*Universidad de Granada*
*Departamento de Álgebra*

# ÁLGEBRA III - CURSO 2000/2001

## RELACIÓN DE EJERCICIOS Número 3

*Prof. José Gómez Torrecillas*
*Prof. Fco. Javier Lobillo Borrero*

1.– Sea $R = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}$ el anillo de las matrices de orden dos con coeficientes en un cuerpo $K$. Comprobar que $\begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ es una descomposición de ${}_RR$ como suma directa interna y que ambos sumandos directos son $R$–módulos simples isomorfos entre sí.

2.– Sea $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$. Comprobar que $R$ es un subanillo de $M_2(K) = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}$. Encontrar un submódulo simple del $R$–módulo regular ${}_RR$ de dimensión 1 como $K$–espacio vectorial. Encontrar dos módulos simples sobre $R$ no isomorfos entre sí.

3.– Sea $R = \begin{pmatrix} * & K \\ 0 & * \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} ; a, b \in K \right\}$. Demostrar que $R$ es un subanillo de $M_2(K)$. Comprobar que ${}_RR$ no es simple pero, sin embargo, ${}_RR$ no se puede descomponer como suma directa de dos submódulos no nulos. Demostrar que $R$ es isomorfo como anillo a $K[X]/(X^2)$.

4.– Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $K$ y $X$ un subconjunto de $V$. Demostrar que $X$ es un conjunto linealmente independiente si y sólo si la familia de subespacios vectoriales $\{Kx \mid x \in X\}$ es independiente.

5.– Dados bimódulos ${}_RM_S, {}_RN_T$ sobre anillos $R, S, T$, definamos $sf(m) = f(ms)$ y $ft(m) = f(m)t$, para $m \in M$, $s \in S$, $t \in T$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Comprobar que $sf, ft \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ y que, de hecho, $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ es un $S - T$–bimódulo. Análogamente, dados bimódulos ${}_SM_R, {}_TN_R$, dotar a $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ de estructura de bimódulo.

6.– Calcular el centro del anillo $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$, donde $K$ es un cuerpo. ¿Es $R$ un anillo indescomponible?

7.– Calcular el centro del anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$. En vista del ejercicio anterior, ¿qué se puede decir del centro de un subanillo de un anillo?.

8.– Denotemos por $\mathbb{H}$ al anillo de división de los cuaternios de Hamilton. Consideremos los anillos $M_2(\mathbb{H})$, $M_4(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C})$. Demostrar que, vistos como espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, son isomorfos pero que no son anillos isomorfos dos a dos. Describir todas las clases de isomorfía de módulos por la izquierda en cada caso.