Universidad de Granada
Departamento de Álgebra

ÁLGEBRA III - CURSO 2000/2001

RELACIÓN DE EJERCICIOS Número 1

Prof. José Gómez Torrecillas
Prof. Fco. Javier Lobillo Borrero

1.– Sea $p(x)$ un polinomio no constante en $\mathbb{Z}[x]$ y denotemos por $\mathbb{Z}[p(x)]$ al menor subanillo de $\mathbb{Z}[x]$ que contiene a $p(x)$. Demostrar que hay un isomorfismo de anillos $\mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[p(x)]$.

2.– Sea A la subálgebra de $\mathrm{End}({}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2)$ generada por todas las homotecias y la simetría con respecto de la recta $y = x$.

(a) Calcular la representación matricial de A obtenida al tomar en $\mathbb{R}^2$ la base canónica.

(b) Triangular o diagonalizar, si es posible, la anterior representación.

3.– Sea $\mathcal{F} = C^\infty(I)$ el espacio vectorial real de todas las funciones reales de clase infinito definidas sobre un intervalo de interior no vacío I. Sea $\mathbb{R}[D]$ la subálgebra de $\mathrm{End}({}_{\mathbb{R}}\mathcal{F})$ generada por D, donde $D : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ está definido por $D(f) = f'$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

(a) Calcular los anuladores $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}}(D^2 + 1)$ y $\mathrm{Ann}_{\mathbb{R}[D]}(e^t)$.

(b) Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, el subespacio vectorial $\mathbb{P}_n$ de $\mathcal{F}$ de todas las funciones polinómicas de grado menor o igual que n. Comprobar que $\mathbb{P}_n$ es un $\mathbb{R}[D]$–submódulo de $\mathcal{F}$ y describir la representación matricial de $\mathbb{R}[D]$ correspondiente .

4.– Sea $A = \mathbf{k}[x]$ el álgebra de polinomios en una variable x con coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k}$, y sea $V = \mathbf{k}^2$. Consideremos los endomorfismos de espacios vectoriales $T_1, T_2 \in \mathrm{End}({}_{\mathbf{k}}V)$ definidos por

$$T_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

y

$$T_2(x_1, x_2) = (0, x_1)$$

Consideremos las representaciones $\rho_1, \rho_2 : A \to \mathrm{End}({}_{\mathbf{k}}V)$ determinadas por $\rho_1(x) = T_1$ y $\rho_2(x) = T_2$.

(a) Describir las estructuras de A–módulo sobre V asociadas a ρ_1 y ρ_2. Denotemos dichos módulos por V_1 y V_2.

(b) Calcular $\mathrm{Ann}_A(V_1)$ y $\mathrm{Ann}_A(V_2)$. Concluir que $V_1 \ncong V_2$ como A–módulos por la izquierda.

5.– Sea I un intervalo de números reales de interior no vacío. Demostrar que la subálgebra de $\mathrm{End}({}_{\mathbb{R}}C^\infty(I))$ generada por D (ver ejercicio 3) es isomorfa al anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$.

6.– Sean M y N módulos por la izquierda sobre una $\mathbf{k}$–álgebra A ($\mathbf{k}$ denota un cuerpo). Supongamos que M tiene dimensión finita n y que $f : M \to N$ es un isomorfismo de A–módulos. Consideremos $\psi, \xi : A \to \mathbf{M}_n(\mathbf{k})$ representaciones matriciales proporcionadas por M y N, respectivamente. Demostrar que existe una matriz inversible P tal que $\xi(a) = P\psi(a)P^{-1}$ para todo $a \in A$.

7.– Buscar una representación de grado 2 de $\mathbb{C}$ considerados como $\mathbb{R}$–álgebra (nota: un número complejo puede interpretarse geométricamente como un giro seguido de una homotecia en el plano real).