# EL GRUPO FUNDAMENTAL

FRANCISCO URBANO

## 1. Espacios conexos por arcos

**Definición 1.** Un arco o camino (continuo) en un espacio topológico $X$ es una aplicación continua $f : [a,b] \to X$, siendo $[a,b]$ el intervalo de extremos $a$ y $b$. Al punto $p = f(a)$ se le llama origen del arco y al punto $q = f(b)$ se le llama extremo del arco. Se dirá que $f$ conecta o une $p$ con $q$.

Si $h : [c,d] \to [a,b]$ es el homeomorfismo $h(t) = \frac{t-c}{d-c}(b-a) + a$ entonces $g = f \circ h : [c,d] \to X$ es otro arco en $X$ uniendo $p$ con $q$ y con la misma imagen que $f$. Por tanto normalizaremos a $[0,1]$ los intervalos de definición de los arcos.

Es claro que el arco constante $f : [0,1] \to X$ dado por $f(t) = p, \forall t$, conecta $p$ con $p$. También, si $f : [0,1] \to X$ es un arco que conecta $p$ con $q$, el arco $\hat{f} : [0,1] \to X$ dado por $\hat{f}(t) = f(1-t)$ conecta $q$ con $p$. Finalmente si $f, g : [0,1] \to X$ son arcos en $X$ con $f(0) = p$, $f(1) = g(0) = q$ y $g(1) = r$, entonces $f * g : [0,1] \to X$ definido por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ f(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$

es un arco (continuo) que conecta $p$ con $r$. Así, la relación en $X$: dos puntos estan relacionados si existe un arco en $X$ que los conecta, es una relación de equivalencia en $X$. A los subconjuntos de la partición asociada a dicha relación, le llamamos *componentes arco-conexas* de $X$. El espacio $X$ se dirá *arco-conexo* si sólo posee una componente arco-conexa, esto es, si cualesquiera dos puntos de $X$ se conectan por un arco en $X$.

**Proposición 1.** *Un espacio topológico $X$ es arco-conexo si y sólo si es conexo y todo punto de $X$ posee un entorno arco-conexo.*

El resultado de la Proposición 1 es el mejor posible como lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.** *Sea $X = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$, dotado de la topología inducida de $\mathbb{R}^2$. Entonces $X$ es un espacio conexo, no arco-conexo y el punto $(0,0)$ no posee ningun entorno arco-conexo.*

## 2. Grupo fundamental

Sea $X$ un espacio topológico y $x$ un punto suyo. Un *lazo* en $X$ con punto base $x$ es un arco $f : [0,1] \to X$ con origen y extremo $x$, es decir, $f(0) = f(1) = x$. Es claro que si $f$ y $g$ son lazos, entonces $f * g$ también es un lazo. Pero este producto en el conjunto de lazos de $X$ con punto base $x$

no tiene estructura algebráica interesante. Para solucionar este problema definimos el concepto de homotopía.

**Definición 2.** Sean $f, g : [0,1] \to X$ dos lazos con punto base $x$ en el espacio topológico $X$. Diremos que $f$ y $g$ son *homotópicos* si existe una aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ cumpliendo:

- $H(t,0) = f(t), \quad \forall t \in [0,1]$,
- $H(t,1) = g(t), \quad \forall t \in [0,1]$,
- $H(0,s) = H(1,s) = x, \quad \forall s \in [0,1]$.

A la aplicación $H$ le llamaremos una *homotopía* entre $f$ y $g$ y escribiremos $H : f \simeq g$.

Es claro que $H(t,s) = f(t), \forall (t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, es una homotopía de $f$ a $f$. Tambien si $H : f \simeq g$, entonces $G(t,s) = H(t, 1-s)$ es una homotopía de $g$ a $f$. Finalmente si $F : f \simeq g$ y $G : g \simeq h$ son homotopías, entonces $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida por

$$F(t,s) = \begin{cases} H(t,2s) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(t,2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía de $f$ a $h$. Por tanto, la relación de homotopía en el espacio de lazos con punto base $x$ es una relación de equivalencia. A la clase de equivalencia de un lazo $f$, a la que llamaremos *clase de homotopía* de $f$, la representaremos por $[f]$.

Se define

$$\Pi(X,x) = \{[f] \mid f \text{ es un lazo en X con } f(0) = f(1) = x\}.$$

En primer lugar veamos que el producto de lazos permite definir un producto en $\Pi(X,x)$. Para ello, si $f_1, f_2, g_1, g_2$ son lazos alrededor de $x$, con $H : f_1 \simeq f_2$ y $G : g_1 \simeq g_2$, entonces $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, definida por

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2t-1,s) & \text{si} \quad 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía entre $f_1 * g_1$ y $f_2 * g_2$.

Por tanto está bien definido el producto de clases de homotopía de lazos, que representaremos tambien por $*$, como

$$\begin{aligned} \Pi(X,x) \times \Pi(X,x) &\to \Pi(X,x) \\ ([f],[g]) &\mapsto [f] * [g] = [f * g]. \end{aligned}$$

El objetivo ahora es probar que $(\Pi(X,x), *)$ es un grupo al que se llamará el *grupo fundamental de X en $x$*.

Comencemos probando la propiedad asociativa, es decir

$$([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h]),$$

para cualesquiera $[f], [g], [h] \in \Pi(X,x)$. De la definición del producto dada anteriormente, es claro que la propiedad asociativa equivale a ver que $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$. Es rutinario comprobar que $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{1+s}) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ g(4t-1-s) & \text{si} \quad \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{si} \quad \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía de $(f * g) * h$ a $f * (g * h)$.

Sea ahora $f_x : [0,1] \to X$ el lazo constante, es dedir, $f_x(t) = x$, $\forall t \in [0,1]$. Entonces $[f_x]$ es el elemento neutro, esto es, para todo lazo $f$ se cumple que

$$[f] * [f_x] = [f_x] * [f] = [f].$$

Como antes esta propiedad equivale a ver que $f * f_x \simeq f_x * f \simeq f$. Nuevamente es fácil comprobar que $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1+s}) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ x & \text{si} \quad \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía de $f * f_x$ a $f$. Analogamente se probaría que $f_x * f \simeq f$.

Si $f$ es un lazo en $x$, definimos $\hat{f}$ al lazo dado por $\hat{f}(t) = f(1-t)$, $\forall t \in [0,1]$. Entonces $[\hat{f}]$ es el elemento inverso de $[f]$, esto es

$$[f] * [\hat{f}] = [\hat{f}] * [f] = [f_x].$$

Esta propiedad equivale a ver que $f * \hat{f} \simeq \hat{f} * f \simeq f_x$. Nuevamente la aplicación $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(1-s) & \text{si} \quad \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \hat{f}(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es una homotopía de $f * \hat{f}$ a $f_x$. Analogamente se probaría que $\hat{f} * f \simeq f_x$.

En resumen, dado un espacio topológico $X$ y un punto suyo $x$, $(\Pi(X,x), *)$ es un grupo, en general no abeliano, al que se denomina *grupo fundamental del espacio $X$ con punto base $x$*.

Supongamos que $\Phi : (X,x) \to (Y,y)$ es una aplicación continua de $X$ en $Y$ con $\Phi(x) = y$. Entonces la aplicación $\Phi_* : \Pi(X,x) \to \Pi(Y,y)$ definida por

$$\Phi_*([f]) = [\Phi \circ f],$$

está bien definida, esto es si $f \simeq g$ entonces $\Phi \circ f \simeq \Phi \circ g$, y es un homomorfismo de grupos, esto es $\Phi_*([f] * [g]) = \Phi_*([f]) * \Phi_*([g])$.

No es dificil comprobar que:

- Si $I : X \to X$ es la aplicación identidad, entonces $I_* : \Pi(X,x) \to \Pi(X,x)$ es también el homomorfismo identidad.
- Si $\Psi : (Y,y) \to (Z,z)$ es otra función continua de $Y$ en $Z$ con $\Psi(y) = z$, entonces $(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*$.

Como consecuencia se obtiene que si $\Phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $\Phi_* : \Pi(X, x) \to \Pi(Y, \Phi(x))$ es un isomorfismo de grupos para todo punto $x \in X$.

En lenguaje algebráico se diría que hemos construido un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos punteados en la categoría de grupos.

**Problema 1.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ estrellado desde un punto $x \in X$, es decir que $\forall\, y \in X$ el segmento de recta uniendo $x$ con $y$ está contenido en $X$. Probar que $\Pi(X, x)$ es trivial, considerando en $X$ la topología inducida.*

**Definición 3.** Sea $X$ un espacio topológico y $f, g : [0,1] \to X$ arcos con $f(0) = g(0) = x$ y $f(1) = g(1) = y$. Diremos que $f$ y $g$ son homotópicos si existe una aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ cumpliendo:

- $H(t,0) = f(t), \quad \forall t \in [0,1]$,
- $H(t,1) = g(t), \quad \forall t \in [0,1]$,
- $H(0,s) = x, \quad \forall s \in [0,1]$,
- $H(1,s) = y, \quad \forall s \in [0,1]$.

A $H$ le llamaremos una homotopía de $f$ a $g$ y se representará por $H : f \simeq g$. Si restringimos este concepto de homotopía a lazos, se obtiene el definido anteriormente.

Las siguientes propiedades son similares a las ya vistas para lazos. Su demostración es similar a la de lazos.

(1) Seam $f_i, g_i$, $i = 1, 2$ arcos en $X$ con $f_1(0) = g_1(0)$, $f_1(1) = g_1(1) = f_2(0) = g_2(0)$ y $f_2(1) = g_2(1)$. Si $f_1 \simeq g_1$ y $f_2 \simeq g_2$ entonces $f_1 * f_2 \simeq g_1 * g_2$.
(2) Si $f, g, h$ son arcos en $X$ con $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$, entonces $f * (g * h) \simeq (f * g) * h$.
(3) Si $f$ es un arco en $X$ con $f(0) = x$ y $f(1) = y$, entonces $f_x * f \simeq f$ y $f * f_y \simeq f$.
(4) Si $f$ es un arco en $X$ con $f(0) = x$ y $\hat{f}$ es el arco definido por $\hat{f}(t) = f(1-t)$, $\forall t \in [0,1]$, entonces $f * \hat{f} \simeq f_x$.

**Proposición 2.** *Sea $X$ un espacio topológico y $\gamma : [0,1] \to X$ un arco con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Entonces*

$$F_\gamma : \Pi(X, x) \to \Pi(X, y)$$
$$F_\gamma([f]) = [\hat{\gamma} * (f * \gamma)],$$

*es un isomorfismo (bien definido) entre los grupos fundamentales, siendo $\hat{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, $\forall t \in [0,1]$.*

Por tanto, el grupo fundamental de un espacio da información de la componente arco-conexa que contiene al punto base y dicho grupo (salvo isomorfismos) es independiente del punto base elegido en la componente. Si un espacio es arco-conexo, se puede hablar del grupo fundamental del mismo como el grupo fundamental en cualquiera de sus puntos.

**Proposición 3.** *Sean $X, Y$ espacios topológicos, $x \in X$ e $y \in Y$. Si $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son las proyecciones, entonces*

$$F : \Pi(X \times Y, (x, y)) \to \Pi(X, x) \times \Pi(Y, y)$$
$$F([f]) = ((\pi_1)_*([f]), (\pi_2)_*([f])),$$

*es un isomorfismo del grupo fundamental del producto topológico de $X$ e $Y$ sobre el producto de los grupos fundamentales de $X$ e $Y$.*

## 3. Grupo fundamental del circulo

Consideremos el circulo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ dotado de la topología inducida de la Euclídea. Sea $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la aplicación definida por

$$\pi(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t).$$

Entonces, $\pi$ es una aplicación sobre, continua y abierta, y es también un homorfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$.

Si $p \in \mathbb{S}^1$ es un punto, entonces $\pi^{-1}(\{-p\}) = \{t_0 + 2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, donde $t_0$ es el único número real en $[0, 2\pi)$ con $\pi(t_0) = -p$. Por tanto $U = \mathbb{S}^1 - \{-p\}$ es un abierto de $\mathbb{S}^1$ que contiene a $p$ y $\pi^{-1}(U) = \cup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$, donde

$$V_m = (t_0 + 2\pi m, t_0 + 2\pi(m+1)).$$

Observemos que $\pi : V_m \to U$ es un homeomorfismo $\forall m \in \mathbb{Z}$. A $U$ le llamaremos entorno elemental de $p$. Haciendo uso de estos entornos se puede demostrar el siguiente resultado:

**Proposición 4.** *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ un arco con $f(0) = p$ y $t \in \pi^{-1}(p)$. Entonces existe un único arco $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cumpliendo $\tilde{f}(0) = t$ y $\pi \circ \tilde{f} = f$.*

Sea ahora un lazo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(0) = f(1) = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Si $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es el único arco dado en la Proposición 4 con $\tilde{f}(0) = 2\pi n \in \pi^{-1}((1, 0))$, entonces $\pi(\tilde{f}(1)) = (1, 0)$ y por tanto existe un único $m \in \mathbb{Z}$ con $\tilde{f}(1) = 2\pi m$. Al entero $m - n$ obtenido le llamaremos el *grado del lazo $f$*, y lo notaremos por *$deg(f)$*. Es claro que este número entero está bien definido, esto es no depende del real $2\pi n \in \pi^{-1}((1, 0))$, ya que si $\hat{f}$ es el arco dado en Proposición 4 con $\hat{f}(0) = 2\pi k$, entonces $\hat{f}(t) = \tilde{f}(t) + 2\pi(k - n)$, y por tanto $\hat{f}(1) - \hat{f}(0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$. Tenemos pues la siguiente

**Definición 4.** Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ un lazo con punto base $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Se define el grado de $f$ como

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)),$$

donde $\tilde{f}$ es cualquiera de los arcos dados en la Proposición 4. Dicho grado es siempre un número entero.

**Proposición 5.** *Sea $H : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua con $H(0, 0) = p \in \mathbb{S}^1$ y $t \in \pi^{-1}(p)$. Entonces existe una única aplicación continua $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ cumpliendo $\tilde{H}(0, 0) = t$ y $\pi \circ \tilde{H} = H$.*

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ dos arcos y $H : f \simeq g$ una homotopía entre ellos (en particular $f(0) = g(0) = p$ y $f(1) = g(1)$). Si $t \in \pi^{-1}(p)$ y $\tilde{H}$ es el levantamiento de $H$ con $H(0,0) = t$ dado en la proposición 5, es claro que $\tilde{f} = \tilde{H}(-,0)$ y $\tilde{g} = \tilde{H}(-,1)$ son los levantamientos de $f$ y $g$ con $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = t$ dados en la Proposición 4. Por tanto $\pi \circ \tilde{H}(1,s) = H(1,s) = f(1) = g(1) = q$. Así, $\tilde{H}(1,s) \in \pi^{-1}(q)$, $\forall s \in [0,1]$. Como $\pi^{-1}(q)$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$, la curva $\tilde{H}(1,s)$ es constante y por tanto $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

Como consecuencia de este argumento, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 1.** *Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ lazos homotópicos con punto base $(1,0) \in \mathbb{S}^1$. Entonces $deg(f) = deg(g)$. Por tanto la siguiente aplicación está bien definida*

$$F : \Pi(\mathbb{S}^1, (1,0)) \to \mathbb{Z}$$
$$F([f]) = deg(f).$$

**Proposición 6.** *La aplicación $F$ es un isomorfismo de grupos.*

Como consecuencia de las Proposiciones 3 y 6 y del problema 1, se tiene que el grupo fundamental del toro $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ y que el grupo fundamental del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Un corolario clásico de la Proposición 6 es el siguiente conocido resultado:

**Theorem 1** (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Sea $D = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| \leq 1\}$ el disco unidad cerrado de $\mathbb{R}^2$. Entonces toda aplicación continua $F : D \to D$ tiene al menos un punto fijo, esto es, existe un punto $p_0 \in D$ tal que $F(p_0) = p_0$.*

La demostración de este resultado es consecuencia de este otro:

**Proposición 7.** *No existe una aplicación continua $G : D \to \mathbb{S}^1$ tal que $G_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sea la identidad de $\mathbb{S}^1$. A una tal aplicación se le suele llamar una retacción de $D$ sobre $\mathbb{S}^1$.*

Otro resultado clásico que puede ser probado como consecuencia del cálculo del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es el siguiente:

**Theorem 2** (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio complejo de grado mayor o igual a uno tiene una raiz compleja.*

Vamos a definir una importante familia de espacios topológicos cuyos grupos fundamentales tienen la propiedad de ser conmutativos.

**Definición 5.** Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $T$ una topología en $G$. La terna $(G, \cdot, T)$ se llama *grupo topológico* si las aplicaciones

$$G \times G \to G, \quad G \to G$$
$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2, \quad g \mapsto g^{-1}$$

son continuas, siendo $g^{-1}$ el inverso de $g$ y dotando a $G \times G$ de la topología producto.

Interesantes ejemplos de grupos topológicos son:

(1) El grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ dotado de la topología Euclídea.
(2) El grupo multiplicativo $C^*$ (de los complejos no nulos) dotado de la topología Euclídea.
(3) El grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$ (de los complejos de módulo 1) con su topología usual.
(4) El grupo multiplicativo $\mathbb{S}^3$ (de los cuaternios de módulo 1) con su topología usual.
(5) El grupo ortogonal $O(n) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$ dotado de la topologia inducida de la Euclidea en $gl(n, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$.

**Proposición 8.** *Sea $(G, \cdot, T)$ un grupo topológico y e el elemento neutro del grupo.*

- *Si $f, g : [0,1] \to G$ son lazos con punto base e, entonces $f \cdot g$, definido por $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$, es también un lazo en e. Además, $f_1 \simeq g_1$ y $f_2 \simeq g_2$, entonces $f_1 \cdot f_2 \simeq g_1 \cdot g_2$. Por tanto se tiene definida una aplicación:*

$$G : \Pi(G, e) \times \Pi(G, e) \to \Pi(G, e)$$
$$G([f], [g]) = [f] \cdot [g] := [f \cdot g].$$

- *Si $[f], [g] \in \Pi(G, e)$, entonces $[f] \cdot [g] = [f] * [g]$.*
- *$\Pi(G, e)$ es conmutativo.*

En el siguiente resultado, vamos a probar que el levantamiento de un lazo en $\mathbb{S}^1$ dado en la Proposición 4, puede ser dado explicitamente, si el lazo es una aplicación de clase uno, $f \in C^1([0,1])$.

**Proposición 9.** *Sea f un lazo de clase uno en $\mathbb{S}^1$ con punto base $p \in \mathbb{S}^1$ y $t \in \pi^{-1}(p)$. Entonces el levantameinto $\tilde{f}$ dado en la proposición 4 es dado por*

$$\tilde{f}(s) = t + \int_0^s \langle f'(r), Jf(r) \rangle dr,$$

*donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$ y $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la isometría $J(x, y) = (-y, x)$. En particular el grado de f viene dado por*

$$deg\,(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \langle f'(r), Jf(r) \rangle dr.$$

## 4. Tipo de homotopía. Equivalencias homotópicas

**Definición 6.** Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y $F, G : X \to Y$ aplicaciones continuas. Diremos que $F$ es *homotópica* a $G$ si existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = F(x)$ y $H(x, 1) = G(x)$, para todo $x \in X$. A $H$ se le llama una *homotopía* de $F$ a $G$ y se representa $H : F \simeq G$.

Si $H : F \simeq G$ es una homotopía, $x_0$ un punto de $X$ y $\gamma : [0,1] \to Y$ el arco $\gamma(t) = H(x_0, t)$, entonces $\gamma$ une $F(x_0)$ con $G(x_0)$, y por tanto de la Proposición 2 se sigue que $F_\gamma : \Pi(Y, F(x_0)) \to \Pi(Y, G(x_0))$ es un isomorfismo. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 10.** *Los homomorfismos* $F_* : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, F(x_0))$ *y* $G_* : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, G(x_0))$ *cumplen* $F_\gamma \circ F_* = G_*$.

**Definición 7.** Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos. Una *equivalencia homotópica* de $X$ en $Y$ es una aplicación continua $F : X \to Y$ tal que existe otra aplicación continua $G : Y \to X$ cumpliendo $G \circ F$ es homotópica a la identidad en $X$ y $F \circ G$ es homotópica a la identidad en $Y$. En tal caso diremos que $X$ e $Y$ son del *mismo tipo de homotopía*.

Es claro que un homeomorfismo es una equivalencia homotópica, y que si $F$ es una equivalencia homotópica, también lo es $G$. Es fácil comprobar que la composición de equivalencias homotópicas es de nuevo una equivalencia homotópica.

Como consecuencia de la proposición 10 y la definición 7 se tiene que si $F$ es una equivalencia homotópica, entonces existe $G$ tal que $H_1 : G \circ F \simeq I_X$ y $H_2 : F \circ G \simeq I_Y$. Asi si $\gamma_1(t) = H_1(x_0, t)$ y $\gamma_2(t) = H_2(F(x_0), t)$, se tiene que $F_{\gamma_1} \circ G_* \circ F_* = Id$ en $\Pi(X, x_0)$ y $F_{\gamma_2} \circ F_* \circ G_* = Id$ en $\Pi(Y, F(x_0))$. Por tanto, como $F_{\gamma_1}$ y $F_{\gamma_2}$ son isomorfismos, se sigue que $G_* : \Pi(Y, F(x_0)) \to \Pi(X, G(F(x_0)))$ es epimorfismo y monomorfismo y por tanto un isomorfismo de grupos. Se sigue entonces que $F_* : \Pi(X, x_0) \to \Pi(Y, F(x_0))$ es también un isomorfismo. Se ha probado pues el siguiente resultado:

**Corolario 2.** *Sea* $F : X \to Y$ *una equivalencia homotópica. Entonces para todo punto* $x \in X$ *se tiene que* $F_* : \Pi(X, x) \to \Pi(Y, F(x))$ *es un isomorfismo de grupos.*

**Ejemplo 2.** *Consideremos el cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *y la circunferencia* $\mathbb{S}^1$. *Entonces la aplicación* $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *definida por* $F(x, t) = x$ *es una equivalencia homotópica.*

En efecto, definimos $G : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ por $G(x) = (x, 0)$. Entonces $F \circ G = I$ y $H : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times [0, 1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dada por

$$H((x, t), s) = (x, ts)$$

es una homotopía de $G \circ F$ a la identidad.

Por tanto el grupo fundamental del cilindro en cualquiera de sus puntos es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Conviene introducir un concepto, que es usual en topología.

**Definición 8.** Un espacio topológico $X$ se dice *simplemente conexo* si es arco-conexo y su grupo fundamantal es trivial.

Con un argumento sencillo, que luego servirá en la demostración del teorema de Seifert Van-Kampen, se puede calcular el grupo fundamental de la esfera.

**Ejemplo 3.** *La esfera* $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, *es simplemente conexa.*

Como consecuencia se tiene:

**Proposición 11.** *(1)* $\mathbb{S}^1$ *y* $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ *no son del mismo tipo de homotopía (en particular no son homeomorfos).*

*(2)* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ *no son homeomorfos, aunque son del mismo tipo de homotopía.*

Ahora podemos demostrar otro resultado clásico en topología.

**Theorem 3** (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Sea* $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una función continua. Entonces existe un punto* $x \in \mathbb{S}^2$ *tal que* $F(-x) = F(x)$.

Asi, siempre existe un punto en la tierra que tiene la misma presión y temperatura que su antípoda.

**Corolario 3** (Teorema del bocadillo de jamón)**.** *Sean* $A_1, A_2$ *subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^2$. *Entonces existe una recta de* $\mathbb{R}^2$ *que divide a cada* $A_i, , i = 1, 2$ *en trozos de igual área.*

Terminemos este epígrafe calculando el grupo fundamantal del espacio proyectivo.

**Ejemplo 4.** *Sea* $\mathbb{RP}^n$ *el espacio proyectivo de dimensión* $n \geq 2$. *Entonces su grupo fundamental es isomorfo a* $\mathbb{Z}_2$.

## 5. Teorema de Seifert-Van Kampen

El objetivo de esta sección es probar un resultado poderoso acerca del grupo fundamental de la unión de dos espacios. Para entender el resultado, necesitamos introducir un material básico sobre producto libre de grupos.

Sea $\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una familia disjunta de grupos. Una *palabra* es una expresión $x_1 x_2 \dots x_n$ donde cada $x_i$ está en algún $G_\alpha$. Dicha palabra se llama *reducida* si ningún $x_i = 1$ (esto es es el neutro) y $x_i's$ adyacentes estan en $G_\alpha's$ diferentes. Dos palabras pueden multiplicarse por yuxtaposición, esto es

$$(x_1 x_2 \dots x_n) \cdot (y_1 y_2 \dots y_m) = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m,$$

y dos palabras reducidas pueden también multiplicarse por yuxtaposición y despues se convierten en reducidas, esto es si $x_n$ e $y_1$ estan en el mismo grupo, entonces $x_n y_1$ se sustituye por $x_n \cdot y_1$ si $x_n \cdot y_1$ no es el neutro. En caso de serlo se omite $x_n y_1$. Se procede asi sucesivamente. El elemento neutro es la palabra vacia, que representaremos por 1. Es claro que el conjunto de palabras reducidas, con la anterior multiplicación, constituye un grupo donde el inverso de la palabra reducida $x_1 \dots x_n$ es la palabra reducida $x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$. La propiedad asociativa no es dificil de probar. A este grupo le llamaremos el *producto libre* de los grupos $G_\alpha$ y lo representaremos por $*\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Es claro que si el cardinal de $A$ es al menos dos y los grupos no son triviales, el producto libre no es conmutativo, ya que si $x \in G_\alpha$ e $y \in G_\beta$ no son la unidad y $\alpha \neq \beta$, entonces las palabras reducidas $xy = x \cdot y$ e $yx = y \cdot x$ son diferentes.

El *grupo libre* con un generador $x$ es el grupo $F_x = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, \dots\}$ con el producto usual: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$. El *grupo libre generado por un conjunto* $S$ es

$$F_S = *\{F_x \mid x \in S\}.$$

Se suele decir que $F_S$ es el grupo de palabras de $S$.

Sea ahora $G$ un grupo y $B$ un subconjunto de $G$. El *subgrupo de $G$ generado por $B$* es el subgrupo dado por $\{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \,|\, a_i \in B, \forall 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$. Es inmediato comprobar que ese subconjunto de $G$ es un sugrupo.

En las mismas condiciones que en el párrafo anterior, el *subgrupo normal de $G$ generado por $B$* es el subgrupo de $G$ generado por el conjunto $\{g \cdot b \cdot g^{-1} \,|\, g \in G, b \in B\}$. Es conocida la propiedad que dice que este subgrupo normal es la intersección de todos los subgrupos normales de $G$ que contienen a $B$, esto es, el menor subgrupo normal de $G$ que contiene a $B$. En el grupo cociente $G/N$, las clases de equivalencia de los elementos de $B$ son el neutro.

Supongamos ahora que tenemos tres grupos $A$, $G_1$ y $G_2$ y homomorfismos $\Phi_1 : A \to G_1$ y $\Phi_2 : A \to G_2$. Se define el *producto libre amalgamado* $G_1 *_A G_2$ como el grupo cociente $(G_1 * G_2)/N$, siendo $N$ el subgrupo normal de $G_1 * G_2$ generado por el conjunto $\{\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1} \,|\, a \in A\}$. La nomenclatura usada puede confundir ya que omitimos los homomorfismos $\Phi_i$, $i = 1, 2$. Usando la observación hecha en el párrafo anterior, las clases en el grupo cociente de los elementos $\Phi_1(a)$ y $\Phi_2(a)$ son iguales.

**Theorem 4** (Teorema de Seifert- Van Kampen)**.** *Sea $X$ un espacio topológico y $U, V$ abiertos no vacios de $X$ tales que $X = U \cup V$ y $U, V$ y $U \cap V$ son conexos por arcos. Sea $x \in U \cap V$ e $i_* : \Pi(U \cap V, x) \to \Pi(U, x)$ y $j_* : \Pi(U \cap V, x) \to \Pi(V, x)$ los homomorfismos inducidos entre los correspondientes grupos fundamentales por las inclusiones $i, j$. Entonces existe un isomorfismo*

$$\Theta : \Pi(U, x) *_{\Pi(U \cap V, x)} \Pi(V, x) \to \Pi(X, x).$$

**Corolario 4.** *Bajo las condiciones del teorema de Seifert-Van Kampen, si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces para todo punto $x \in U \cap V$ se tiene que*

$$\Pi(X, x) \equiv \Pi(U, x) * \Pi(V, x).$$

**Corolario 5.** *Bajo las mismas condiciones del teorema de Seifert-Van Kampen, si $V$ es simplemente conexo, entonces para cada punto $x \in U \cap V$ se tiene que*

$$\Pi(X, x) \equiv \Pi(U, x)/N,$$

*donde $N$ es el subgrupo normal de $\Pi(U, x)$ generado por $i_*(\Pi(U \cap V, x))$.*

**Ejemplo 5.** *Sea $X$ la unión de $n$ circunferencias pegadas por un punto. Entonces su grupo fundamental es isomorfo a un grupo libre de $n$ generadores.*

**Ejemplo 6.** *Sea $X = \mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1$, esto es el complemento del nudo trivial en $\mathbb{R}^3$. Entonces, si embebemos $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{S}^3$ por la inversa de la proyección estereográfica, el teorema de Seifert-Van Kampen me dice que $\Pi(\mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1) \equiv \Pi(\mathbb{S}^3 - \mathbb{S}^1)$.*

*Ahora, haciendo uso de nuevo del teorema de Seifert-Van Kampen, y de la propiedad de que la esfera $\mathbb{S}^3$ es union de dos toros macizos cuya intersección es un toro 2-dimensional, se puede demostrar que $\Pi(\mathbb{S}^3 - \mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{Z}$. Por tanto el grupo fundamental del nudo trivial es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*