Examen Final de Topología II

4$^{\text{o}}$ curso del Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

2 de febrero de 2017

- Escribir el nombre en la parte superior de cada uno de los folios que se entreguen.
- Segundo parcial: Ejercicios 3 y 4.

Ejercicio 1. Se define en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ la relación de equivalencia siguiente: $(x,t)R(x',t')$ si $(x,t) = (x',t')$ o $t = t' = 0$ y $x = -x'$ o $t = t' = 1$.

(1) Calcular el grupo fundamental del espacio cociente $\mathbb{S}^1 \times [0,1]/R$.
(2) Clasificar los recubridores de $\mathbb{S}^1 \times [0,1]/R$.
(3) Es $\mathbb{S}^1 \times [0,1]/R$ una superficie topológica? En caso afirmativo, podrías identificarla?

Ejercicio 2. Sea

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \,|\, |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$$

la esfera de dimensión $2n+1$ y $p \geq 2$ un entero. Entonces para todo $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ definimos $\Phi_k : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ como la aplicación dada por

$$\Phi_k(z_1, \cdots, z_{n+1}) = e^{\frac{2\pi i k}{p}}(z_1, \cdots, z_{n+1}).$$

(1) Probar que $G = \{\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_{p-1}\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{S}^{2n+1}$ que actua discontinuamente sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$. Al espacio cociente de $\mathbb{S}^{2n+1}$ por dicha acción le llamamos espacio lente y lo representamos por $\mathbb{L}_p^{2n+1} = \mathbb{S}^{2n+1}/G$.
(2) Calcular el grupo fundamental de $\mathbb{L}_p^{2n+1}$.
(3) Clasificar los recubridores de $\mathbb{L}_p^{2n+1}$ cuando p es primo y cuando $p = 4$.

Ejercicio 3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua.

(a) Demostrar que si f es positiva (es decir, $f(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), entonces el subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ dado por
$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 = f(x,y)\}$$
es una superficie topológica.
(b) Decidir si la afirmación anterior sigue siendo cierta en el caso en que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea no negativa (es decir, $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

Ejercicio 4. Consideremos la superficie con presentación poligonal

$$\mathcal{P} = \langle \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}\,;\, i^{-1}abcb^{-1}h\,,\, gdace^{-1}f^{-1}d^{-1}\,,\, g^{-1}eh^{-1}if\rangle.$$

(a) Determinar a cual de las superficies modelo es homeomorfa. Calcular su característica de Euler y decidir su carácter de orientabilidad.
(b) Expresar la superficie, si es posible, como suma conexa de toros y botellas de Klein.
(c) Expresar la superficie, si es posible, como suma conexa de toros y exactamente un plano proyectivo.