Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

ÁLGEBRA III - CURSO 2000/2001

RELACIÓN DE EJERCICIOS Número 2

Prof. José Gómez Torrecillas
Prof. Fco. Javier Lobillo Borrero

1.– Demuestra que si R es un anillo noetheriano a izquierda y M un R–módulo a izquierda finitamente generado entonces M es noetheriano.

2.– Calcula la longitud del $\mathbb{Z}$–módulo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$.

3.– Para cada primo $p \in \mathbb{Z}$, sea $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(a) Comprueba que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un $\mathbb{Z}$–submódulo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(b) Demuestra que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es artiniano pero no noetheriano.

4.– Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ la circunferencia unidad y sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo positivo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamemos $C_{p^n} = \{z \in S^1 \mid z^{p^n} = 1\}$. Demuestra que $C_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{p^n}$ es un $\mathbb{Z}$–módulo artiniano que no es noetheriano.

5.– Demuestra que los $\mathbb{Z}$–módulos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y C_{p^∞} son isomorfos para cada primo positivo $p \in \mathbb{Z}$.

6.– Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y''' - y'' + ty' - ty = 0 \\ ty'' + (1-t)y' - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^{-1}y^{\mathrm{IV}} - ty''' - t^2y'' - ty' - (t^2 - t^{-1})y = 0 \\ ty''' + t^{-1}y'' + ty' + t^{-1}y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ty''' + t^{-2}y'' + y' + t^3y = 0 \\ t^2y'' + ty = 0 \end{cases}$$

7.– Sea $\mathbb{H}$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial con base $\{1, i, j, k\}$. Extendemos a $\mathbb{H}$ por linealidad la multiplicación que sobre la base anterior se define por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ y $ki = -ik = j$. Para cada $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ definimos el conjugado como $\overline{z} = a - bi - cj - dk$.

(a) Si $N(z) = z\overline{z}$, demuestra que $N(z) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

(b) Demuestra que $\mathbb{H}$ es un cuerpo no conmutativo (este cuerpo es conocido por *los cuaternios de Hamilton*).

(c) Encuentra todas las factorizaciones de $x^2 - 1 \in \mathbb{H}[x]$.

8.– Sea $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el automorfismo dado por $\sigma(z) = \overline{z}$. Encuentra en $\mathbb{C}_\sigma[x] = \mathbb{C}[x, \overline{(\,)}]$ todas las factorizaciones de $x^2 - 1$.

9.– Sea $R = \mathbb{A}_1(\mathbf{k})$ y $\mathcal{F}$ el R–módulo por la izquierda de funciones. Demuestra que para todo $L \in R$, el $\mathbf{k}$–espacio vectorial de las soluciones en $\mathcal{F}$ de la ecuación diferencial $Lf = 0$ es isomorfo a $\mathrm{Hom}_R(\frac{R}{RL}, \mathcal{F})$.