	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	$\sqrt{-1}$	-1	$-\sqrt{-1}$
χ_4	1	$-\sqrt{-1}$	-1	$\sqrt{-1}$

Identifica G con un grupo conocido razonando la respuesta.