Relación de Problemas 3

1. Prueba que un espacio topológico conexo es arco-conexo si y sólo si cada punto tiene un entorno arco-conexo. Demuestra que todo espacio topológico localmente euclídeo es conexo si y sólo si es arco-conexo.
2. Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \{p\}$, con $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$. Consideramos en X las siguiente topología: los entornos de los puntos de $\mathbb{S}^2$ son los usuales, y los de p son subconjuntos de la forma $(U \setminus \{(0,0,1)\}) \cup \{p\}$, donde U es un entorno de $(0,0,1)$ en $\mathbb{S}^2$.
   a) Prueba que X es un espacio topológico localmente euclídeo de dimensión 2 pero no es una superficie topológica.
   b) ¿Es X arco-conexo? ¿Y conexo?
   c) Dados dos puntos $q_1, q_2 \in X$, ¿existe $f : X \to X$ homeomorfismo tal que $f(q_1) = q_2$?
3. Estudia si el subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ dado por
$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$$
   es una superficie topológica.
4. Una superficie topológica con borde (frontera) es un espacio topológico en el que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Prueba que el cilindro y la banda de Möbius son superficies topológicas con borde.
5. Prueba que el p-simplex generado por $\{a_0, \ldots, a_p\}$ es la envolvente convexa del conjunto $\{a_0, \ldots, a_p\}$.
6. Dado v un vértice de un complejo simplicial K se define la estrella abierta de v como $ost(v) = \{o(\sigma) \mid \sigma \in st(v)\}$. Prueba que $ost(v)$ es un entorno abierto de v en $|K|$ y la colección de todas las estrellas abiertas es un recubrimiento abierto de $|K|$.
7. Describe una triangulación del toro, el plano proyectivo y la botella de Klein.
8. Describe una triangulación del espacio topológico cociente que se obtiene cuando en un toro identificamos un meridiano a un punto.
9. Demuestra que la suma conexa de uno o más planos proyectivos contiene un subespacio que es homeomorfo a una banda de Möbius.
10. Para cada una de las siguientes presentaciones de superficies calcula la característica de Euler y determina a cual de las superficies modelo es homeomorfa:
    a) $\langle a,b,c; abacb^{-1}c^{-1}\rangle$.
    b) $\langle a,b,c; abca^{-1}b^{-1}c^{-1}\rangle$.
    c) $\langle a,b,c,d,e,f; abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa\rangle$.
    e) $\langle a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o;$
    $abc, bde, dfg, fhi, haj, c^{-1}kl, e^{-1}mn, g^{-1}ok^{-1}, i^{-1}l^{-1}m^{-1}, j^{-1}n^{-1}o^{-1}\rangle$.
11. Prueba que la suma conexa de una botella de Klein y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de un toro y un plano proyectivo.
12. Prueba que la característica de Euler de la suma conexa de dos superficies compactas es igual a la suma de sus características de Euler menos dos.
13. Calcula la característica de Euler de la suma conexa de un plano proyectivo y n toros.
14. Sea K una triangulación de una superficie conexa con α_0 vértices, α_1 1-símplices y α_2 2-símplices. Prueba que:
    a) $3\alpha_2 = 2\alpha_1$,
    b) $\alpha_1 = 3(\alpha_0 - \chi(|K|))$,
    c) $\alpha_0 \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(|K|)})$.

    Teniendo en cuenta lo anterior, comprueba si las triangulaciones dadas en el ejercicio 7 son las que menos símplices tienen. Si no es así encuentra triangulaciones que sean mínimas.